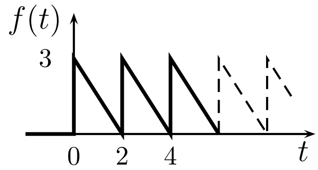
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

5 Luglio 2011 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

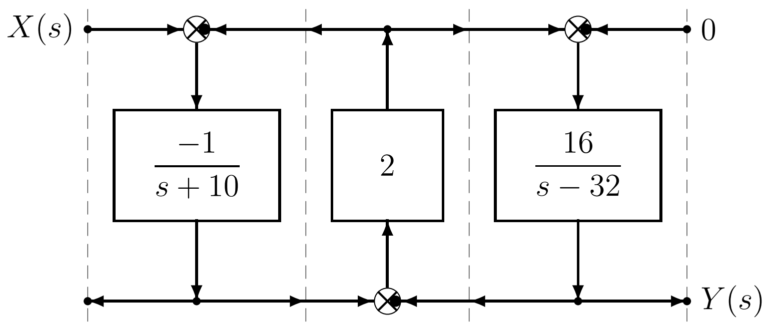
$$x_1(t) = \frac{t^2}{4}\, e^{-3\,t} + 5\,\sin(\pi\,t), \qquad x_2(t) = 2\,\cos(3\,t - 9),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{-2}{(s+4)\,(s-3)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{4}{(s+3)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{s-2}{(s+6)\,(s-1)\,(s+5)}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

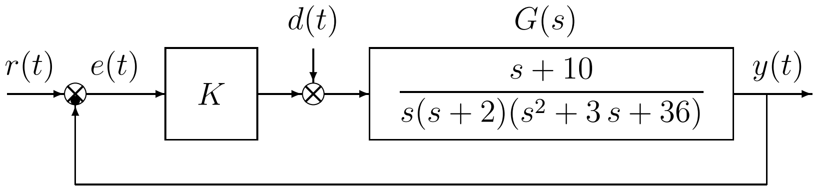
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema;
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema;
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema;
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema;
5. il guadagno statico K_0;
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino;
7. l'istante di massima sovraelongazione;
8. la massima sovraelongazione percentuale;
9. il periodo delle oscillazioni.

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 9$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.1\, d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2\,t$.

d.4) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K\,G(s)$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 50$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 2\,\cos(3\,t + \pi/5)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori <u>negativi</u> del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

5 Luglio 2011 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Per un sistema del secondo ordine stabile e privo di zeri, il legame che lega la massima sovraelongazione S al coefficiente di smorazmento δ è:

   ◯ $S = 100\, e^{\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
   ◯ $S = 100\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
   ◯ $S = 100\, e^{\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$;
   ◯ $S = 100\, e^{-\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$.

2. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s+2}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

   ◯ è una semicirconferenza;
   ◯ presenta un asintoto verticale;
   ◯ si evolve tutta nel semipiano positivo;
   ◯ ha guadagno statico unitario.

3. In base al principio del modello interno, affinchè un sistema retroazionato abbia errore a regime nullo quando in ingresso vi è un segnale la cui trasformata di Laplace ha 2 poli nell'origine, è necessario che nel guadagno d'anello:

   ◯ sia presente almeno un polo nell'origine;
   ◯ siano presenti almeno due poli nell'origine;
   ◯ siano presenti almeno tre poli nell'origine.

4. Il sistema dinamico $\ddot{y} = -y\, e^{-t} + t^2\, x$ (dove x è l'ingresso, y è l'uscita e t è la variabile "tempo") è:

   ◯ lineare;
   ◯ non lineare;
   ◯ stazionario;
   ◯ non stazionario.

5. Due sistemi di tipo 0 asintoticamente stabili, aventi la stessa costante di posizione K_p, se vengono posti in retroazione negativa unitaria:

   ◯ generano sistemi in retroazione stabili;
   ◯ presentano lo stesso errore a regime con ingresso a gradino;
   ◯ presentano un errore a regime nullo con ingresso a gradino;
   ◯ presentano un errore a regime nullo con ingresso a rampa.

6. Dato il diagramma di Bode asintotico delle fasi di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma asintotico delle ampiezze:

   ◯ solo se il diagramma di Bode delle fasi presenta pendenze negative o nulle;
   ◯ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
   ◯ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa;
   ◯ se nel sistema non sono presenti ritardi.

7. Un sistema $G(s)$ instabile:

   ◯ ha almeno un polo a parte reale positiva;
   ◯ ha almeno uno zero a parte reale positiva;
   ◯ può avere sia poli che zeri a parte reale positiva.

8. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con elevato guadagno statico d'anello;

   ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$;
   ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$;
   ◯ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema.

9. Nella costruzione della tabella di Routh, l'annullamento di tutti i coefficienti di una riga si può avere:

   ◯ solo per righe dispari;
   ◯ solo per righe pari;
   ◯ sia per righe pari che per righe dispari;

10. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

11. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2\,s+3}{2\,s^2+1}$ vale:

    ◯ $g(0^+) = 0$;
    ◯ $g(0^+) = 1$;
    ◯ $g(0^+) = 2$.

12. La larghezza di banda ω_f del sistema $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\,\delta\,\omega_n+\omega_n^2}$:

    ◯ è proporzionale a ω_n;
    ◯ è proporzionale a δ;
    ◯ è uguale a $\frac{3}{\delta\,\omega_n}$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Sia $1 + K\,G(s) = 0$ l'equazione caratteristica di un sistema retroazionato. Le radici triple del corrispondente luogo delle radici al variare del parametro K sono tutte e sole le soluzioni:

    ◯ dell'equazione $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
    ◯ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
    ◯ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d\,G(s)}{d\,s} = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$.

