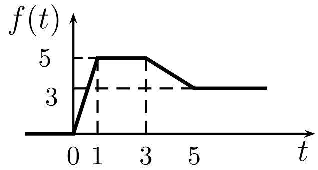
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

14 Giugno 2011 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

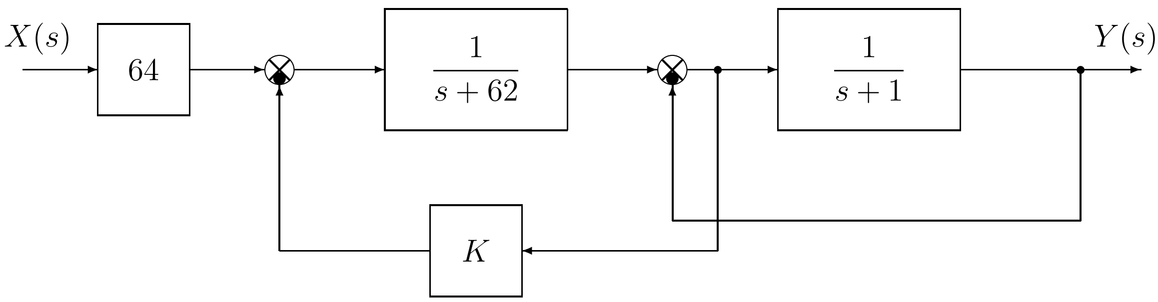
$$x_1(t) = \tfrac{3}{j}\,(e^{j\,3\,t} - e^{-j\,3\,t}) + 2\,\cos(5\,\pi\,t), \qquad x_2(t) = 4\,\sin(6\,t - 12),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+1)\,(s-4)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{6}{s\,(s+2)^4}, \qquad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+2)\,(s-3)\,(s+4)}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -60$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

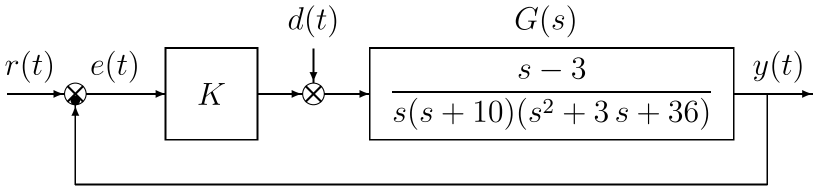
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema;
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema;
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema;
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema;
5. il guadagno statico K_0;
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino;
7. l'istante di massima sovraelongazione;
8. la massima sovraelongazione percentuale;
9. il periodo delle oscillazioni.

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 5$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.1\, d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2\,t$.

d.4) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K\,G(s)$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 50$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4 + 3\,\cos(0.3\,t + \pi/5)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori <u>negativi</u> del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

14 Giugno 2011 - Domande Teoriche

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il grado relativo di una funzione di trasferimento definito come:
   - ◯ il grado del numeratore meno quello del denominatore;
   - ◯ il grado del denominatore meno quello del numeratore;
   - ◯ il numero di poli complessi coniugati;
   - ◯ il numero di poli nulli.

2. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 1 deve essere chiuso all'infinito:
   - ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
   - ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   - ◯ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   - ◯ con una circonferenza percorsa in senso antiorario.

3. Dato il diagramma di Bode asintotico delle fasi di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma asintotico delle ampiezze:
   - ◯ solo se il diagramma di Bode delle fasi presenta pendenze negative o nulle;
   - ◯ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
   - ◯ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa;
   - ◯ se nel sistema non sono presenti ritardi.

4. Un sistema del secondo ordine con coefficiente di smorzamento $\delta > 1$ è caratterizzato da:
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale negativa;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva.

5. Il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{\tau_z s+1}{s^2(\tau_p s+1)}$:
   - ◯ circonda il punto critico -1 se $\tau_z < \tau_p$;
   - ◯ circonda il punto critico -1 se $\tau_z > \tau_p$;
   - ◯ circonda sempre il punto critico -1.

6. Affinch un sistema sia asintoticamente stabile, occorre che i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh ad esso associata siano tutti:
   - ◯ positivi o nulli;
   - ◯ a parte reale negativa;
   - ◯ di segno concorde.

7. Il valore iniziale della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{5s+1}{s^2+2}$ vale:
   - ◯ $g(\infty) = 0$;
   - ◯ $g(\infty) = 1$;
   - ◯ $g(\infty) = 5$.

