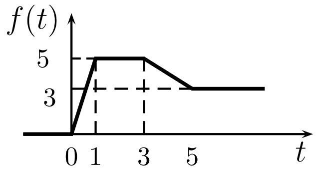
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

7 Settembre 2011 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

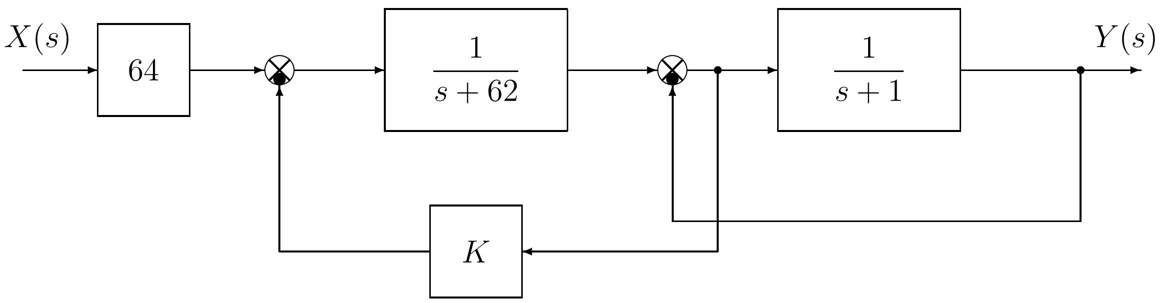
$$x_1(t) = \tfrac{3}{j}\,(e^{j\,3\,t} - e^{-j\,3\,t}) + 2\,\cos(5\,\pi\,t), \qquad x_2(t) = 4\,\sin(6\,t - 12),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+1)\,(s-4)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{6}{s\,(s+2)^4}, \qquad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+2)\,(s-3)\,(s+4)}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -60$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

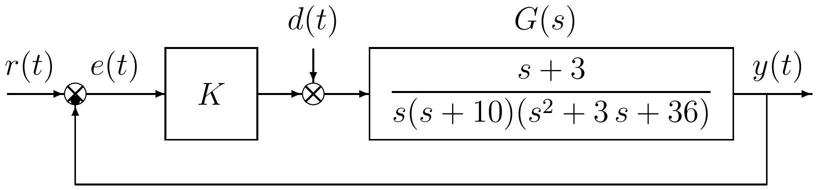
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema;
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema;
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema;
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema;
5. il guadagno statico K_0;
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino;
7. l'istante di massima sovraelongazione;
8. la massima sovraelongazione percentuale;
9. il periodo delle oscillazioni.

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 5$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.1\, d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2\,t$.

d.4) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K\,G(s)$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 50$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4 + 3\,\cos(0.3\,t + \pi/5)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11
7 Settembre 2011 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il sistema dinamico con equazione caratteristica $a_n s^n - a_{n-1}s^{n-1} + \ldots - a_1 s + a_0 = 0$ con $a_n > 0,\ a_{n-1} > 0,\ \ldots,\ a_1 > 0,\ a_0 > 0$ risulta:
   - ◯ stabile;
   - ◯ asintoticamente stabile;
   - ◯ instabile.
2. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{(s+1)}{(s+8)(s^2+s+4)}$ possiede:
   - ◯ un polo dominante;
   - ◯ una coppia di poli dominanti;
   - ◯ nessun polo dominante.
3. Una funzione di trasferimento con grado del denominatore uguale a quello del numeratore:
   - ◯ è fisicamente realizzabile;
   - ◯ è stabile;
   - ◯ ha un valore iniziale non nullo nella risposta al gradino.
4. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La proprietà di traslazione in s delle trasformate di Laplace afferma che:
   - ◯ $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$;
   - ◯ $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = e^{-a}F(s)$;
   - ◯ $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s-a)$;
   - ◯ $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \frac{F(s)}{a}$.
5. Condizione sufficiente affinchè un sistema lineare sia instabile è che abbia tutti i poli:
   - ◯ a parte reale negativa;
   - ◯ a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con moltiplicità maggiore di uno;
   - ◯ a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con moltiplicità unitaria.
6. La formula di Mason permette di determinare:
   - ◯ la trasmittanza di un grafo di segnale;
   - ◯ la funzione di trasferimento di uno schema a blocchi;
   - ◯ la risposta di un sistema dinamico lineare.
7. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo cinque costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:
   - ◯ il 100% del valore finale;
   - ◯ il 99.3% del valore finale;
   - ◯ il 95% del valore finale;
   - ◯ il 85% del valore finale.

8. La derivata iniziale della risposta all'impulso di Dirac di un sistema del secondo ordine privo di zeri risulta:

   ◯ > 0;
   ◯ $= 0$;
   ◯ < 0;

9. Un sistema lineare $G(s)$ avente due poli doppi posizionati sull'asse immaginario è:

   ◯ semplicemente stabile;
   ◯ instabile;
   ◯ stabile ingresso limitato - uscita limitata.

10. La massima sovraelongazione percentuale S del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+4s+4}$ in risposta ad un ingresso a gradino è:

   ◯ $S = 0\,\%$;
   ◯ $S = 20\,\%$;
   ◯ $S = 50\,\%$;
   ◯ $S = 100\,\%$.

11. Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta avente tutti i poli a parte reale negativa soggetto ad una eccitazione sinusiodale presenta una risposta a regime:

   ◯ sinusoidale avente frequenza doppia dell'eccitazione;
   ◯ sinusoidale avente la stessa frequenza dell'eccitazione;
   ◯ costante.

12. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+1)}{s(s+4)}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

   ◯ termina nell'origine;
   ◯ presenta un asintoto verticale;
   ◯ si evolve tutto nel primo quadrante.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Nella graficazione del contorno delle radici al variare del parametro τ, un asintoto può essere percorso dall'infinito al finito:

   ◯ solo se il grado relativo è negativo;
   ◯ solo se il grado relativo è positivo;
   ◯ anche se il grado relativo è nullo.

14. Quando è possibile utilizzarlo , il metodo del contorno delle radici si applica:

   ◯ ai soli sistemi con retroazione unitaria;
   ◯ ai soli sistemi con retroazione algebrica;
   ◯ ai sistemi con retroazione qualunque.

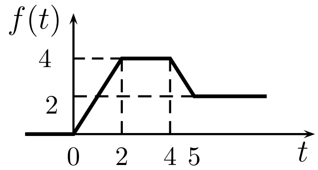
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

7 Settembre 2011 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

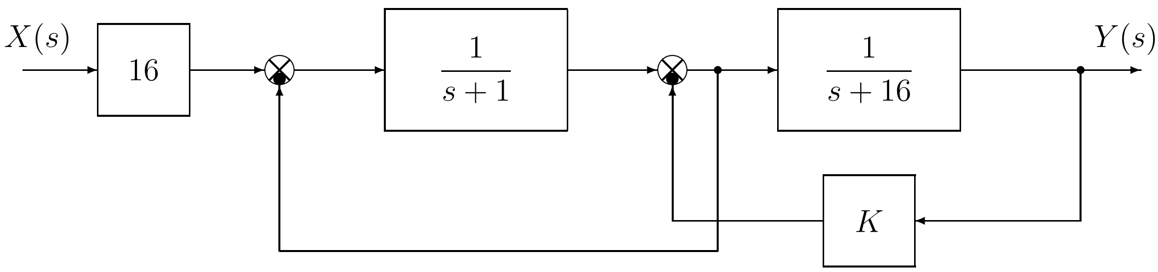
$$x_1(t) = 6\,\cos(3\,t - 12), \qquad x_2(t) = \tfrac{2}{j}\,(e^{j\,2\,t} - e^{-j\,2\,t}) + 3\,\sin(4\,\pi\,t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{s\,(s+2)^4}, \qquad G_2(s) = \frac{s-3}{(s+1)\,(s+2)\,(s+3)}, \qquad G_3(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-2)\,(s+3)^2}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -16$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

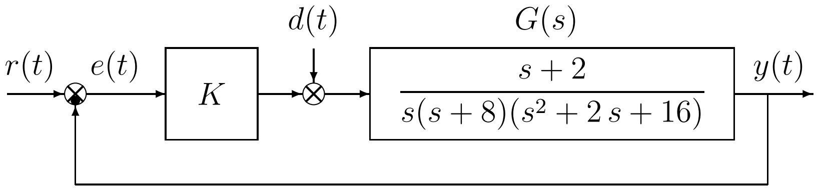
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema;
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema;
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema;
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema;
5. il guadagno statico K_0;
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino;
7. l'istante di massima sovraelongazione;
8. la massima sovraelongazione percentuale;
9. il periodo delle oscillazioni.

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 4$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2\,d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

d.4) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K\,G(s)$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + 2\,\cos(0.4\,t + \pi/4)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11
7 Settembre 2011 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il sistema dinamico con equazione caratteristica $a_n s^n - a_{n-1} s^{n-1} + \ldots - a_1 s + a_0 = 0$ con $a_n > 0,\ a_{n-1} > 0,\ \ldots,\ a_1 > 0,\ a_0 > 0$ risulta:
   - ◯ instabile;
   - ◯ asintoticamente stabile;
   - ◯ stabile.
2. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s^2+4s+64)}$ possiede:
   - ◯ un polo dominante;
   - ◯ una coppia di poli dominanti;
   - ◯ nessun polo dominante.
3. Una funzione di trasferimento con grado del denominatore uguale a quello del numeratore:
   - ◯ è stabile;
   - ◯ è fisicamente realizzabile;
   - ◯ ha un valore iniziale non nullo nella risposta al gradino.
4. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La proprietà di traslazione in s delle trasformate di Laplace afferma che:
   - ◯ $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s-a)$;
   - ◯ $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = e^{-a} F(s)$;
   - ◯ $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$;
   - ◯ $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \frac{F(s)}{a}$.
5. Condizione sufficiente affinchè un sistema lineare sia instabile è che abbia tutti i poli:
   - ◯ a parte reale negativa;
   - ◯ a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con moltiplicità unitaria;
   - ◯ a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con moltiplicità maggiore di uno.
6. La formula di Mason permette di determinare:
   - ◯ la risposta di un sistema dinamico lineare;
   - ◯ la funzione di trasferimento di uno schema a blocchi;
   - ◯ la trasmittanza di un grafo di segnale.
7. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo cinque costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:
   - ◯ il 85% del valore finale;
   - ◯ il 95% del valore finale;
   - ◯ il 99.3% del valore finale;
   - ◯ il 100% del valore finale.

8. La derivata iniziale della risposta all'impulso di Dirac di un sistema del secondo ordine privo di zeri risulta:

   ◯ $= 0$;
   ◯ > 0;
   ◯ < 0;

9. Un sistema lineare $G(s)$ avente due poli doppi posizionati sull'asse immaginario è:

   ◯ instabile;
   ◯ stabile ingresso limitato - uscita limitata;
   ◯ semplicemente stabile.