14. Il luogo delle radici presenta almeno un asintoto verticale ($r = n - m > 0$ è il grado relativo):

    ◯ quando $r = 2$ e K è positiva;
    ◯ quando $r = 2$ e K è negativa;
    ◯ quando $r = 4$ e K è positiva;
    ◯ quando $r = 4$ e K è negativa.

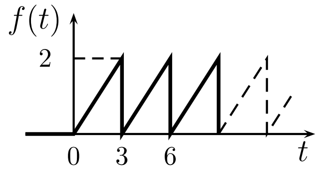
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

5 Luglio 2011 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

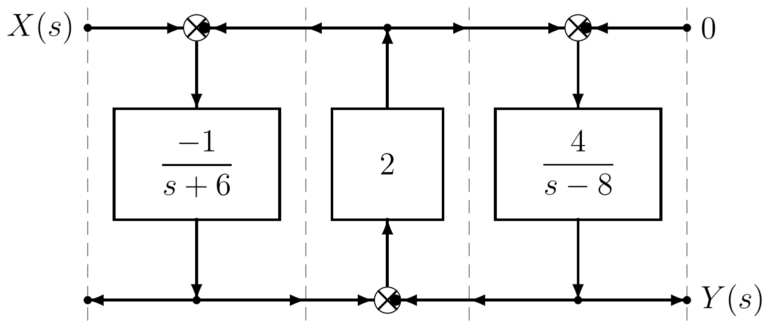
$$x_1(t) = 6\,\sin(4\,t - 12), \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{3}\,t^4\,e^{-4\,t} + 5\,\cos(7\,\pi\,t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{(s+5)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{s+3}{(s-5)\,(s-2)\,(s+1)}, \qquad G_3(s) = \frac{1}{(s-2)\,(s+3)^2}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

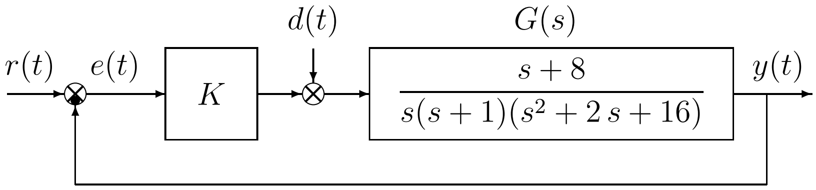
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema;
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema;
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema;
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema;
5. il guadagno statico K_0;
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino;
7. l'istante di massima sovraelongazione;
8. la massima sovraelongazione percentuale;
9. il periodo delle oscillazioni.

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 8$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2\,d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

d.4) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K\,G(s)$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 3\,\cos(2\,t + \pi/4)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

5 Luglio 2011 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Per un sistema del secondo ordine stabile e privo di zeri, il legame che lega la massima sovraelongazione S al coefficiente di smorazmento δ è:
   - ◯ $S = 100\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
   - ◯ $S = 100\, e^{\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
   - ◯ $S = 100\, e^{-\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$;
   - ◯ $S = 100\, e^{\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$.
2. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s+2}$ per $\omega \in [0, \infty]$:
   - ◯ ha guadagno statico unitario;
   - ◯ si evolve tutta nel semipiano positivo;
   - ◯ presenta un asintoto verticale;
   - ◯ è una semicirconferenza.
3. In base al principio del modello interno, affinchè un sistema retroazionato abbia errore a regime nullo quando in ingresso vi è un segnale la cui trasformata di Laplace ha 2 poli nell'origine, è necessario che nel guadagno d'anello:
   - ◯ sia presente almeno un polo nell'origine;
   - ◯ siano presenti almeno tre poli nell'origine;
   - ◯ siano presenti almeno due poli nell'origine.
4. Il sistema dinamico $\ddot{y} = -y\, e^{-t} + t^2\, x$ (dove x è l'ingresso, y è l'uscita e t è la variabile "tempo") è:
   - ◯ non lineare;
   - ◯ lineare;
   - ◯ non stazionario;
   - ◯ stazionario.
5. Due sistemi di tipo 0 asintoticamente stabili, aventi la stessa costante di posizione K_p, se vengono posti in retroazione negativa unitaria:
   - ◯ generano sistemi in retroazione stabili;
   - ◯ presentano un errore a regime nullo con ingresso a rampa;
   - ◯ presentano un errore a regime nullo con ingresso a gradino;
   - ◯ presentano lo stesso errore a regime con ingresso a gradino.
6. Dato il diagramma di Bode asintotico delle fasi di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma asintotico delle ampiezze:
   - ◯ se nel sistema non sono presenti ritardi.
   - ◯ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
   - ◯ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa;
   - ◯ solo se il diagramma di Bode delle fasi presenta pendenze negative o nulle.
7. Un sistema $G(s)$ instabile:
   - ◯ può avere sia poli che zeri a parte reale positiva;
   - ◯ ha almeno un polo a parte reale positiva;
   - ◯ ha almeno uno zero a parte reale positiva.

8. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con elevato guadagno statico d'anello;

   ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$;
   ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$;
   ◯ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema.