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+5)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   ○ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{5}$ per $t \to \infty$;
   ○ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to 0$;
   ○ del segnale $x(t) = te^{-(t-5)}$;
   ○ del segnale $x(t) = te^{-5t}$.

9. Determinare una stima del tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+101\,s+100}$;

$$T_a =$$

10. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    ○ una pendenza di $-20\,dB/decade$ per $\omega \to 0$;
    ○ una pendenza di $-40\,dB/decade$ per $\omega \to 0$;
    ○ una pendenza di $-20\,dB/decade$ per $\omega \to \infty$;
    ○ una pendenza di $-40\,dB/decade$ per $\omega \to \infty$.

11. Un sistema dinamico lineare semplicemente stabile se i poli della funzione di trasferimento sono:

    ○ tutti a parte reale negativa;
    ○ tutti a parte reale negativa tranne uno uguale a zero;
    ○ tutti a parte reale positiva.

12. Data la funzione di risposta armonica $G(j\,\omega)$, il suo margine di fase definito come:

    ○ $\left.\dfrac{1}{|G(j\omega)|}\right|_{\omega\,:\,\angle G(j\omega)=-\pi}$;
    ○ $\left.\angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=0}$;
    ○ $\left.\pi + \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$;
    ○ $\left.\pi - \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Gli asintoti del luogo delle radici di un sistema avente 3 poli e guadagno statico negativo formano, nel caso di guadagno di retroazione $K > 0$, rispetto all'asse reale positivo angoli:

    ○ di 0, 120 e 240 gradi;
    ○ di 60, 180 e 300 gradi;
    ○ il sistema non presenta asintoti.

14. Tramite lo studio del contorno delle radici possibile determinare il valore dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

    ○ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
    ○ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
    ○ del guadagno di retroazione.

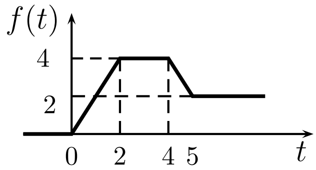
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

14 Giugno 2011 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

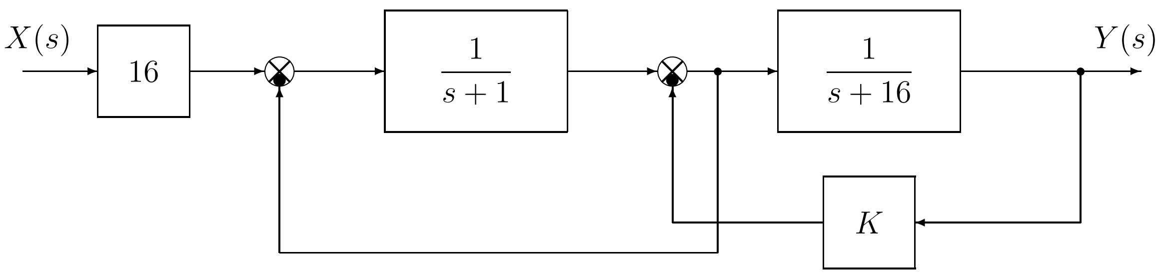
$$x_1(t) = 6\,\cos(3\,t - 12), \qquad x_2(t) = \tfrac{2}{j}\,(e^{j\,2\,t} - e^{-j\,2\,t}) + 3\,\sin(4\,\pi\,t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{s\,(s+2)^4}, \qquad G_2(s) = \frac{s-3}{(s+1)\,(s+2)\,(s+3)}, \qquad G_3(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-2)\,(s+3)^2}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -16$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

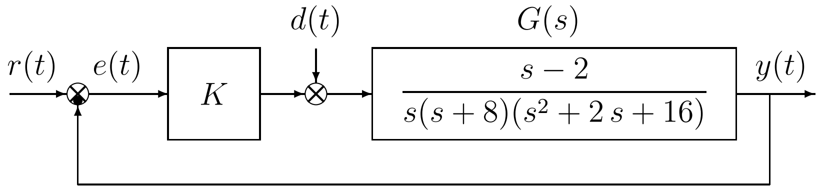
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema;
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema;
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema;
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema;
5. il guadagno statico K_0;
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino;
7. l'istante di massima sovraelongazione;
8. la massima sovraelongazione percentuale;
9. il periodo delle oscillazioni.

