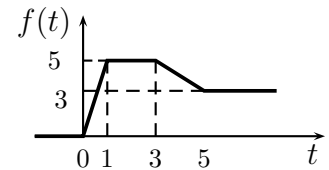


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

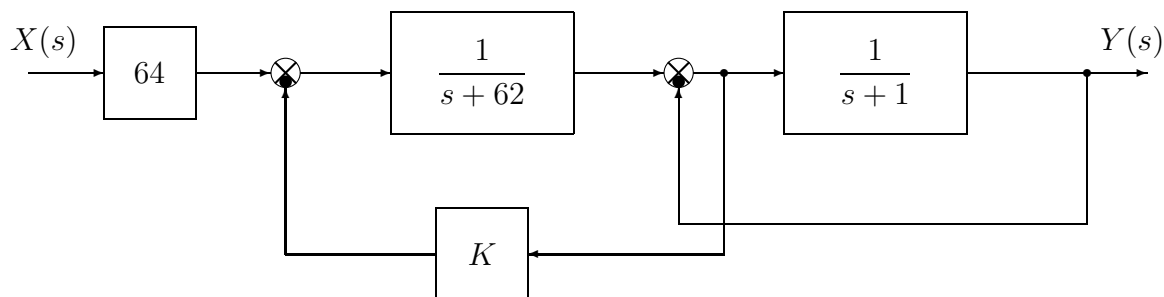
$$x_1(t) = \frac{3}{j} (e^{j3t} - e^{-j3t}) + 2 \cos(5\pi t), \quad x_2(t) = 4 \sin(6t - 12),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+1)(s-4)^2}, \quad G_2(s) = \frac{6}{s(s+2)^4}, \quad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-3)(s+4)}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -60$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

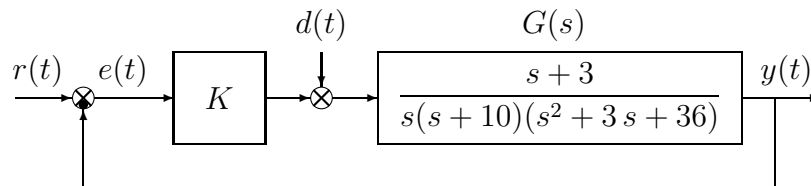
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema;
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema;
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema;
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema;
5. il guadagno statico K_0 ;
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino;
7. l'istante di massima sovraelongazione;
8. la massima sovraelongazione percentuale;
9. il periodo delle oscillazioni.

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 5$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.1 d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K , l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2t$.

d.4) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K G(s)$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 50$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K G(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4 + 3 \cos(0.3t + \pi/5)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

**Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2011/12
22 Febbraio 2012 - Domande Teoriche**

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il sistema dinamico con equazione caratteristica $a_n s^n - a_{n-1} s^{n-1} + \dots - a_1 s + a_0 = 0$ con $a_n > 0$, $a_{n-1} > 0$, \dots , $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ risulta:
 - stabile;
 - asintoticamente stabile;
 - instabile.
2. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{(s+1)}{(s+8)(s^2+s+4)}$ possiede:
 - un polo dominante;
 - una coppia di poli dominanti;
 - nessun polo dominante.
3. Una funzione di trasferimento con grado del denominatore uguale a quello del numeratore:
 - è fisicamente realizzabile;
 - è stabile;
 - ha un valore iniziale non nullo nella risposta al gradino.
4. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La proprietà di traslazione in s delle trasformate di Laplace afferma che:
 - $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$;
 - $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = e^{-a} F(s)$;
 - $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s - a)$;
 - $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \frac{F(s)}{a}$.
5. Condizione sufficiente affinché un sistema lineare sia instabile è che abbia tutti i poli:
 - a parte reale negativa;
 - a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con molteplicità maggiore di uno;
 - a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con molteplicità unitaria.
6. La formula di Mason permette di determinare:
 - la trasmittanza di un grafo di segnale;
 - la funzione di trasferimento di uno schema a blocchi;
 - la risposta di un sistema dinamico lineare.
7. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo cinque costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:
 - il 100% del valore finale;
 - il 99.3% del valore finale;
 - il 95% del valore finale;
 - il 85% del valore finale.

8. La derivata iniziale della risposta all'impulso di Dirac di un sistema del secondo ordine privo di zeri risulta:
- > 0 ;
 - $= 0$;
 - < 0 ;
9. Un sistema lineare $G(s)$ avente due poli doppi posizionati sull'asse immaginario è:
- semplicemente stabile;
 - instabile;
 - stabile ingresso limitato - uscita limitata.
10. La massima sovraelongazione percentuale S del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+4s+4}$ in risposta ad un ingresso a gradino è:
- $S = 0\%$;
 - $S = 20\%$;
 - $S = 50\%$;
 - $S = 100\%$.
11. Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta avente tutti i poli a parte reale negativa soggetto ad una eccitazione sinusoidale presenta una risposta a regime:
- sinusoidale avente frequenza doppia dell'eccitazione;
 - sinusoidale avente la stessa frequenza dell'eccitazione;
 - costante.
12. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+1)}{s(s+4)}$ per $\omega \in [0, \infty[$:
- termina nell'origine;
 - presenta un asintoto verticale;
 - si evolve tutto nel primo quadrante.