9. Nella costruzione della tabella di Routh, l'annullamento di tutti i coefficienti di una riga si può avere:

   ◯ solo per righe pari;
   ◯ solo per righe dispari;
   ◯ sia per righe pari che per righe dispari;

10. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

   ◯ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to 0$;
   ◯ una pendenza di $-20\, db/decade$ per $\omega \to 0$;
   ◯ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to \infty$;
   ◯ una pendenza di $-20\, db/decade$ per $\omega \to \infty$.

11. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{4\,s+1}{s^2+2}$ vale:

   ◯ $g(0^+) = 0$;
   ◯ $g(0^+) = 1$;
   ◯ $g(0^+) = 2$.

12. La larghezza di banda ω_f del sistema $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\,\delta\,\omega_n+\omega_n^2}$:

   ◯ è proporzionale a δ;
   ◯ è proporzionale a ω_n;
   ◯ è uguale a $\frac{3}{\delta\,\omega_n}$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Sia $1 + K\,G(s) = 0$ l'equazione caratteristica di un sistema retroazionato. Le radici triple del corrispondente luogo delle radici al variare del parametro K sono tutte e sole le soluzioni:

   ◯ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d\,G(s)}{d\,s} = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
   ◯ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
   ◯ dell'equazione $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$.

14. Il luogo delle radici presenta almeno un asintoto verticale ($r = n - m > 0$ è il grado relativo):

   ◯ quando $r = 2$ e K è negativa;
   ◯ quando $r = 2$ e K è positiva;
   ◯ quando $r = 4$ e K è negativa;
   ◯ quando $r = 4$ e K è positiva.

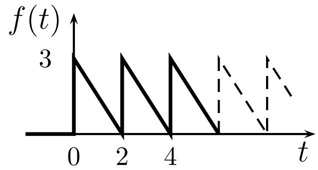
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

5 Luglio 2011 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \tfrac{t^2}{4}\, e^{-3\,t} + 5\,\sin(\pi\, t), \qquad x_2(t) = 2\,\cos(3\,t - 9),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{(s+3)^3} + \frac{5\,\pi}{s^2+\pi^2}, \qquad X_2(s) = \frac{2\,s\,e^{-3s}}{s^2+9}, \quad X_3(s) = \frac{3}{s(1-e^{-2\,s})}\left[1 + \frac{e^{-2\,s}-1}{2\,s}\right]$$

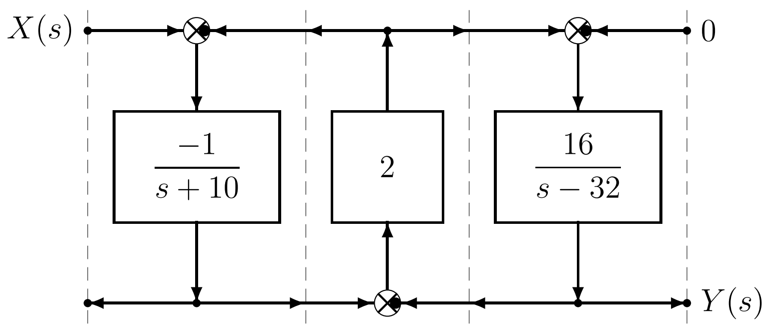
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{-2}{(s+4)\,(s-3)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{4}{(s+3)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{s-2}{(s+6)\,(s-1)\,(s+5)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{2}{49}\,e^{-4\,t} + \frac{2}{49}\,e^{3\,t} - \frac{2}{7}\,t\,e^{3\,t}, \qquad g_2(t) = 2\,t^2\,e^{-3\,t}, \qquad g_3(t) = -\frac{8}{7}\,e^{-6\,t} - \frac{1}{42}\,e^{t} + \frac{7}{6}\,e^{-5\,t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:

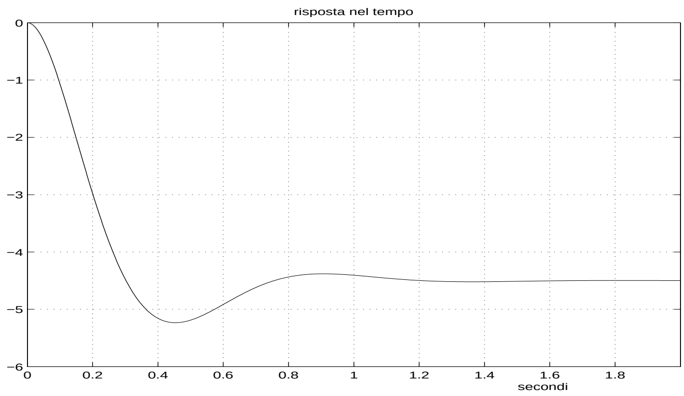


c.1) Utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{-32}{s^2 + 8\,s + 64}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