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 4$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2\, d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

d.4) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K\,G(s)$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + 2\,\cos(0.4\,t + \pi/4)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

14 Giugno 2011 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il grado relativo di una funzione di trasferimento definito come:
   - ◯ il numero di poli complessi coniugati;
   - ◯ il numero di poli nulli.
   - ◯ il grado del numeratore meno quello del denominatore;
   - ◯ il grado del denominatore meno quello del numeratore.
2. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 1 deve essere chiuso all'infinito:
   - ◯ con una circonferenza percorsa in senso antiorario;
   - ◯ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   - ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   - ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso orario.
3. Dato il diagramma di Bode asintotico delle fasi di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma asintotico delle ampiezze:
   - ◯ se nel sistema non sono presenti ritardi.
   - ◯ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
   - ◯ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa;
   - ◯ solo se il diagramma di Bode delle fasi presenta pendenze negative o nulle.
4. Un sistema del secondo ordine con coefficiente di smorzamento $\delta > 1$ è caratterizzato da:
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale negativa.
5. Il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{\tau_z s+1}{s^2(\tau_p s+1)}$:
   - ◯ circonda il punto critico -1 se $\tau_z > \tau_p$;
   - ◯ circonda il punto critico -1 se $\tau_z < \tau_p$;
   - ◯ circonda sempre il punto critico -1.
6. Affinch un sistema sia asintoticamente stabile, occorre che i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh ad esso associata siano tutti:
   - ◯ di segno concorde;
   - ◯ positivi o nulli;
   - ◯ a parte reale negativa.
7. Il valore iniziale della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{7s+3}{s^2+1}$ vale:
   - ◯ $g(0^+) = 0$;
   - ◯ $g(0^+) = 1$;
   - ◯ $g(0^+) = 7$.

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+5)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   - ◯ del segnale $x(t) = te^{-5t}$;
   - ◯ del segnale $x(t) = te^{-(t-5)}$;
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to 0$;
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{5}$ per $t \to \infty$.

9. Determinare una stima del tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+202\,s+400}$;

$$T_a =$$

10. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    - ◯ una pendenza di $-40\,dB/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una pendenza di $-20\,dB/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una pendenza di $-40\,dB/decade$ per $\omega \to \infty$;
    - ◯ una pendenza di $-20\,dB/decade$ per $\omega \to \infty$.

11. Un sistema dinamico lineare semplicemente stabile se i poli della funzione di trasferimento sono:

    - ◯ tutti a parte reale negativa tranne uno uguale a zero;
    - ◯ tutti a parte reale negativa;
    - ◯ tutti a parte reale positiva.

12. Data la funzione di risposta armonica $G(j\,\omega)$, il suo margine di fase definito come:

    - ◯ $\left.\frac{1}{|G(j\omega)|}\right|_{\omega\,:\,\angle G(j\omega)=-\pi}$;
    - ◯ $\left.\angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=0}$;
    - ◯ $\left.\pi - \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$;
    - ◯ $\left.\pi + \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$.

    Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Gli asintoti del luogo delle radici di un sistema avente 3 poli e guadagno statico negativo formano, nel caso di guadagno di retroazione $K > 0$, rispetto all'asse reale positivo angoli:

    - ◯ di 60, 180 e 300 gradi;
    - ◯ di 0, 120 e 240 gradi;
    - ◯ il sistema non presenta asintoti.

14. Tramite lo studio del contorno delle radici possibile determinare il valore dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

    - ◯ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
    - ◯ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
    - ◯ del guadagno di retroazione.

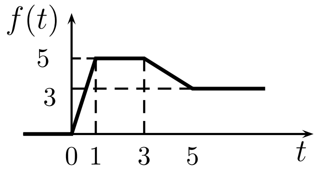
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

14 Giugno 2011 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \tfrac{3}{j}\,(e^{j\,3\,t} - e^{-j\,3\,t}) + 2\,\cos(5\,\pi\,t), \qquad x_2(t) = 4\,\sin(6\,t - 12),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{18}{s^2+9} + \frac{2\,s}{s^2+25\,\pi^2}, \qquad X_2(s) = \frac{24\,e^{-2\,s}}{s^2+36}, \qquad X_3(s) = \frac{5}{s^2} - \frac{5\,e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-3\,s}}{s^2} + \frac{e^{-5\,s}}{s^2}$$