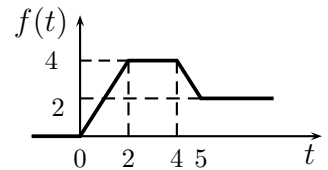
Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Nella graficazione del contorno delle radici al variare del parametro τ , un asintoto può essere percorso dall'infinito al finito:
- solo se il grado relativo è negativo;
 - solo se il grado relativo è positivo;
 - anche se il grado relativo è nullo.
14. Quando è possibile utilizzarlo, il metodo del contorno delle radici si applica:
- ai soli sistemi con retroazione unitaria;
 - ai soli sistemi con retroazione algebrica;
 - ai sistemi con retroazione qualunque.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

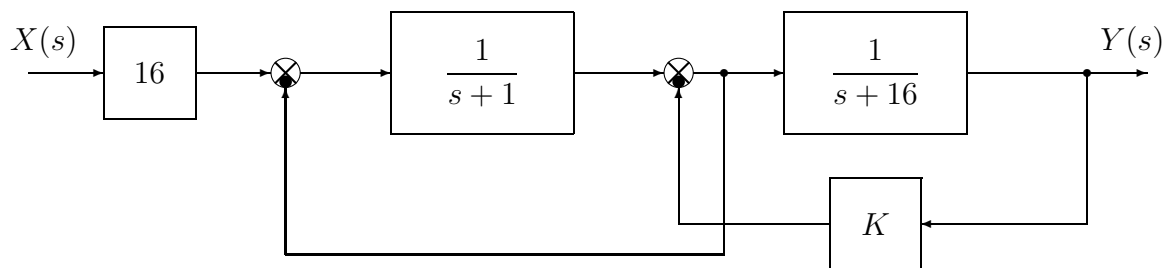
$$x_1(t) = 6 \cos(3t - 12), \quad x_2(t) = \frac{2}{j} (e^{j2t} - e^{-j2t}) + 3 \sin(4\pi t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{s(s+2)^4}, \quad G_2(s) = \frac{s-3}{(s+1)(s+2)(s+3)}, \quad G_3(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-2)(s+3)^2}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -16$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

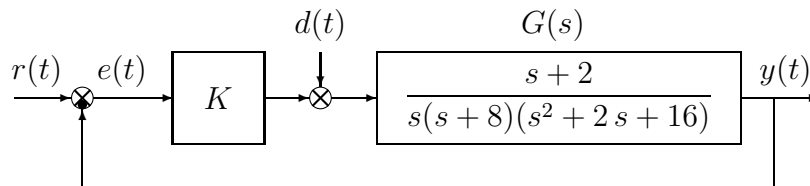
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema;
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema;
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema;
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema;
5. il guadagno statico K_0 ;
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino;
7. l'istante di massima sovraelongazione;
8. la massima sovraelongazione percentuale;
9. il periodo delle oscillazioni.

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 4$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2 d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K , l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3t$.

d.4) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K G(s)$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K G(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + 2 \cos(0.4t + \pi/4)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

**Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2011/12
22 Febbraio 2012 - Domande Teoriche**

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il sistema dinamico con equazione caratteristica $a_n s^n - a_{n-1} s^{n-1} + \dots - a_1 s + a_0 = 0$ con $a_n > 0$, $a_{n-1} > 0$, \dots , $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ risulta:
 - instabile;
 - asintoticamente stabile;
 - stabile.
2. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s^2+4s+64)}$ possiede:
 - un polo dominante;
 - una coppia di poli dominanti;
 - nessun polo dominante.
3. Una funzione di trasferimento con grado del denominatore uguale a quello del numeratore:
 - è stabile;
 - è fisicamente realizzabile;
 - ha un valore iniziale non nullo nella risposta al gradino.
4. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La proprietà di traslazione in s delle trasformate di Laplace afferma che:
 - $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s - a)$;
 - $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = e^{-a} F(s)$;
 - $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$;
 - $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \frac{F(s)}{a}$.
5. Condizione sufficiente affinché un sistema lineare sia instabile è che abbia tutti i poli:
 - a parte reale negativa;
 - a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con molteplicità unitaria;
 - a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con molteplicità maggiore di uno.
6. La formula di Mason permette di determinare:
 - la risposta di un sistema dinamico lineare;
 - la funzione di trasferimento di uno schema a blocchi;
 - la trasmittanza di un grafo di segnale.
7. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo cinque costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:
 - il 85% del valore finale;
 - il 95% del valore finale;
 - il 99.3% del valore finale;
 - il 100% del valore finale.