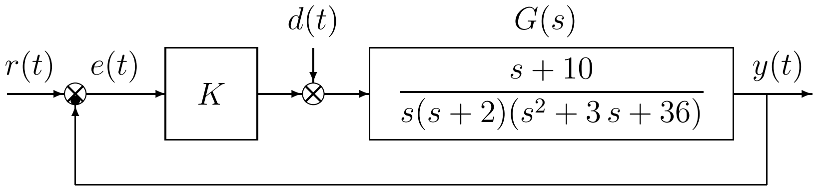
1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema; $\sigma = -4$
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; $\omega = 6.92$
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema; $\omega_n = 8$
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; $\delta = 0.5$
5. il guadagno statico K_0; $K_0 = -\frac{1}{2}$
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino; $T_a = \frac{3}{4}$
7. l'istante di massima sovraelongazione; $T_M = 0.45$
8. la massima sovraelongazione percentuale; $S = 16.3\%$
9. il periodo delle oscillazioni. $T = 0.9$



c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 9$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+10)}{s\,(s+2)\,(s^2+3\,s+36)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 5\,s^3 + 42\,s^2 + (72+K)\,s + 10K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 42 & 10\,K \\
3 & 5 & 72+K & \\
2 & 138-K & 50\,K & \\
1 & -K^2 - 184\,K + 9936 & & \\
0 & 50\,K & &
\end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 43.65$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{72+K^*}{5}} = 4.81$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.1\,d_0$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1+K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.1\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 10$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{2}{K_v}$ con $K_v = -\frac{K}{7.2}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = -\frac{14.4}{K}.$$

d.4) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K\,G(s)$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

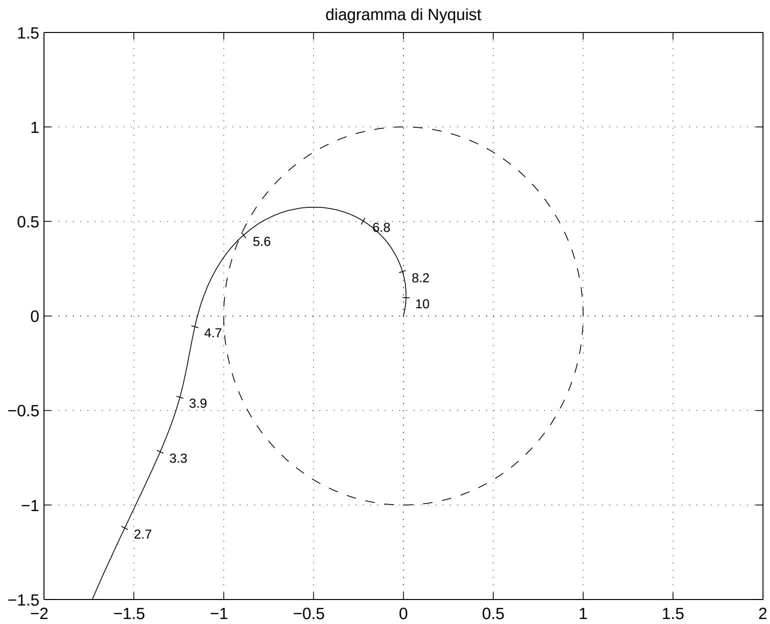


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = -3.35$.

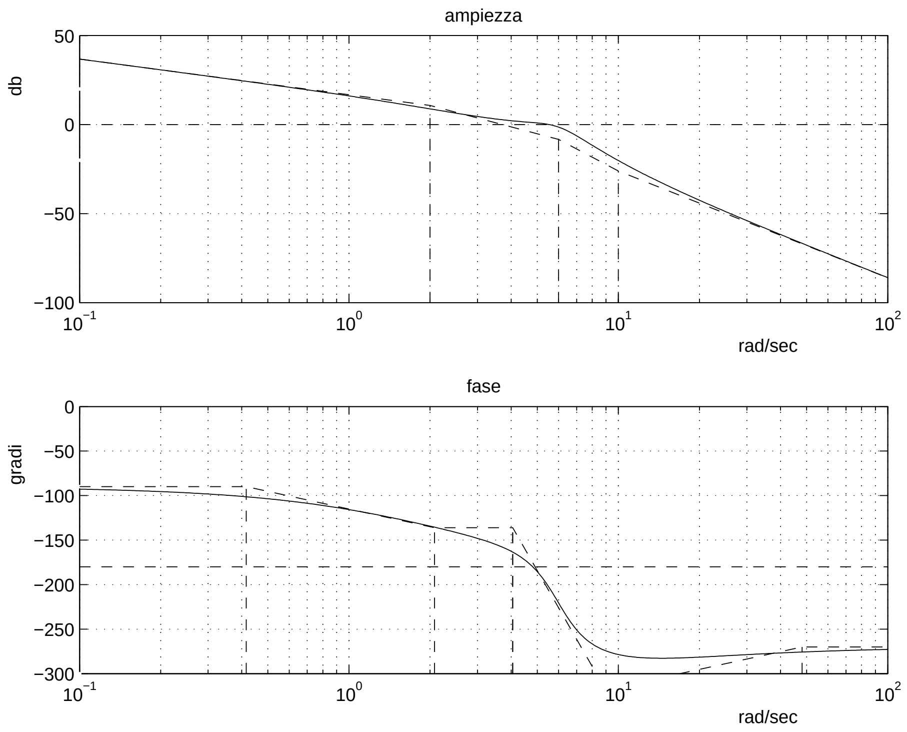
Esiste una intersezione σ_1^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma_1^* = -\frac{50}{K^*} = -1.14$$

Il corrispondente valore della pulsazione $\omega_1^* = 3.4$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 50$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

<u>Soluzione</u>: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.45\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 2\, \cos(3\, t + \pi/5)$.

<u>Soluzione</u>: La risposta in catena aperta del sistema si pu facilmente determinare a partire dalla trasformata di Laplace dell'ingresso: $R(s) = 2\left(\dfrac{\cos(\pi/5)s - 3\sin(\pi/5)}{s^2+9}\right)$.