10. La massima sovraelongazione percentuale S del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+4s+4}$ in risposta ad un ingresso a gradino è:

   ◯ $S = 100\,\%$;
   ◯ $S = 50\,\%$;
   ◯ $S = 20\,\%$;
   ◯ $S = 0\,\%$.

11. Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta avente tutti i poli a parte reale negativa soggetto ad una eccitazione sinusiodale presenta una risposta a regime:

   ◯ sinusoidale avente la stessa frequenza dell'eccitazione;
   ◯ sinusoidale avente frequenza doppia dell'eccitazione;
   ◯ costante.

12. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+1)}{s(s+4)}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

   ◯ si evolve tutto nel primo quadrante;
   ◯ presenta un asintoto verticale;
   ◯ termina nell'origine.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Nella graficazione del contorno delle radici al variare del parametro τ, un asintoto può essere percorso dall'infinito al finito:

   ◯ solo se il grado relativo è positivo;
   ◯ solo se il grado relativo è negativo;
   ◯ anche se il grado relativo è nullo.

14. Quando è possibile utilizzarlo , il metodo del contorno delle radici si applica:

   ◯ ai sistemi con retroazione qualunque;
   ◯ ai soli sistemi con retroazione unitaria;
   ◯ ai soli sistemi con retroazione algebrica.

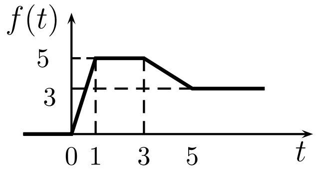
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

7 Settembre 2011 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \tfrac{3}{j}\,(e^{j\,3\,t} - e^{-j\,3\,t}) + 2\,\cos(5\,\pi\,t), \qquad x_2(t) = 4\,\sin(6\,t - 12),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{18}{s^2+9} + \frac{2\,s}{s^2+25\,\pi^2}, \qquad X_2(s) = \frac{24\,e^{-2\,s}}{s^2+36}, \qquad X_3(s) = \frac{5}{s^2} - \frac{5\,e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-3\,s}}{s^2} + \frac{e^{-5\,s}}{s^2}$$

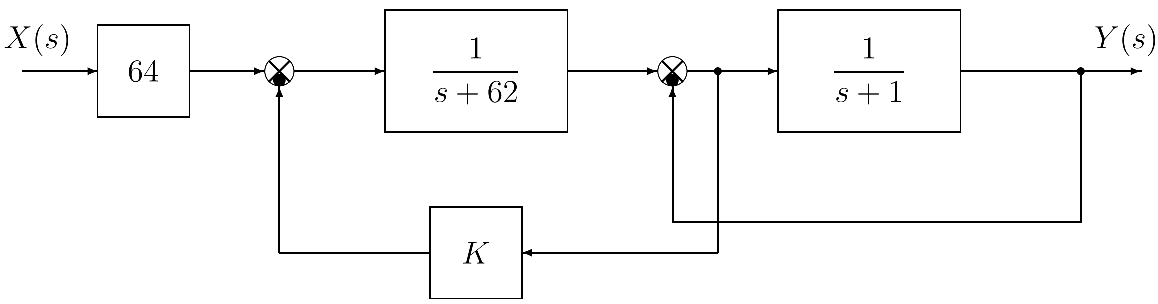
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+1)\,(s-4)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{6}{s\,(s+2)^4}, \qquad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+2)\,(s-3)\,(s+4)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{9}{25}\,e^{-t} + \frac{16}{25}\,e^{4\,t} + \frac{4}{5}\,t\,e^{4\,t}, \qquad g_2(t) = \int_0^t \tau^3\,e^{-2\,\tau}\,d\tau, \qquad g_3(t) = \frac{1}{10}\,e^{-2\,t} + \frac{4}{35}\,e^{3\,t} - \frac{3}{14}\,e^{-4\,t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:

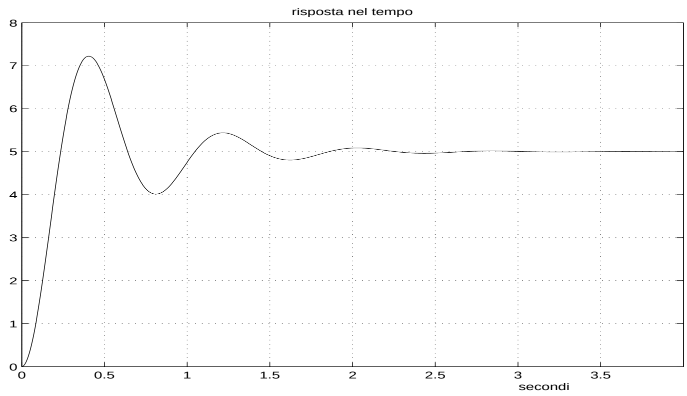


c.1) Posto $K = -60$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{64}{s^2 + 4\,s + 64}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