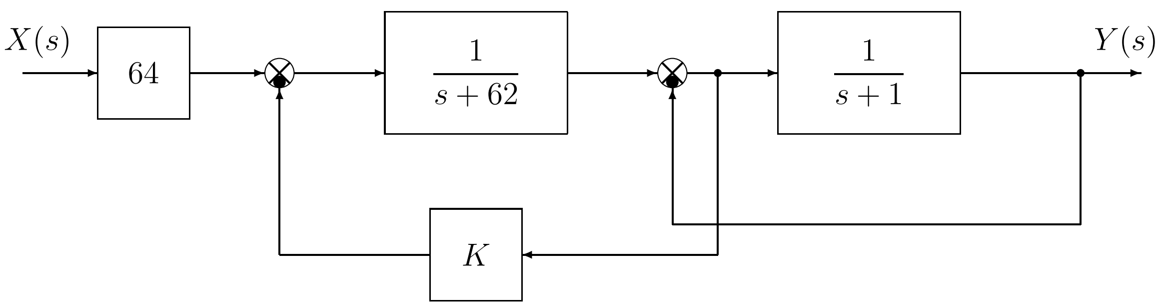
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+1)\,(s-4)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{6}{s\,(s+2)^4}, \qquad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+2)\,(s-3)\,(s+4)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{9}{25}\,e^{-t} + \frac{16}{25}\,e^{4\,t} + \frac{4}{5}\,t\,e^{4\,t}, \qquad g_2(t) = \int_0^t \tau^3\,e^{-2\,\tau}\,d\tau, \qquad g_3(t) = \frac{1}{10}\,e^{-2\,t} + \frac{4}{35}\,e^{3\,t} - \frac{3}{14}\,e^{-4\,t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:

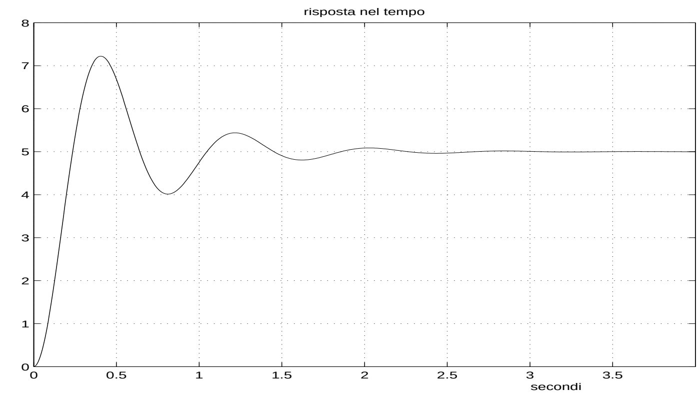


c.1) Posto $K = -60$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{64}{s^2 + 4\,s + 64}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema; $\sigma = 2$
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; $\omega = 7.746$
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema; $\omega_n = 8$
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; $\delta = 0.25$
5. il guadagno statico K_0; $K_0 = 1$
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino; $T_a = \frac{3}{2}$
7. l'istante di massima sovraelongazione; $T_M = 0.41$
8. la massima sovraelongazione percentuale; $S = 44.4\%$

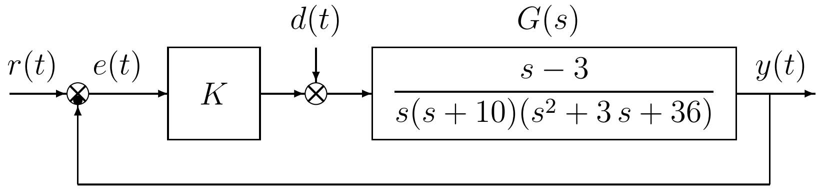


9. il periodo delle oscillazioni. $T = 0.82$

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 5$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s-3)}{s\,(s+10)\,(s^2+3\,s+36)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 10\,s^3 + 66\,s^2 + (360+K)\,s - 3K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 66 & -3\,K \\
3 & 13 & 360+K & \\
2 & 498-K & -39\,K & \\
1 & -K^2+647\,K+179280 & & \\
0 & -39\,K & &
\end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > -209.7.8, \qquad\qquad K < 0$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{360+K^*}{13}} = 3.4$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.1\,d_0$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1+K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.1\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 10$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{2}{K_v}$ con $K_v = -\frac{K}{120}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = -\frac{240}{K}.$$

d.4) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K\,G(s)$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