8. La derivata iniziale della risposta all'impulso di Dirac di un sistema del secondo ordine privo di zeri risulta:
- = 0;
 - > 0;
 - < 0;
9. Un sistema lineare $G(s)$ avente due poli doppi posizionati sull'asse immaginario è:
- instabile;
 - stabile ingresso limitato - uscita limitata;
 - semplicemente stabile.
10. La massima sovraelongazione percentuale S del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+4s+4}$ in risposta ad un ingresso a gradino è:
- $S = 100\%$;
 - $S = 50\%$;
 - $S = 20\%$;
 - $S = 0\%$.
11. Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta avente tutti i poli a parte reale negativa soggetto ad una eccitazione sinusoidale presenta una risposta a regime:
- sinusoidale avente la stessa frequenza dell'eccitazione;
 - sinusoidale avente frequenza doppia dell'eccitazione;
 - costante.
12. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+1)}{s(s+4)}$ per $\omega \in [0, \infty[$:
- si evolve tutto nel primo quadrante;
 - presenta un asintoto verticale;
 - termina nell'origine.

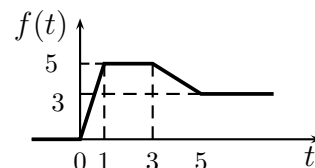
Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Nella graficazione del contorno delle radici al variare del parametro τ , un asintoto può essere percorso dall'infinito al finito:
- solo se il grado relativo è positivo;
 - solo se il grado relativo è negativo;
 - anche se il grado relativo è nullo.
14. Quando è possibile utilizzarlo, il metodo del contorno delle radici si applica:
- ai sistemi con retroazione qualunque;
 - ai soli sistemi con retroazione unitaria;
 - ai soli sistemi con retroazione algebrica.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{3}{j} (e^{j3t} - e^{-j3t}) + 2 \cos(5\pi t), \quad x_2(t) = 4 \sin(6t - 12),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{18}{s^2 + 9} + \frac{2s}{s^2 + 25\pi^2}, \quad X_2(s) = \frac{24e^{-2s}}{s^2 + 36}, \quad X_3(s) = \frac{5}{s^2} - \frac{5e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^2} + \frac{e^{-5s}}{s^2}$$

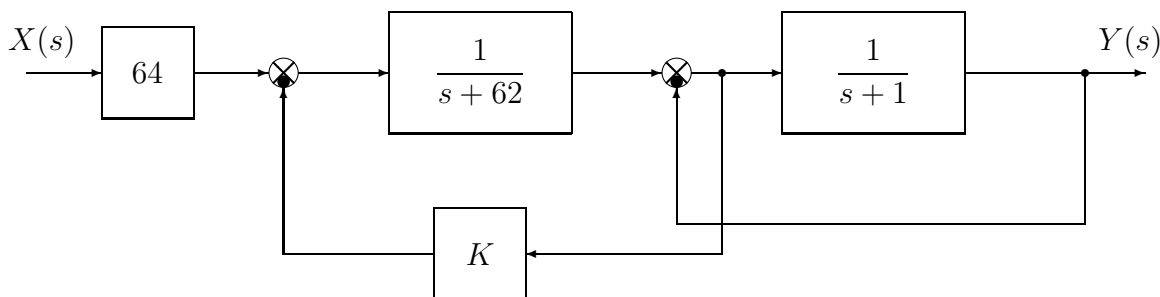
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+1)(s-4)^2}, \quad G_2(s) = \frac{6}{s(s+2)^4}, \quad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-3)(s+4)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{9}{25} e^{-t} + \frac{16}{25} e^{4t} + \frac{4}{5} t e^{4t}, \quad g_2(t) = \int_0^t \tau^3 e^{-2\tau} d\tau, \quad g_3(t) = \frac{1}{10} e^{-2t} + \frac{4}{35} e^{3t} - \frac{3}{14} e^{-4t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:

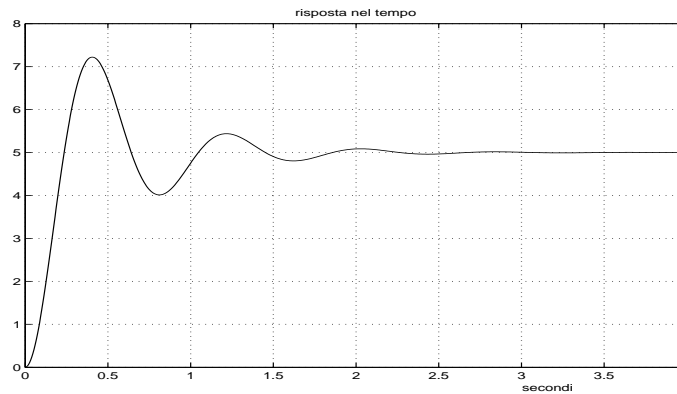


c.1) Posto $K = -60$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{64}{s^2 + 4s + 64}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

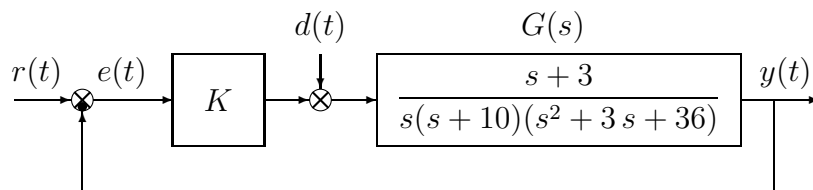
- la parte reale σ dei poli dominanti del sistema; $\sigma = 2$
- la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; $\omega = 7.746$
- la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema; $\omega_n = 8$
- il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; $\delta = 0.25$
- il guadagno statico K_0 ; $K_0 = 1$
- il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino; $T_a = \frac{3}{2}$
- l'istante di massima sovraelongazione; $T_M = 0.41$
- la massima sovraelongazione percentuale; $S = 44.4\%$
- il periodo delle oscillazioni. $T = 0.82$



c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 5$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+3)}{s(s+10)(s^2+3s+36)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 13s^3 + 66s^2 + (360+K)s + 3K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 66 & 3K \\ 3 & 13 & 360+K & \\ 2 & 498-K & 39K & \\ 1 & -K^2-369K+179280 & & \\ 0 & 39K & & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \quad K < 277.37$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{360+K^*}{13}} = 7.0$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.1 d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0) d_0}{1 + K G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.1 d_0$$