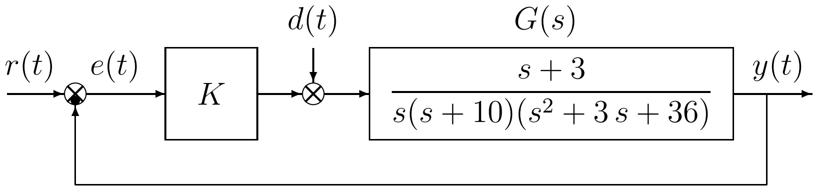
1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema; $\sigma = 2$
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; $\omega = 7.746$
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema; $\omega_n = 8$
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; $\delta = 0.25$
5. il guadagno statico K_0; $K_0 = 1$
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino; $T_a = \frac{3}{2}$
7. l'istante di massima sovraelongazione; $T_M = 0.41$
8. la massima sovraelongazione percentuale; $S = 44.4\%$
9. il periodo delle oscillazioni. $T = 0.82$



c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 5$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+3)}{s\,(s+10)\,(s^2+3\,s+36)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 13\,s^3 + 66\,s^2 + (360+K)\,s + 3K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

4	1	66	$3\,K$
3	13	$360+K$	
2	$498-K$	$39\,K$	
1	$-K^2 - 369\,K + 179280$		
0	$39\,K$		

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 277.37$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{360+K^*}{13}} = 7.0$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.1\,d_0$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1+K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.1\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 10$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{2}{K_v}$ con $K_v = \frac{K}{120}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{240}{K}.$$

d.4) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K\,G(s)$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

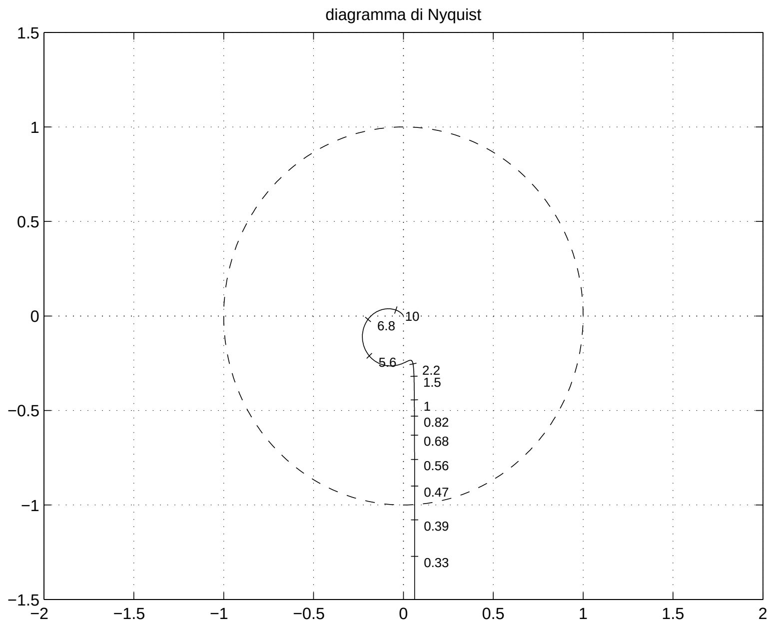


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = 0.063$.

Esiste una intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

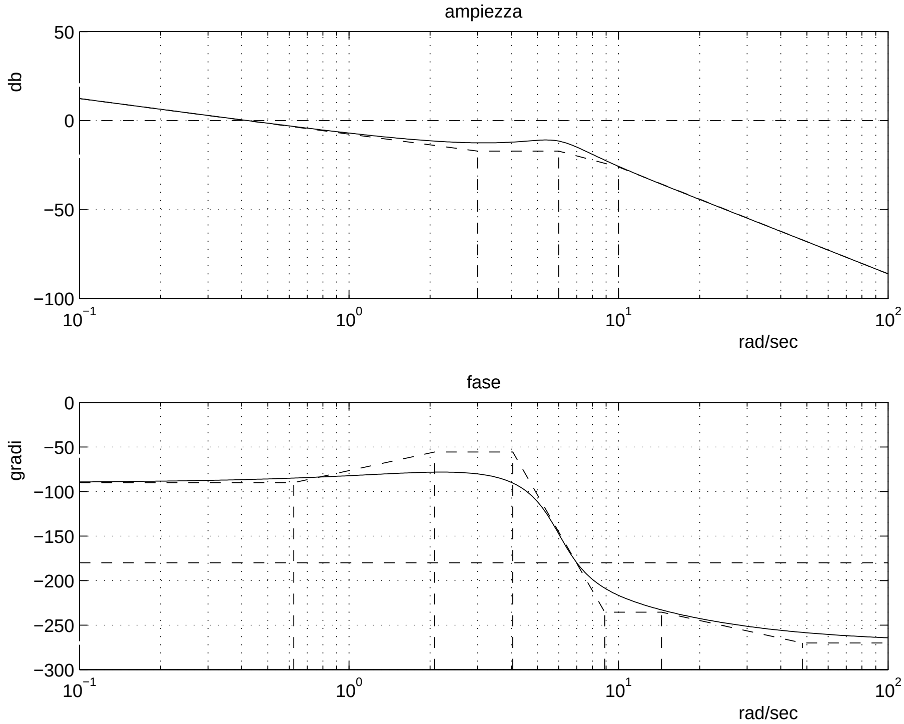
$$\sigma^* = -\frac{50}{K^*} = -0.18$$

Il corrispondente valore della pulsazione è $\omega^* = 7.0$

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 50$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello

$K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.4\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4 + 3\,\cos(0.3\,t + \pi/5)$.

Soluzione: La risposta in catena aperta del sistema si pu facilmente determinare a partire dalla trasformata di Laplace dell'ingresso: $R(s) = \dfrac{4}{s} + 3\left(\dfrac{\cos(\pi/5)s - 0.3\sin(\pi/5)}{s^2 + 0.3^2}\right)$.