L'uscita del sistema quindi data da $Y(s) = KR(s)G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori <u>negativi</u> del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

<u>Soluzione</u>: vedi figura 4. <u>Soluzione</u>:

$$\sigma = -1.667$$
$$\phi = 0,\ 120,\ 240$$

Non esistono intersezioni con l'asse immaginario.

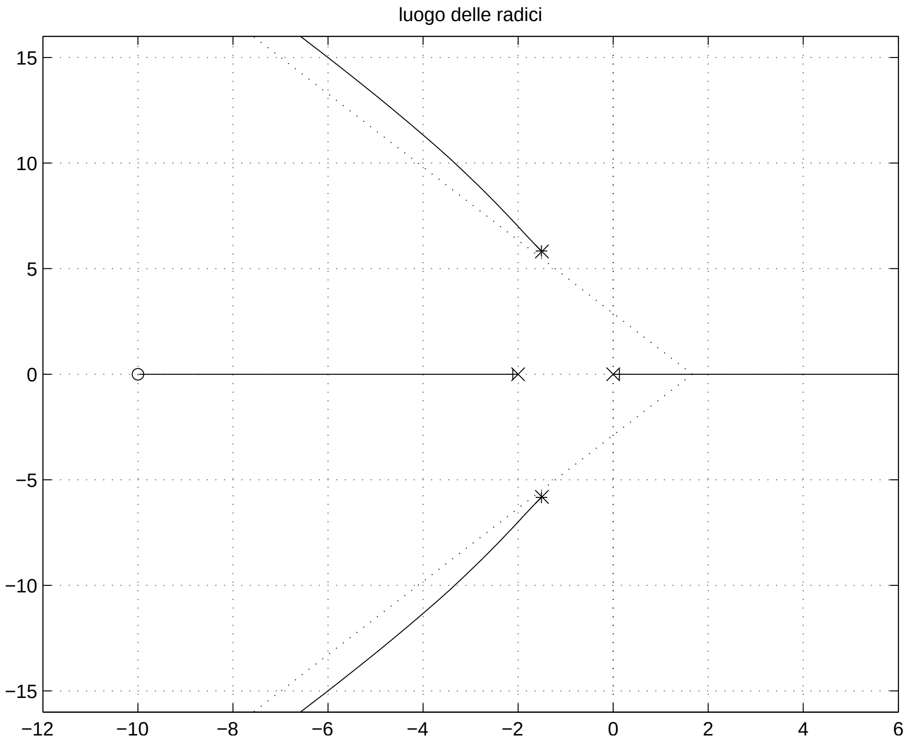


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11	Nome:	
5 Luglio 2011 - Domande Teoriche	Nr. Mat.	
	Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Per un sistema del secondo ordine stabile e privo di zeri, il legame che lega la massima sovraelongazione S al coefficiente di smorazmento δ è:

   ○ $S = 100\, e^{\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
   ⊗ $S = 100\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
   ○ $S = 100\, e^{\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$;
   ○ $S = 100\, e^{-\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$.

2. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s+2}$ per $\omega \in [0,\, \infty]$:

   ⊗ è una semicirconferenza;
   ○ presenta un asintoto verticale;
   ⊗ si evolve tutta nel semipiano positivo;
   ○ ha guadagno statico unitario.

3. In base al principio del modello interno, affinchè un sistema retroazionato abbia errore a regime nullo quando in ingresso vi è un segnale la cui trasformata di Laplace ha 2 poli nell'origine, è necessario che nel guadagno d'anello:

   ○ sia presente almeno un polo nell'origine;
   ⊗ siano presenti almeno due poli nell'origine;
   ○ siano presenti almeno tre poli nell'origine.

4. Il sistema dinamico $\ddot{y} = -y\, e^{-t} + t^2\, x$ (dove x è l'ingresso, y è l'uscita e t è la variabile "tempo") è:

   ⊗ lineare;
   ○ non lineare;
   ○ stazionario;
   ⊗ non stazionario.

5. Due sistemi di tipo 0 asintoticamente stabili, aventi la stessa costante di posizione K_p, se vengono posti in retroazione negativa unitaria:

   ○ generano sistemi in retroazione stabili;
   ⊗ presentano lo stesso errore a regime con ingresso a gradino;
   ○ presentano un errore a regime nullo con ingresso a gradino;
   ○ presentano un errore a regime nullo con ingresso a rampa.

6. Dato il diagramma di Bode asintotico delle fasi di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma asintotico delle ampiezze:

   ○ solo se il diagramma di Bode delle fasi presenta pendenze negative o nulle;
   ⊗ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
   ○ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa;
   ○ se nel sistema non sono presenti ritardi.

7. Un sistema $G(s)$ instabile:

   ○ ha almeno un polo a parte reale positiva;
   ○ ha almeno uno zero a parte reale positiva;
   ⊗ può avere sia poli che zeri a parte reale positiva.

8. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con elevato guadagno statico d'anello;

   ⊗ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$;
   ○ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$;
   ⊗ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema.

9. Nella costruzione della tabella di Routh, l'annullamento di tutti i coefficienti di una riga si può avere:

   ⊗ solo per righe dispari;
   ○ solo per righe pari;
   ○ sia per righe pari che per righe dispari;

10. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    ⊗ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ○ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ○ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    ⊗ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

11. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2\,s+3}{2\,s^2+1}$ vale:

    ○ $g(0^+) = 0$;
    ⊗ $g(0^+) = 1$;
    ○ $g(0^+) = 2$.