Il sistema $G(s)$ è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 10$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K , l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{2}{K_v}$ con $K_v = \frac{K}{120}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{240}{K}.$$

d.4) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K G(s)$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

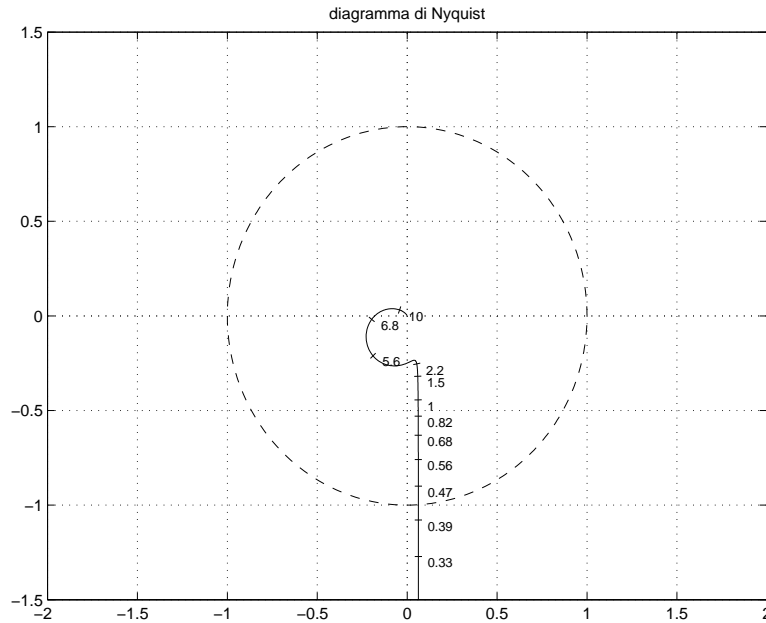


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau \Delta_a = 0.063$.

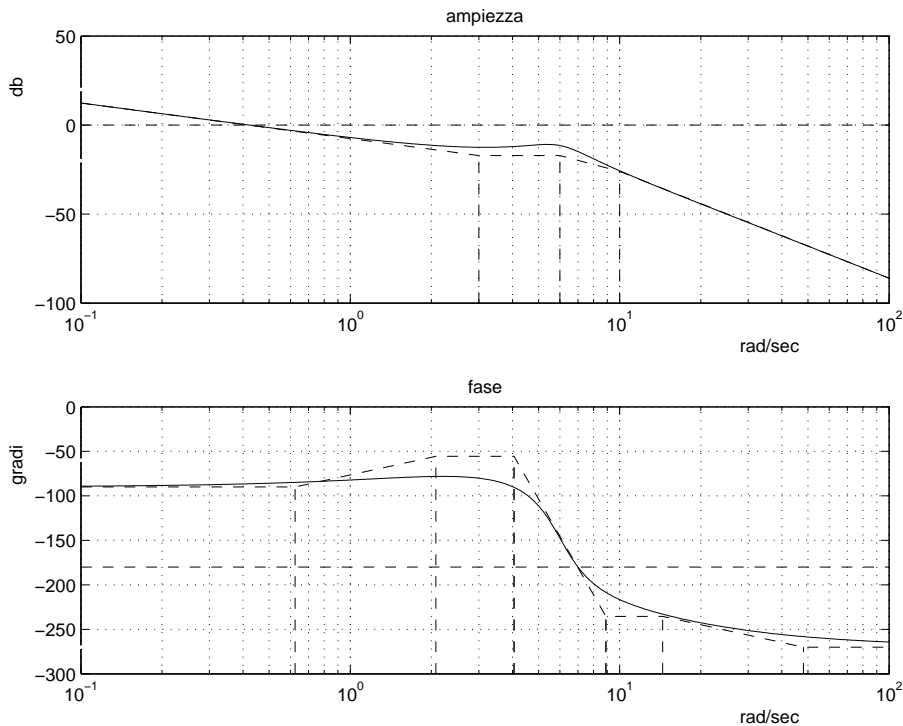
Esiste una intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{50}{K^*} = -0.18$$

Il corrispondente valore della pulsazione è $\omega^* = 7.0$

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 50$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello



$KG(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.4 \text{ rad/s}$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4 + 3 \cos(0.3t + \pi/5)$.

Soluzione: La risposta in catena aperta del sistema si pu facilmente determinare a partire dalla trasformata di Laplace dell'ingresso: $R(s) = \frac{4}{s} + 3 \left(\frac{\cos(\pi/5)s - 0.3 \sin(\pi/5)}{s^2 + 0.3^2} \right)$.