L'uscita del sistema quindi data da $Y(s) = KR(s)G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione: vedi figura 4. Soluzione:

$$\sigma = -3.33$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 7.0\,i$$
$$K^* = 277.37$$

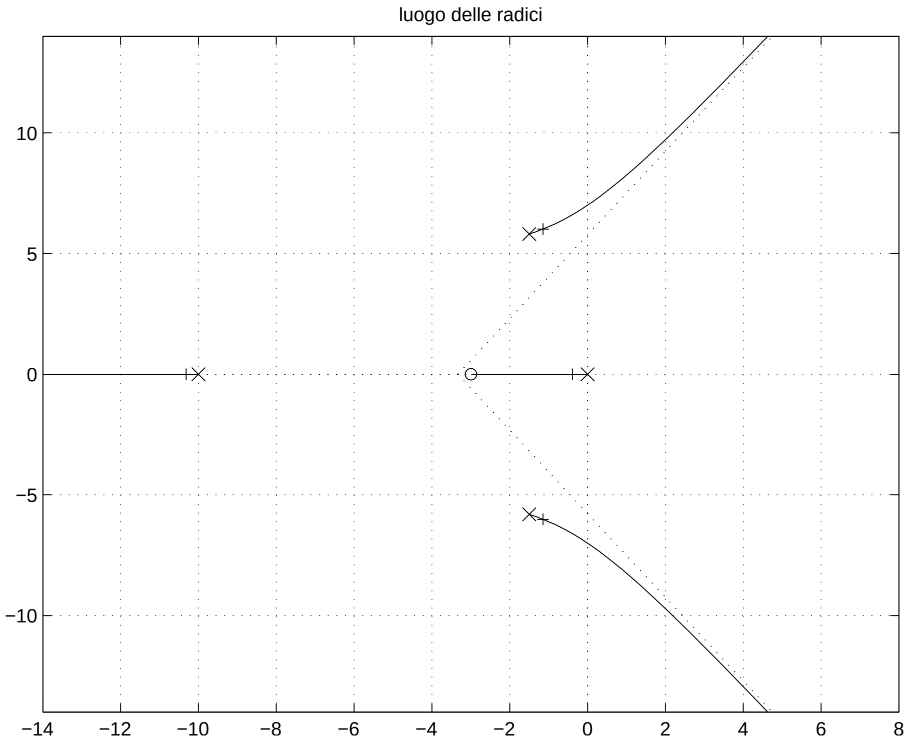


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

7 Settembre 2011 - Domande Teoriche

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il sistema dinamico con equazione caratteristica $a_n s^n - a_{n-1} s^{n-1} + \ldots - a_1 s + a_0 = 0$ con $a_n > 0,\ a_{n-1} > 0,\ \ldots,\ a_1 > 0,\ a_0 > 0$ risulta:

   ○ stabile;
   ○ asintoticamente stabile;
   ⊗ instabile.

2. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{(s+1)}{(s+8)(s^2+s+4)}$ possiede:

   ○ un polo dominante;
   ⊗ una coppia di poli dominanti;
   ○ nessun polo dominante.

3. Una funzione di trasferimento con grado del denominatore uguale a quello del numeratore:

   ⊗ è fisicamente realizzabile;
   ○ è stabile;
   ⊗ ha un valore iniziale non nullo nella risposta al gradino.

4. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La proprietà di traslazione in s delle trasformate di Laplace afferma che:

   ⊗ $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s+a)$;
   ○ $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = e^{-a}F(s)$;
   ○ $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = F(s-a)$;
   ○ $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)] = \frac{F(s)}{a}$.

5. Condizione sufficiente affinchè un sistema lineare sia instabile è che abbia tutti i poli:

   ○ a parte reale negativa;
   ⊗ a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con moltiplicità maggiore di uno;
   ○ a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con moltiplicità unitaria.

6. La formula di Mason permette di determinare:

   ⊗ la trasmittanza di un grafo di segnale;
   ⊗ la funzione di trasferimento di uno schema a blocchi;
   ⊗ la risposta di un sistema dinamico lineare.

7. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo cinque costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:

   ○ il 100% del valore finale;
   ⊗ il 99.3% del valore finale;
   ○ il 95% del valore finale;
   ○ il 85% del valore finale.

8. La derivata iniziale della risposta all'impulso di Dirac di un sistema del secondo ordine privo di zeri risulta:

   ⊗ > 0;
   ○ $= 0$;
   ○ < 0;

9. Un sistema lineare $G(s)$ avente due poli doppi posizionati sull'asse immaginario è:

   ○ semplicemente stabile;
   ⊗ instabile;
   ○ stabile ingresso limitato - uscita limitata.

10. La massima sovraelongazione percentuale S del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+4s+4}$ in risposta ad un ingresso a gradino è:

    ⊗ $S = 0\,\%$;
    ○ $S = 20\,\%$;
    ○ $S = 50\,\%$;
    ○ $S = 100\,\%$.

11. Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta avente tutti i poli a parte reale negativa soggetto ad una eccitazione sinusiodale presenta una risposta a regime:

    ○ sinusoidale avente frequenza doppia dell'eccitazione;
    ⊗ sinusoidale avente la stessa frequenza dell'eccitazione;
    ○ costante.

12. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+1)}{s(s+4)}$ per $\omega \in [0,\, \infty]$:

    ⊗ termina nell'origine;
    ⊗ presenta un asintoto verticale;
    ○ si evolve tutto nel primo quadrante.

    Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Nella graficazione del contorno delle radici al variare del parametro τ, un asintoto può essere percorso dall'infinito al finito:

    ⊗ solo se il grado relativo è negativo;
    ○ solo se il grado relativo è positivo;
    ○ anche se il grado relativo è nullo.

14. Quando è possibile utilizzarlo , il metodo del contorno delle radici si applica:

    ○ ai soli sistemi con retroazione unitaria;
    ○ ai soli sistemi con retroazione algebrica;
    ⊗ ai sistemi con retroazione qualunque.

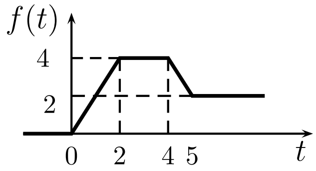
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

7 Settembre 2011 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 6\,\cos(3\,t - 12), \qquad x_2(t) = \tfrac{2}{j}\,(e^{j\,2\,t} - e^{-j\,2\,t}) + 3\,\sin(4\,\pi\,t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{6\,s\,e^{-4s}}{s^2+9}, \qquad X_2(s) = \frac{8}{s^2+4} + \frac{12\,\pi}{s^2+16\,\pi^2}, \qquad X_3(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2\,e^{-2\,s}}{s^2} - \frac{2\,e^{-4\,s}}{s^2} + \frac{2\,e^{-5\,s}}{s^2}$$

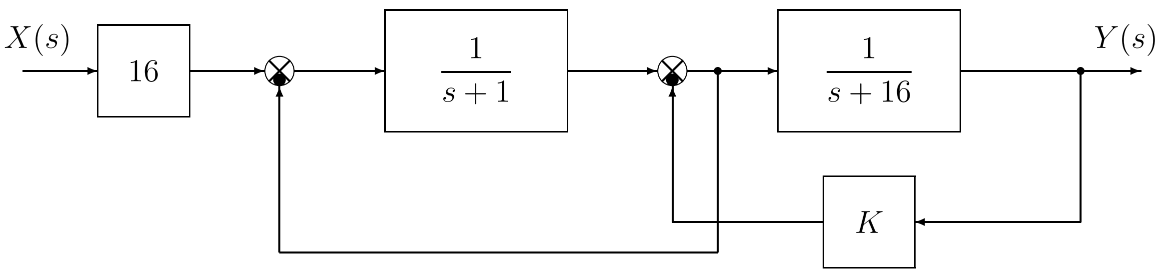
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{s\,(s+2)^4}, \qquad G_2(s) = \frac{s-3}{(s+1)\,(s+2)\,(s+3)}, \qquad G_3(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-2)\,(s+3)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \tau^3\,e^{-2\,\tau}d\tau, \qquad g_2(t) = -2\,e^{-t} + 5\,e^{-2\,t} - 3\,e^{-3\,t}, \qquad g_3(t) = \frac{16}{25}\,e^{2\,t} + \frac{9}{25}\,e^{-3\,t} - \frac{1}{5}\,t\,e^{-3\,t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:

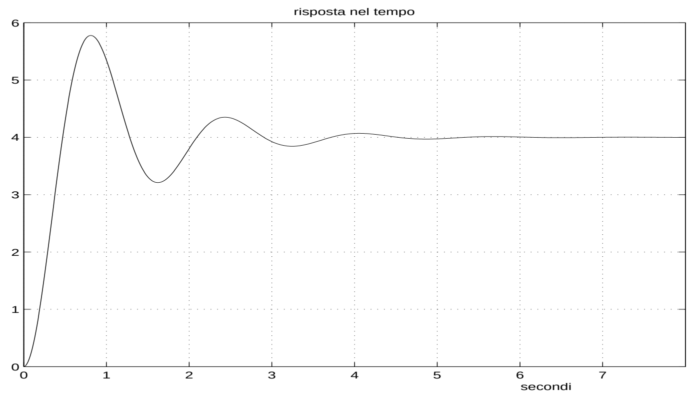


c.1) Posto $K = -16$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{16}{s^2 + 2\,s + 16}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

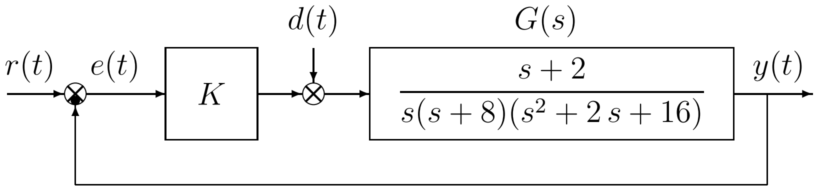
1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema; $\sigma = 1$
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; $\omega = 3.873$
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema; $\omega_n = 4$
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; $\delta = 0.25$
5. il guadagno statico K_0; $K_0 = 1$
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino; $T_a = 3$
7. l'istante di massima sovraelongazione; $T_M = 0.81$
8. la massima sovraelongazione percentuale; $S = 44.4\%$
9. il periodo delle oscillazioni. $T = 1.62$



c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 4$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+2)}{s\,(s+8)\,(s^2+2\,s+16)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 10\,s^3 + 32\,s^2 + (128+K)\,s + 2K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 32 & 2\,K \\ 3 & 10 & 128+K & \\ 2 & 192-K & 20\,K & \\ 1 & -K^2 - 136\,K + 24576 & & \\ 0 & 20\,K & & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 102.88$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{128+K^*}{10}} = 4.8$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2\,d_0$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1 + K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.2\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 5$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

<u>Soluzione</u>: L'errore a regime $e_\infty = \frac{3}{K_v}$ con $K_v = \frac{K}{64}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{192}{K}.$$

d.4) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K\,G(s)$.