12. La larghezza di banda ω_f del sistema $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\,\delta\,\omega_n+\omega_n^2}$:

    ⊗ è proporzionale a ω_n;
    ○ è proporzionale a δ;
    ○ è uguale a $\frac{3}{\delta\,\omega_n}$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Sia $1 + K\,G(s) = 0$ l'equazione caratteristica di un sistema retroazionato. Le radici triple del corrispondente luogo delle radici al variare del parametro K sono tutte e sole le soluzioni:

    ○ dell'equazione $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
    ○ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
    ⊗ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d\,G(s)}{d\,s} = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$.

14. Il luogo delle radici presenta almeno un asintoto verticale ($r = n - m > 0$ è il grado relativo):

    ⊗ quando $r = 2$ e K è positiva;
    ○ quando $r = 2$ e K è negativa;
    ○ quando $r = 4$ e K è positiva;
    ⊗ quando $r = 4$ e K è negativa.

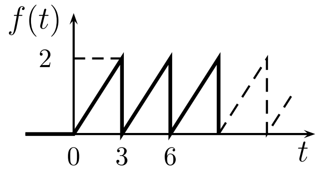
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

5 Luglio 2011 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 6\,\sin(4\,t - 12), \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{3}\,t^4\,e^{-4\,t} + 5\,\cos(7\,\pi\,t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{24\,e^{-3s}}{s^2+16}, \qquad X_2(s) = \frac{8}{(s+4)^5} + \frac{5\,s}{s^2+49\,\pi^2}, \qquad X_3(s) = \frac{2}{3\,s(1-e^{-3\,s})}\left[-3\,e^{-3\,s} + \frac{1-e^{-3\,s}}{s}\right]$$

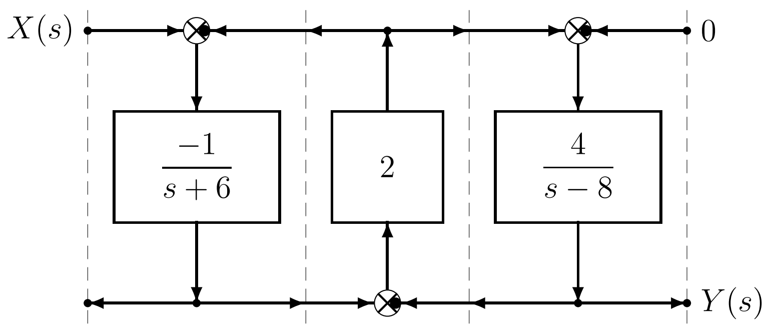
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{(s+5)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{s+3}{(s-5)\,(s-2)\,(s+1)}, \qquad G_3(s) = \frac{1}{(s-2)\,(s+3)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{3}{2}\,t^2\,e^{-5\,t}, \qquad g_2(t) = \frac{4}{9}\,e^{5\,t} - \frac{5}{9}\,e^{2\,t} + \frac{1}{9}\,e^{-t}, \qquad g_3(t) = \frac{1}{25}\,e^{2\,t} - \frac{1}{25}\,e^{-3\,t} - \frac{1}{5}\,t\,e^{-3\,t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:

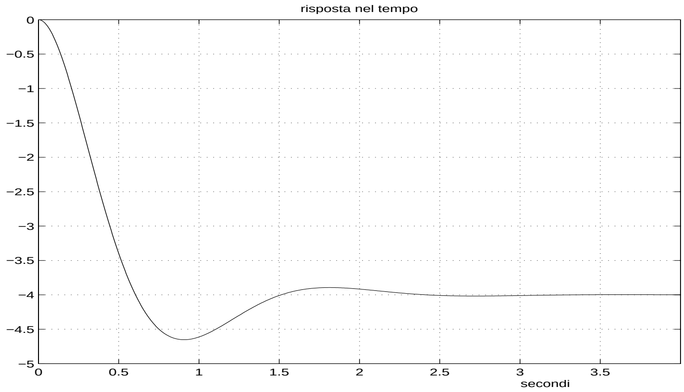


c.1) Utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{-8}{s^2+4\,s+16}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

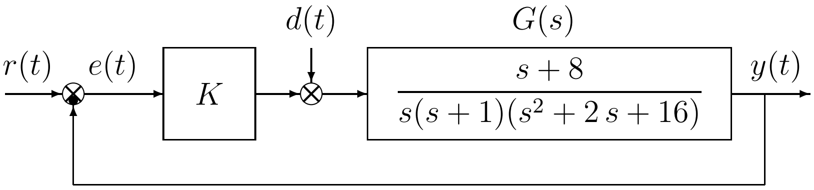
1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema; $\sigma = -2$
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; $\omega = 3.463$
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema; $\omega_n = 4$
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; $\delta = 0.5$
5. il guadagno statico K_0; $K_0 = -\frac{1}{2}$
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino; $T_a = \frac{3}{2}$
7. l'istante di massima sovraelongazione; $T_M = 0.9$
8. la massima sovraelongazione percentuale; $S = 16.3\%$
9. il periodo delle oscillazioni. $T = 1.8$



c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 8$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+8)}{s\,(s+1)\,(s^2+2\,s+16)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 3\,s^3 + 18\,s^2 + (16+K)\,s + 8K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 18 & 8\,K \\ 3 & 3 & 16+K & \\ 2 & 38-K & 24\,K & \\ 1 & -K^2-50\,K+608 & & \\ 0 & 24\,K & & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 10.11$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{16+K^*}{3}} = 2.95$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2\,d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1+K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.2\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 5$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{3}{K_v}$ con $K_v = -\frac{K}{2}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = -\frac{6}{K}.$$

d.4) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K\,G(s)$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