L'uscita del sistema quindi data da $Y(s) = KR(s)G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

Soluzione: vedi figura 4. Soluzione:

$$\begin{aligned} \sigma &= -3.33 \\ \phi &= 60, 180, 300 \\ s^* &= 7.0i \\ K^* &= 277.37 \end{aligned}$$

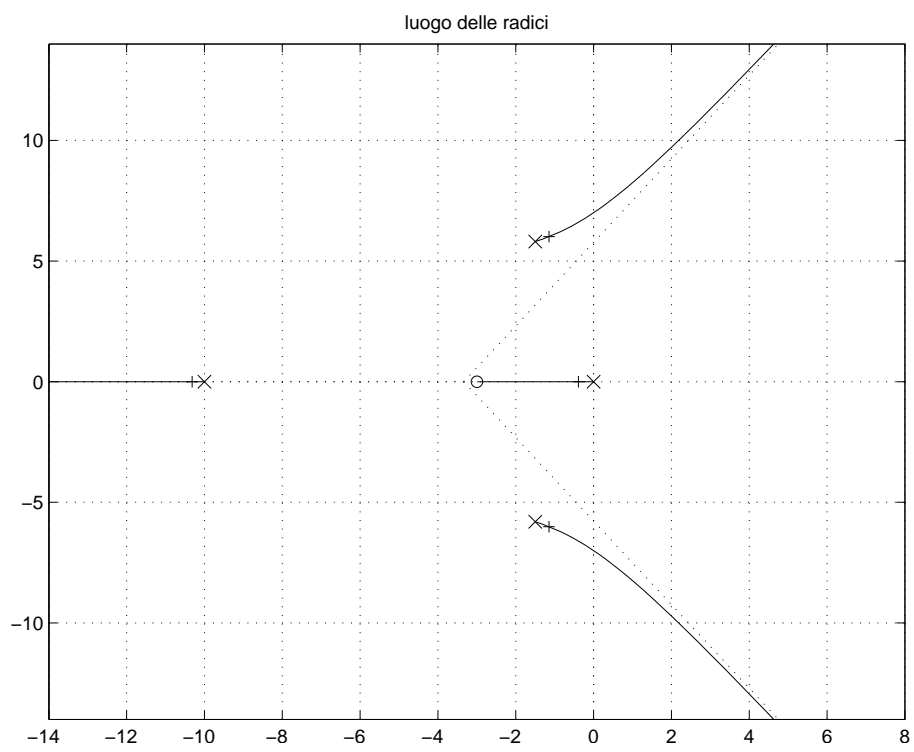


Figura 2: Luogo delle radici di $G(s)$.

**Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2011/12
22 Febbraio 2012 - Domande Teoriche**

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il sistema dinamico con equazione caratteristica $a_n s^n - a_{n-1} s^{n-1} + \dots - a_1 s + a_0 = 0$ con $a_n > 0$, $a_{n-1} > 0$, \dots , $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ risulta:
 - stabile;
 - asintoticamente stabile;
 - instabile.
2. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{(s+1)}{(s+8)(s^2+s+4)}$ possiede:
 - un polo dominante;
 - una coppia di poli dominanti;
 - nessun polo dominante.
3. Una funzione di trasferimento con grado del denominatore uguale a quello del numeratore:
 - è fisicamente realizzabile;
 - è stabile;
 - ha un valore iniziale non nullo nella risposta al gradino.
4. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La proprietà di traslazione in s delle trasformate di Laplace afferma che:
 - $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$;
 - $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = e^{-a} F(s)$;
 - $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s - a)$;
 - $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \frac{F(s)}{a}$.
5. Condizione sufficiente affinché un sistema lineare sia instabile è che abbia tutti i poli:
 - a parte reale negativa;
 - a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con molteplicità maggiore di uno;
 - a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con molteplicità unitaria.
6. La formula di Mason permette di determinare:
 - la trasmittanza di un grafo di segnale;
 - la funzione di trasferimento di uno schema a blocchi;
 - la risposta di un sistema dinamico lineare.
7. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo cinque costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:
 - il 100% del valore finale;
 - il 99.3% del valore finale;
 - il 95% del valore finale;
 - il 85% del valore finale.

8. La derivata iniziale della risposta all'impulso di Dirac di un sistema del secondo ordine privo di zeri risulta:
- > 0 ;
 - $= 0$;
 - < 0 ;
9. Un sistema lineare $G(s)$ avente due poli doppi posizionati sull'asse immaginario è:
- semplicemente stabile;
 - instabile;
 - stabile ingresso limitato - uscita limitata.
10. La massima sovraelongazione percentuale S del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+4s+4}$ in risposta ad un ingresso a gradino è:
- $S = 0\%$;
 - $S = 20\%$;
 - $S = 50\%$;
 - $S = 100\%$.
11. Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta avente tutti i poli a parte reale negativa soggetto ad una eccitazione sinusoidale presenta una risposta a regime:
- sinusoidale avente frequenza doppia dell'eccitazione;
 - sinusoidale avente la stessa frequenza dell'eccitazione;
 - costante.
12. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+1)}{s(s+4)}$ per $\omega \in [0, \infty]$:
- termina nell'origine;
 - presenta un asintoto verticale;
 - si evolve tutto nel primo quadrante.