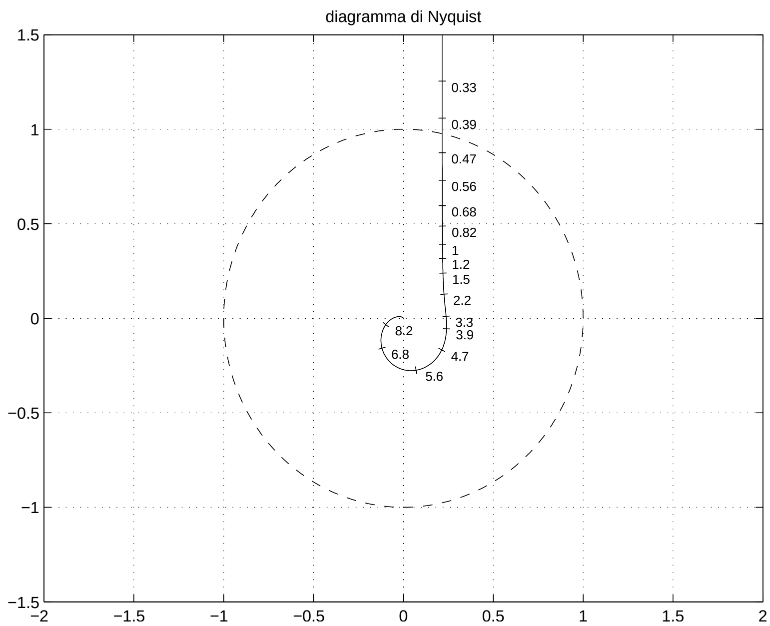


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = 0.22$.

Esistono due intersezioni $\sigma^*_{(1,2)}$ con l'asse reale. Tali intersezioni si determinano facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma_1^* = -\frac{50}{K^*} = 0.24$$

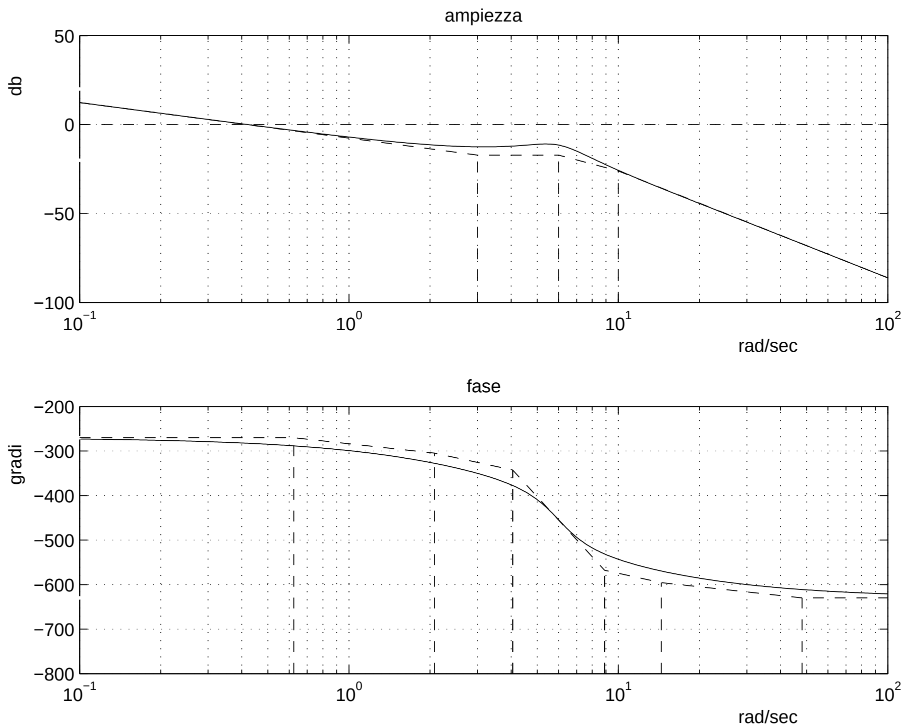
Il valore di σ_2^* si ricava utilizzando la seconda soluzione della riga 1:

$$\sigma_2^* = -0.059$$

I corrispondenti valori della pulsazione sono $\omega_1^* = 3.4$ e $\omega_2^* = 9.7$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 50$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.45\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4 + 3\,\cos(0.3\,t + \pi/5)$.

Soluzione: La risposta in catena aperta del sistema si pu facilmente determinare a partire dalla trasformata di Laplace dell'ingresso: $R(s) = \dfrac{4}{s} + 3\left(\dfrac{\cos(\pi/5)s - 0.3\sin(\pi/5)}{s^2 + 0.3^2}\right)$.