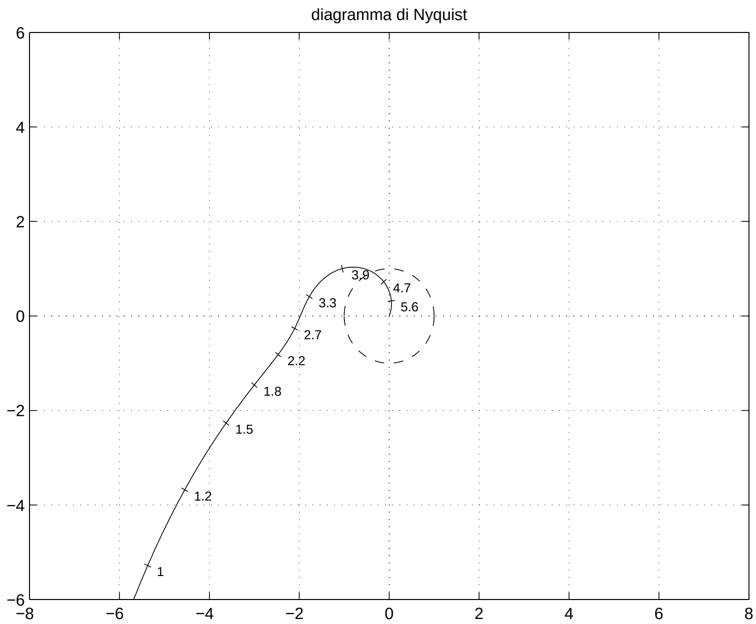


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = -10$.

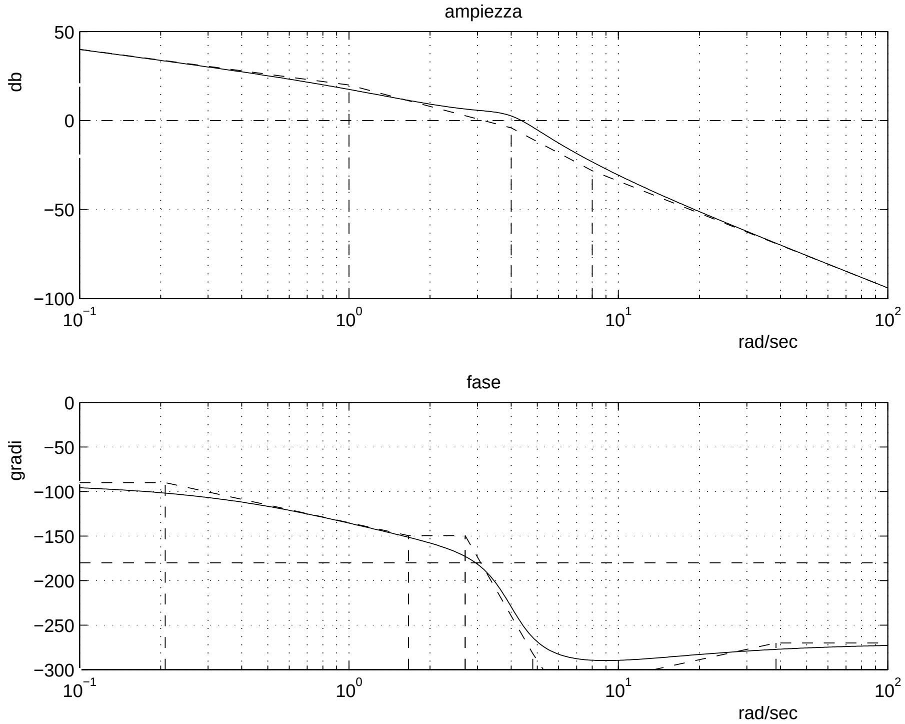
Esiste una intersezione σ_1^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma_1^* = -\frac{20}{K^*} = -1.99$$

Il corrispondente valore della pulsazione $\omega_1^* = 2.95$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 4\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 3\,\cos(2\,t + \pi/4)$.

Soluzione: La risposta in catena aperta del sistema si pu facilmente determinare a partire dalla trasformata di Laplace dell'ingresso: $R(s) = 3\left(\dfrac{\cos(\pi/4)s - 2\sin(\pi/4)}{s^2+4}\right)$.

L'uscita del sistema quindi data da $Y(s) = KR(s)G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione: vedi figura 4. Soluzione:

$$\sigma = -1.667$$
$$\phi = 0,\ 120,\ 240$$

Non esistono intersezioni con l'asse immaginario.