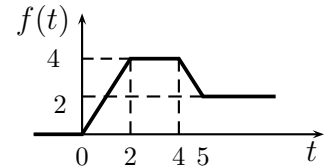
Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Nella graficazione del contorno delle radici al variare del parametro τ , un asintoto può essere percorso dall'infinito al finito:
- solo se il grado relativo è negativo;
 - solo se il grado relativo è positivo;
 - anche se il grado relativo è nullo.
14. Quando è possibile utilizzarlo, il metodo del contorno delle radici si applica:
- ai soli sistemi con retroazione unitaria;
 - ai soli sistemi con retroazione algebrica;
 - ai sistemi con retroazione qualunque.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 6 \cos(3t - 12), \quad x_2(t) = \frac{2}{j} (e^{j2t} - e^{-j2t}) + 3 \sin(4\pi t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{6s e^{-4s}}{s^2 + 9}, \quad X_2(s) = \frac{8}{s^2 + 4} + \frac{12\pi}{s^2 + 16\pi^2}, \quad X_3(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s^2} - \frac{2e^{-4s}}{s^2} + \frac{2e^{-5s}}{s^2}$$

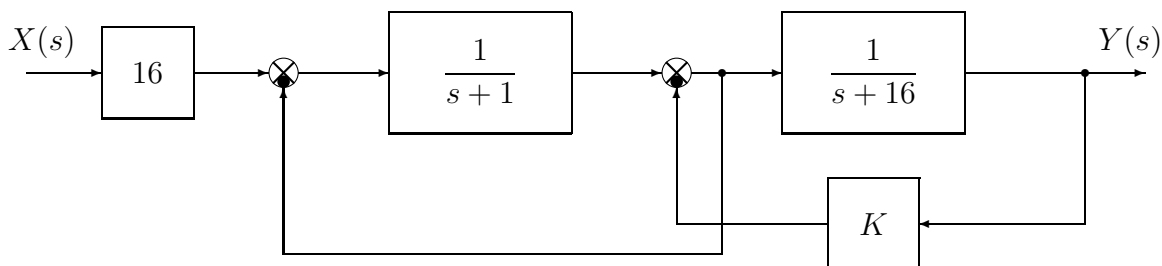
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{s(s+2)^4}, \quad G_2(s) = \frac{s-3}{(s+1)(s+2)(s+3)}, \quad G_3(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-2)(s+3)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t \tau^3 e^{-2\tau} d\tau, \quad g_2(t) = -2e^{-t} + 5e^{-2t} - 3e^{-3t}, \quad g_3(t) = \frac{16}{25} e^{2t} + \frac{9}{25} e^{-3t} - \frac{1}{5} t e^{-3t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:

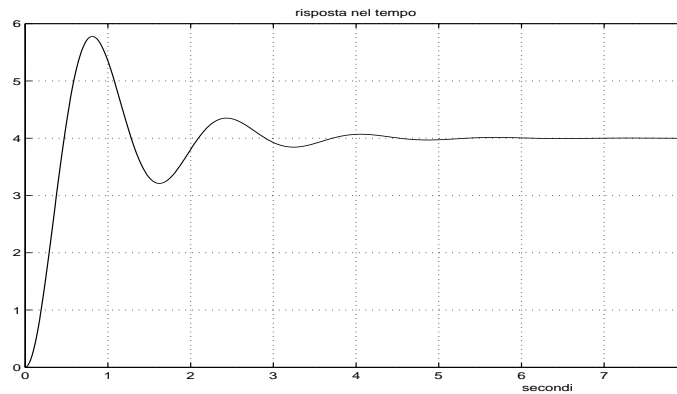


c.1) Posto $K = -16$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{16}{s^2 + 2s + 16}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

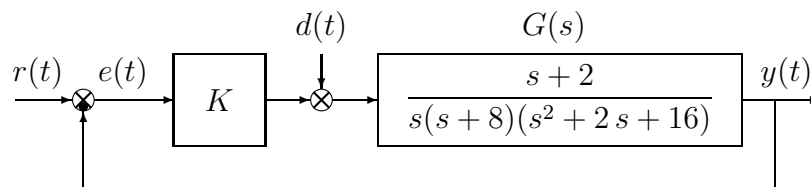
- la parte reale σ dei poli dominanti del sistema; $\sigma = 1$
- la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; $\omega = 3.873$
- la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema; $\omega_n = 4$
- il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; $\delta = 0.25$
- il guadagno statico K_0 ; $K_0 = 1$
- il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino; $T_a = 3$
- l'istante di massima sovraelongazione; $T_M = 0.81$
- la massima sovraelongazione percentuale; $S = 44.4\%$
- il periodo delle oscillazioni. $T = 1.62$



c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 4$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+2)}{s(s+8)(s^2+2s+16)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 10s^3 + 32s^2 + (128+K)s + 2K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

4	1	32	$2K$
3	10	$128+K$	
2	$192-K$	$20K$	
1	$-K^2 - 136K + 24576$		
0	$20K$		

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \quad K < 102.88$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{128+K^*}{10}} = 4.8$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2 d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0) d_0}{1 + K G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.2 d_0$$