<u>Soluzione</u>: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

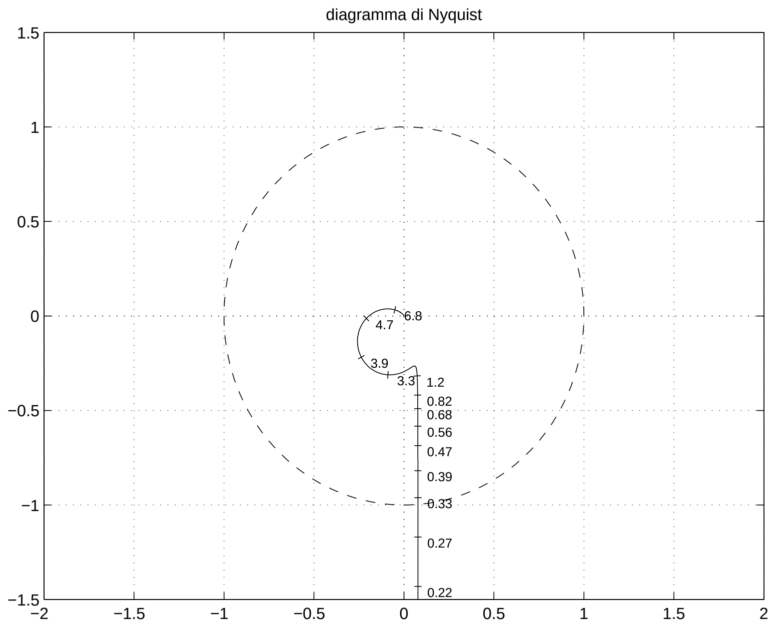


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = 0.078$.

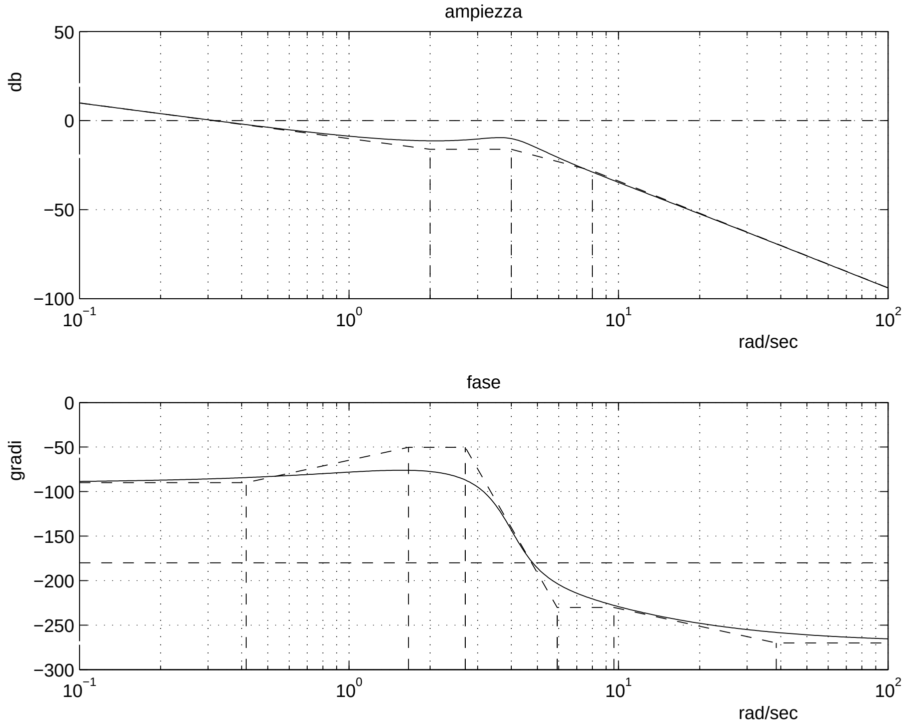
Esiste una intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{20}{K^*} = -0.19$$

Il corrispondente valore della pulsazione è $\omega^* = 4.8$

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello



$K\,G(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

<u>Soluzione</u>: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.3\,rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + 2\,\cos(0.4\,t + \pi/4)$.

<u>Soluzione</u>: La risposta in catena aperta del sistema si pu facilmente determinare a partire dalla trasformata di Laplace dell'ingresso: $R(s) = \dfrac{5}{s} + 2\left(\dfrac{\cos(\pi/4)s - 0.4\sin(\pi/4)}{s^2 + 0.4^2}\right)$.