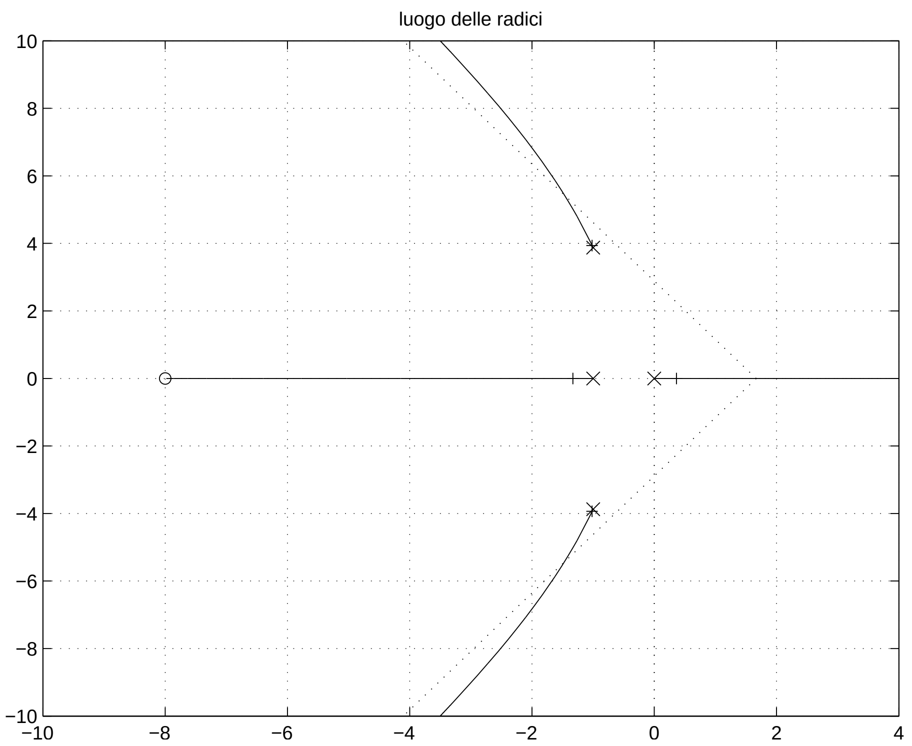


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11		Nome:	
5 Luglio 2011 - Domande Teoriche		Nr. Mat.	
		Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Per un sistema del secondo ordine stabile e privo di zeri, il legame che lega la massima sovraelongazione S al coefficiente di smorazmento δ è:

   ⊗ $S = 100\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;

   ○ $S = 100\, e^{\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;

   ○ $S = 100\, e^{-\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$;

   ○ $S = 100\, e^{\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$.

2. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s+2}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

   ○ ha guadagno statico unitario;

   ⊗ si evolve tutta nel semipiano positivo;

   ○ presenta un asintoto verticale;

   ⊗ è una semicirconferenza.

3. In base al principio del modello interno, affinchè un sistema retroazionato abbia errore a regime nullo quando in ingresso vi è un segnale la cui trasformata di Laplace ha 2 poli nell'origine, è necessario che nel guadagno d'anello:

   ○ sia presente almeno un polo nell'origine;

   ○ siano presenti almeno tre poli nell'origine;

   ⊗ siano presenti almeno due poli nell'origine.

4. Il sistema dinamico $\ddot{y} = -y\, e^{-t} + t^2\, x$ (dove x è l'ingresso, y è l'uscita e t è la variabile "tempo") è:

   ○ non lineare;

   ⊗ lineare;

   ⊗ non stazionario;

   ○ stazionario.

5. Due sistemi di tipo 0 asintoticamente stabili, aventi la stessa costante di posizione K_p, se vengono posti in retroazione negativa unitaria:

   ○ generano sistemi in retroazione stabili;

   ○ presentano un errore a regime nullo con ingresso a rampa;

   ○ presentano un errore a regime nullo con ingresso a gradino;

   ⊗ presentano lo stesso errore a regime con ingresso a gradino.

6. Dato il diagramma di Bode asintotico delle fasi di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma asintotico delle ampiezze:

   ○ se nel sistema non sono presenti ritardi.

   ⊗ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;

   ○ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa;

   ○ solo se il diagramma di Bode delle fasi presenta pendenze negative o nulle.

7. Un sistema $G(s)$ instabile:

   ⊗ può avere sia poli che zeri a parte reale positiva;

   ○ ha almeno un polo a parte reale positiva;

   ○ ha almeno uno zero a parte reale positiva.

8. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con elevato guadagno statico d'anello;

   ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$;
   ⊗ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$;
   ⊗ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema.

9. Nella costruzione della tabella di Routh, l'annullamento di tutti i coefficienti di una riga si può avere:

   ◯ solo per righe pari;
   ⊗ solo per righe dispari;
   ◯ sia per righe pari che per righe dispari;

10. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

   ◯ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to 0$;
   ⊗ una pendenza di $-20\, db/decade$ per $\omega \to 0$;
   ⊗ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to \infty$;
   ◯ una pendenza di $-20\, db/decade$ per $\omega \to \infty$.

11. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{4\,s+1}{s^2+2}$ vale:

   ◯ $g(0^+) = 0$;
   ◯ $g(0^+) = 1$;
   ⊗ $g(0^+) = 2$.

12. La larghezza di banda ω_f del sistema $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\,\delta\,\omega_n+\omega_n^2}$:

   ◯ è proporzionale a δ;
   ⊗ è proporzionale a ω_n;
   ◯ è uguale a $\frac{3}{\delta\,\omega_n}$.

   Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Sia $1 + K\,G(s) = 0$ l'equazione caratteristica di un sistema retroazionato. Le radici triple del corrispondente luogo delle radici al variare del parametro K sono tutte e sole le soluzioni:

   ⊗ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d\,G(s)}{d\,s} = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
   ◯ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
   ◯ dell'equazione $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$.

14. Il luogo delle radici presenta almeno un asintoto verticale ($r = n - m > 0$ è il grado relativo):

   ◯ quando $r = 2$ e K è negativa;
   ⊗ quando $r = 2$ e K è positiva;
   ⊗ quando $r = 4$ e K è negativa;
   ◯ quando $r = 4$ e K è positiva.