Il sistema $G(s)$ è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 5$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K , l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{3}{K_v}$ con $K_v = \frac{K}{64}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{192}{K}.$$

d.4) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K G(s)$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

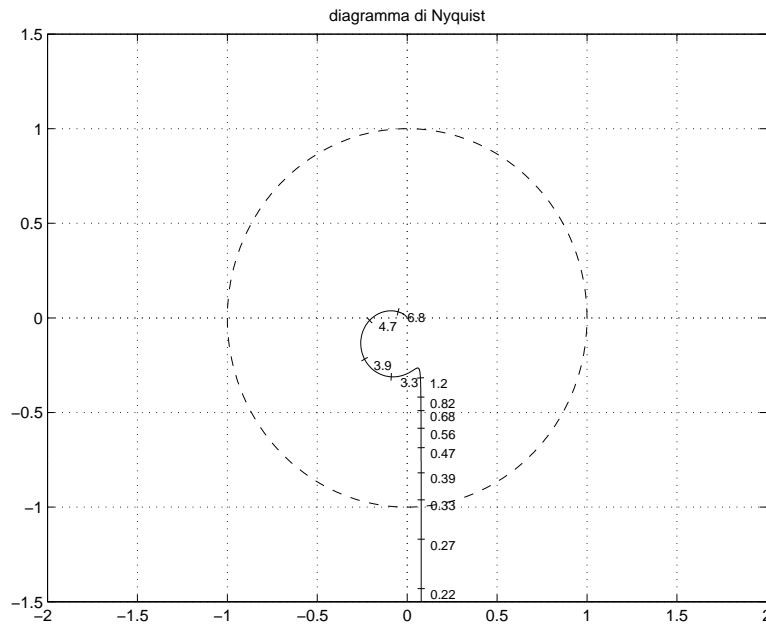


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau \Delta_a = 0.078$.

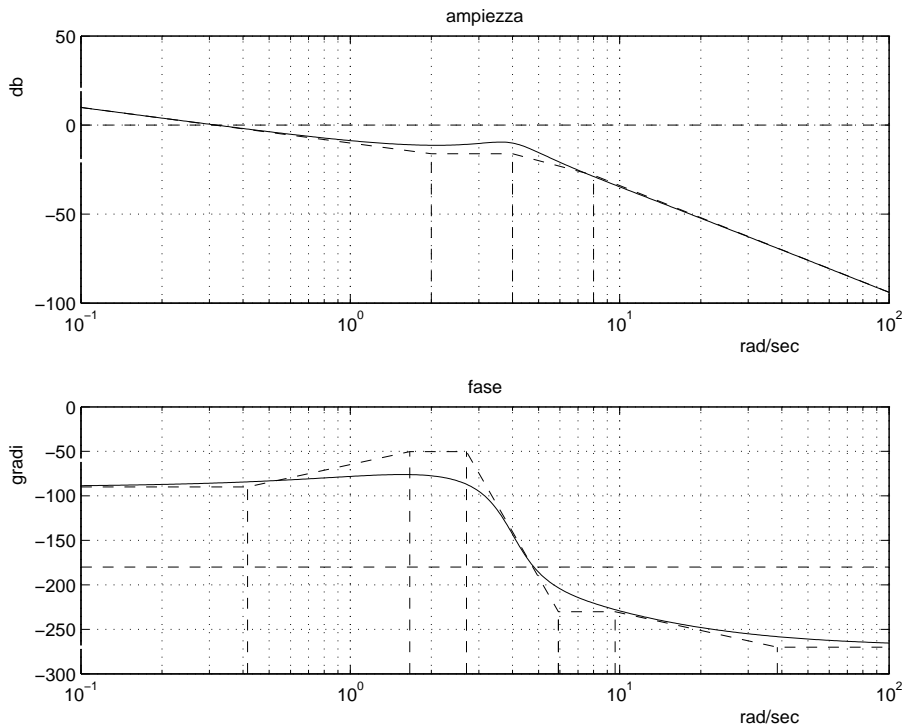
Esiste una intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{20}{K^*} = -0.19$$

Il corrispondente valore della pulsazione è $\omega^* = 4.8$

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello



$KG(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.3 \text{ rad/s}$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + 2 \cos(0.4t + \pi/4)$.

Soluzione: La risposta in catena aperta del sistema si pu facilmente determinare a partire dalla trasformata di Laplace dell'ingresso: $R(s) = \frac{5}{s} + 2 \left(\frac{\cos(\pi/4)s - 0.4 \sin(\pi/4)}{s^2 + 0.4^2} \right)$.