L'uscita del sistema quindi data da $Y(s) = KR(s)G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

<u>Soluzione</u>: vedi figura 4. <u>Soluzione</u>:

$$\sigma = -2.66$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 4.8\,i$$
$$K^* = 102.88$$

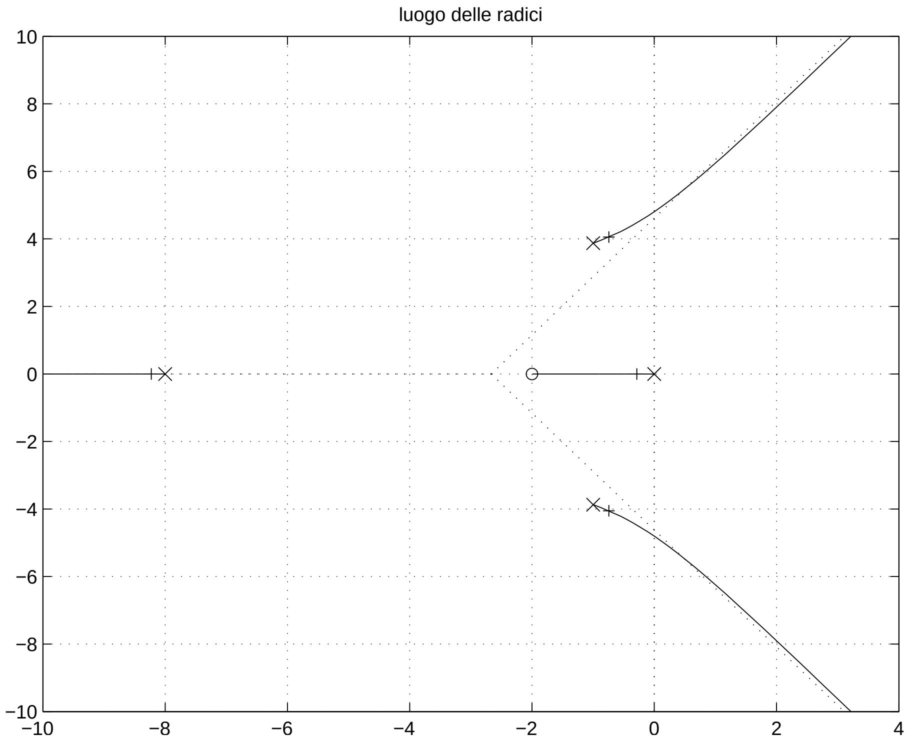


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11
7 Settembre 2011 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il sistema dinamico con equazione caratteristica $a_n s^n - a_{n-1} s^{n-1} + \ldots - a_1 s + a_0 = 0$ con $a_n > 0,\ a_{n-1} > 0,\ \ldots,\ a_1 > 0,\ a_0 > 0$ risulta:
   - ⊗ instabile;
   - ○ asintoticamente stabile;
   - ○ stabile.
2. La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)(s^2+4s+64)}$ possiede:
   - ○ un polo dominante;
   - ○ una coppia di poli dominanti;
   - ⊗ nessun polo dominante.
3. Una funzione di trasferimento con grado del denominatore uguale a quello del numeratore:
   - ○ è stabile;
   - ⊗ è fisicamente realizzabile;
   - ⊗ ha un valore iniziale non nullo nella risposta al gradino.
4. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La proprietà di traslazione in s delle trasformate di Laplace afferma che:
   - ○ $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s-a)$;
   - ○ $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = e^{-a} F(s)$;
   - ⊗ $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$;
   - ○ $\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = \frac{F(s)}{a}$.
5. Condizione sufficiente affinchè un sistema lineare sia instabile è che abbia tutti i poli:
   - ○ a parte reale negativa;
   - ○ a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con moltiplicità unitaria;
   - ⊗ a parte reale negativa tranne uno a parte reale nulla con moltiplicità maggiore di uno.
6. La formula di Mason permette di determinare:
   - ⊗ la risposta di un sistema dinamico lineare;
   - ⊗ la funzione di trasferimento di uno schema a blocchi;
   - ⊗ la trasmittanza di un grafo di segnale.
7. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo cinque costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:
   - ○ il 85% del valore finale;
   - ○ il 95% del valore finale;
   - ⊗ il 99.3% del valore finale;
   - ○ il 100% del valore finale.

8. La derivata iniziale della risposta all'impulso di Dirac di un sistema del secondo ordine privo di zeri risulta:

   ○ $= 0$;

   ⊗ > 0;

   ○ < 0;

9. Un sistema lineare $G(s)$ avente due poli doppi posizionati sull'asse immaginario è:

   ⊗ instabile;

   ○ stabile ingresso limitato - uscita limitata;

   ○ semplicemente stabile.

10. La massima sovraelongazione percentuale S del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+4s+4}$ in risposta ad un ingresso a gradino è:

    ○ $S = 100\,\%$;

    ○ $S = 50\,\%$;

    ○ $S = 20\,\%$;

    ⊗ $S = 0\,\%$.

11. Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta avente tutti i poli a parte reale negativa soggetto ad una eccitazione sinusiodale presenta una risposta a regime:

    ⊗ sinusoidale avente la stessa frequenza dell'eccitazione;

    ○ sinusoidale avente frequenza doppia dell'eccitazione;

    ○ costante.

12. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+1)}{s(s+4)}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

    ○ si evolve tutto nel primo quadrante;

    ⊗ presenta un asintoto verticale;

    ⊗ termina nell'origine.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Nella graficazione del contorno delle radici al variare del parametro τ, un asintoto può essere percorso dall'infinito al finito:

    ○ solo se il grado relativo è positivo;

    ⊗ solo se il grado relativo è negativo;

    ○ anche se il grado relativo è nullo.

14. Quando è possibile utilizzarlo , il metodo del contorno delle radici si applica:

    ⊗ ai sistemi con retroazione qualunque;

    ○ ai soli sistemi con retroazione unitaria;

    ○ ai soli sistemi con retroazione algebrica.