L'uscita del sistema quindi data da $Y(s) = KR(s)G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione: vedi figura 4. Soluzione:

$$\sigma = -5.33$$
$$\phi = 0,\ 120,\ 240$$
$$s^* = 3.4\,i$$
$$K^* = -209.7$$

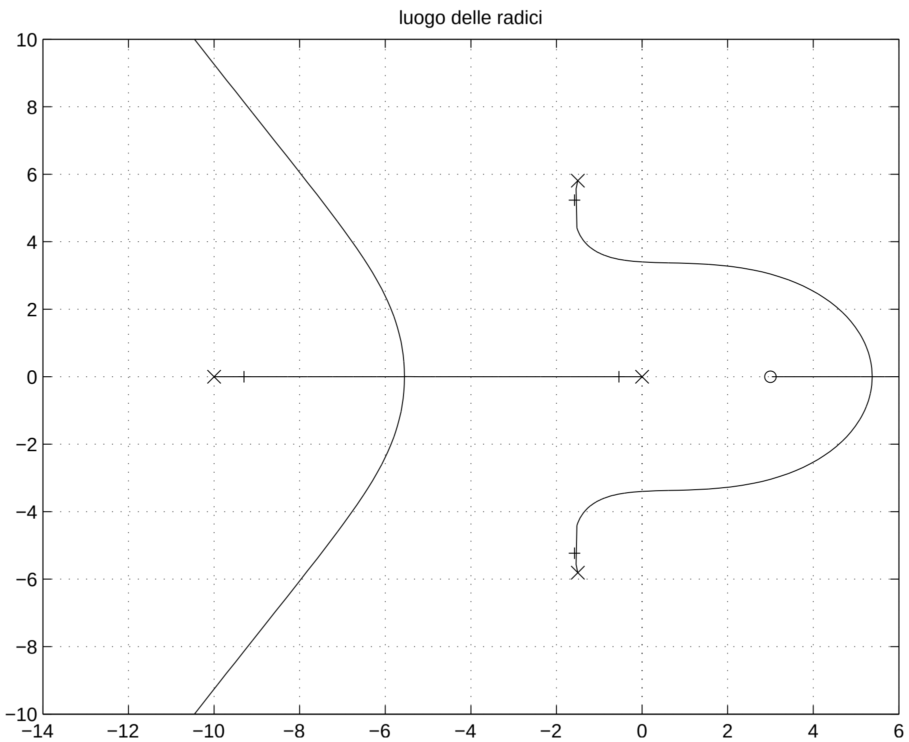


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

14 Giugno 2011 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il grado relativo di una funzione di trasferimento definito come:

   ◯ il grado del numeratore meno quello del denominatore;
   ⊗ il grado del denominatore meno quello del numeratore;
   ◯ il numero di poli complessi coniugati;
   ◯ il numero di poli nulli.

2. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist “completo” di un sistema $G(s)$ di tipo 1 deve essere chiuso all'infinito:

   ⊗ con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
   ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   ◯ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   ◯ con una circonferenza percorsa in senso antiorario.

3. Dato il diagramma di Bode asintotico delle fasi di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma asintotico delle ampiezze:

   ◯ solo se il diagramma di Bode delle fasi presenta pendenze negative o nulle;
   ⊗ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
   ◯ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa;
   ◯ se nel sistema non sono presenti ritardi.

4. Un sistema del secondo ordine con coefficiente di smorzamento $\delta > 1$ è caratterizzato da:

   ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   ◯ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   ⊗ due poli reali distinti a parte reale negativa;
   ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva.

5. Il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{\tau_z s+1}{s^2(\tau_p s+1)}$:

   ◯ circonda il punto critico -1 se $\tau_z < \tau_p$;
   ⊗ circonda il punto critico -1 se $\tau_z > \tau_p$;
   ◯ circonda sempre il punto critico -1.

6. Affinch un sistema sia asintoticamente stabile, occorre che i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh ad esso associata siano tutti:

   ◯ positivi o nulli;
   ◯ a parte reale negativa;
   ⊗ di segno concorde.

7. Il valore iniziale della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{5s+1}{s^2+2}$ vale:

   ◯ $g(\infty) = 0$;
   ◯ $g(\infty) = 1$;
   ⊗ $g(\infty) = 5$.