L'uscita del sistema quindi data da $Y(s) = KR(s)G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

Soluzione: vedi figura 4. Soluzione:

$$\begin{aligned} \sigma &= -2.66 \\ \phi &= 60, 180, 300 \\ s^* &= 4.8i \\ K^* &= 102.88 \end{aligned}$$

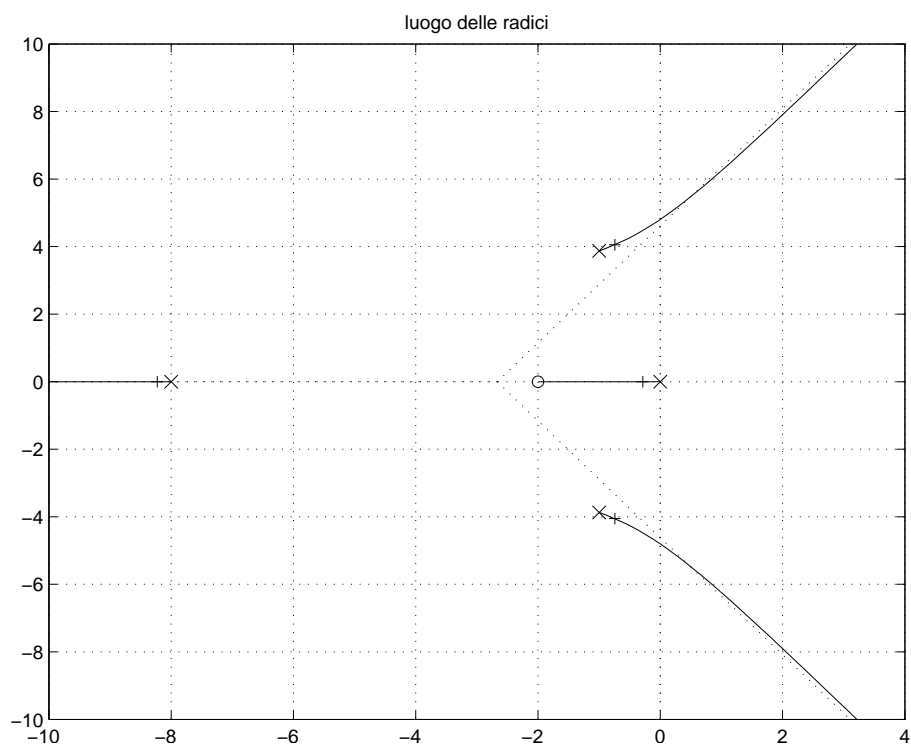


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2011/12
22 Febbraio 2012 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

- Il sistema dinamico con equazione caratteristica $a_n s^n - a_{n-1} s^{n-1} + \dots - a_1 s + a_0 = 0$ con $a_n > 0$, $a_{n-1} > 0$, \dots , $a_1 > 0$, $a_0 > 0$ risulta:
 - instabile;
 - asintoticamente stabile;
 - stabile.
- La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s^2+4s+64)}$ possiede:
 - un polo dominante;
 - una coppia di poli dominanti;
 - nessun polo dominante.
- Una funzione di trasferimento con grado del denominatore uguale a quello del numeratore:
 - è stabile;
 - è fisicamente realizzabile;
 - ha un valore iniziale non nullo nella risposta al gradino.
- Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La proprietà di traslazione in s delle trasformate di Laplace afferma che:
 - $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s - a)$;
 - $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = e^{-a} F(s)$;
 - $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s + a)$;
 - $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \frac{F(s)}{a}$.
- Condizione sufficiente affinché un sistema lineare sia instabile è che abbia tutti i poli:
 - a parte reale negativa;
 - a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con molteplicità unitaria;
 - a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con molteplicità maggiore di uno.
- La formula di Mason permette di determinare:
 - la risposta di un sistema dinamico lineare;
 - la funzione di trasferimento di uno schema a blocchi;
 - la trasmittanza di un grafo di segnale.
- La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo cinque costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:
 - il 85% del valore finale;
 - il 95% del valore finale;
 - il 99.3% del valore finale;
 - il 100% del valore finale.

8. La derivata iniziale della risposta all'impulso di Dirac di un sistema del secondo ordine privo di zeri risulta:
- = 0;
 - > 0;
 - < 0;
9. Un sistema lineare $G(s)$ avente due poli doppi posizionati sull'asse immaginario è:
- instabile;
 - stabile ingresso limitato - uscita limitata;
 - semplicemente stabile.
10. La massima sovraelongazione percentuale S del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+4s+4}$ in risposta ad un ingresso a gradino è:
- $S = 100\%$;
 - $S = 50\%$;
 - $S = 20\%$;
 - $S = 0\%$.
11. Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta avente tutti i poli a parte reale negativa soggetto ad una eccitazione sinusoidale presenta una risposta a regime:
- sinusoidale avente la stessa frequenza dell'eccitazione;
 - sinusoidale avente frequenza doppia dell'eccitazione;
 - costante.
12. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+1)}{s(s+4)}$ per $\omega \in [0, \infty[$:
- si evolve tutto nel primo quadrante;
 - presenta un asintoto verticale;
 - termina nell'origine.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Nella graficazione del contorno delle radici al variare del parametro τ , un asintoto può essere percorso dall'infinito al finito:
- solo se il grado relativo è positivo;
 - solo se il grado relativo è negativo;
 - anche se il grado relativo è nullo.
14. Quando è possibile utilizzarlo, il metodo del contorno delle radici si applica:
- ai sistemi con retroazione qualunque;
 - ai soli sistemi con retroazione unitaria;
 - ai soli sistemi con retroazione algebrica.