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+5)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{5}$ per $t \to \infty$;

   ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to 0$;

   ◯ del segnale $x(t) = te^{-(t-5)}$;

   ⊗ del segnale $x(t) = te^{-5t}$.

9. Determinare una stima del tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+101\,s+100}$;

$$T_a = 3$$

10. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    ◯ una pendenza di $-20\,dB/decade$ per $\omega \to 0$;

    ⊗ una pendenza di $-40\,dB/decade$ per $\omega \to 0$;

    ◯ una pendenza di $-20\,dB/decade$ per $\omega \to \infty$;

    ⊗ una pendenza di $-40\,dB/decade$ per $\omega \to \infty$.

11. Un sistema dinamico lineare semplicemente stabile se i poli della funzione di trasferimento sono:

    ◯ tutti a parte reale negativa;

    ⊗ tutti a parte reale negativa tranne uno uguale a zero;

    ◯ tutti a parte reale positiva.

12. Data la funzione di risposta armonica $G(j\,\omega)$, il suo margine di fase definito come:

    ◯ $\left.\dfrac{1}{|G(j\omega)|}\right|_{\omega\,:\,\angle G(j\omega)=-\pi}$;

    ◯ $\left.\angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=0}$;

    ⊗ $\left.\pi + \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$;

    ◯ $\left.\pi - \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$.

    Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Gli asintoti del luogo delle radici di un sistema avente 3 poli e guadagno statico negativo formano, nel caso di guadagno di retroazione $K > 0$, rispetto all'asse reale positivo angoli:

    ⊗ di 0, 120 e 240 gradi;

    ◯ di 60, 180 e 300 gradi;

    ◯ il sistema non presenta asintoti.

14. Tramite lo studio del contorno delle radici possibile determinare il valore dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

    ◯ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;

    ⊗ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;

    ⊗ del guadagno di retroazione.

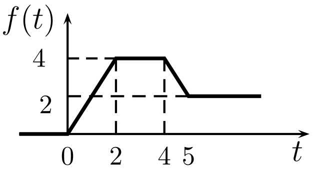
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

14 Giugno 2011 - Esercizi

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 6\,\cos(3\,t - 12), \qquad x_2(t) = \tfrac{2}{j}\,(e^{j\,2\,t} - e^{-j\,2\,t}) + 3\,\sin(4\,\pi\,t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{6\,s\,e^{-4s}}{s^2+9}, \qquad X_2(s) = \frac{8}{s^2+4} + \frac{12\,\pi}{s^2+16\,\pi^2}, \qquad X_3(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2\,e^{-2\,s}}{s^2} - \frac{2\,e^{-4\,s}}{s^2} + \frac{2\,e^{-5\,s}}{s^2}$$

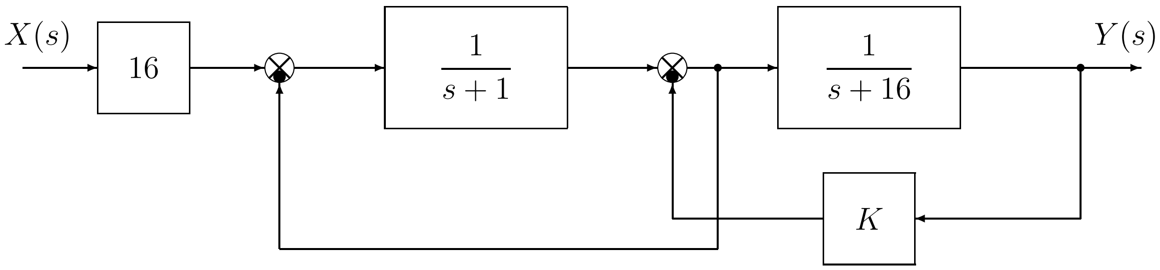
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{s\,(s+2)^4}, \qquad G_2(s) = \frac{s-3}{(s+1)\,(s+2)\,(s+3)}, \qquad G_3(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-2)\,(s+3)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{1}{2}\int_0^t \tau^3\,e^{-2\,\tau}d\tau, \qquad g_2(t) = -2\,e^{-t} + 5\,e^{-2\,t} - 3\,e^{-3\,t}, \qquad g_3(t) = \frac{16}{25}\,e^{2\,t} + \frac{9}{25}\,e^{-3\,t} - \frac{1}{5}\,t\,e^{-3\,t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:

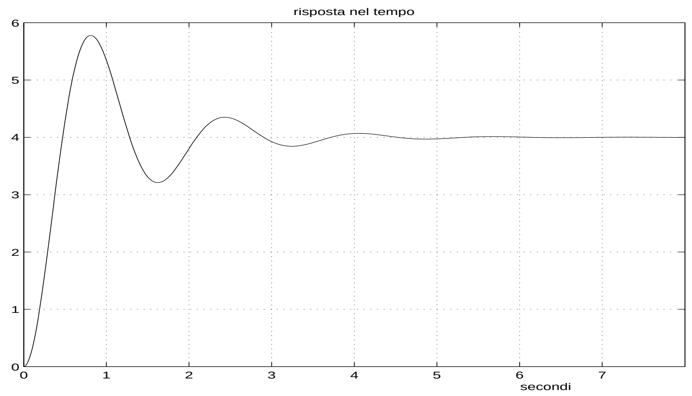


c.1) Posto $K = -16$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{16}{s^2 + 2\,s + 16}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema; $\sigma = 1$
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; $\omega = 3.873$
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema; $\omega_n = 4$
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; $\delta = 0.25$
5. il guadagno statico K_0; $K_0 = 1$
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino; $T_a = 3$
7. l'istante di massima sovraelongazione; $T_M = 0.81$
8. la massima sovraelongazione percentuale; $S = 44.4\%$

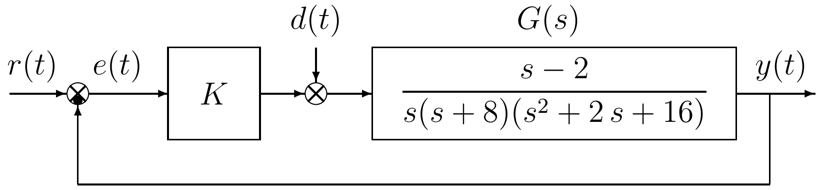


9. il periodo delle oscillazioni. $T = 1.62$

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 4$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s-2)}{s\,(s+8)\,(s^2+2\,s+16)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 10\,s^3 + 32\,s^2 + (128+K)\,s - 2K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 32 & -2\,K \\
3 & 10 & 128+K & \\
2 & 192-K & -20\,K & \\
1 & -K^2+264\,K+24576 & & \\
0 & -20\,K & &
\end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > -72.9, \qquad\qquad K < 0$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{128+K^*}{10}} = 2.3$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2\,d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1+K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.2\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 5$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{3}{K_v}$ con $K_v = -\frac{K}{64}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = -\frac{192}{K}.$$

d.4) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K\,G(s)$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

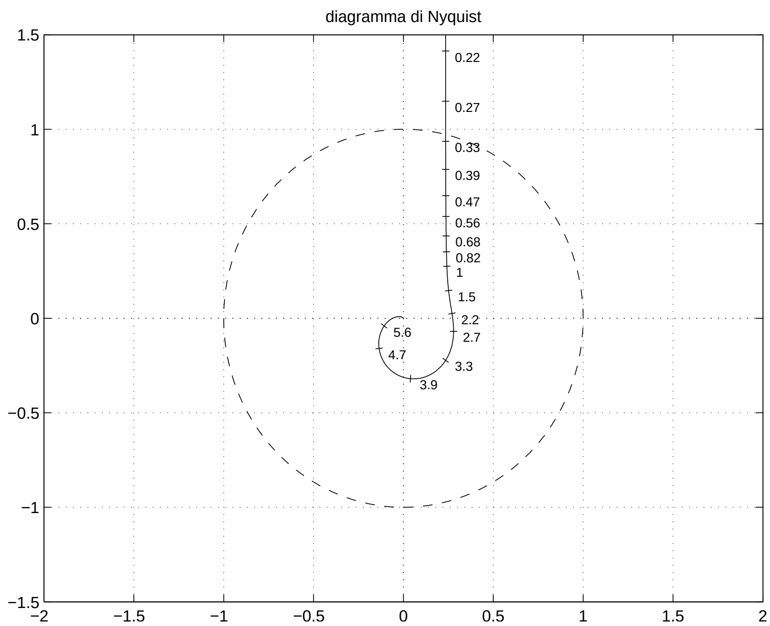


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = 0.23$.

Esistono due intersezioni $\sigma^*_{(1,2)}$ con l'asse reale. Tali intersezioni si determinano facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma_1^* = -\frac{20}{K^*} = 0.27$$

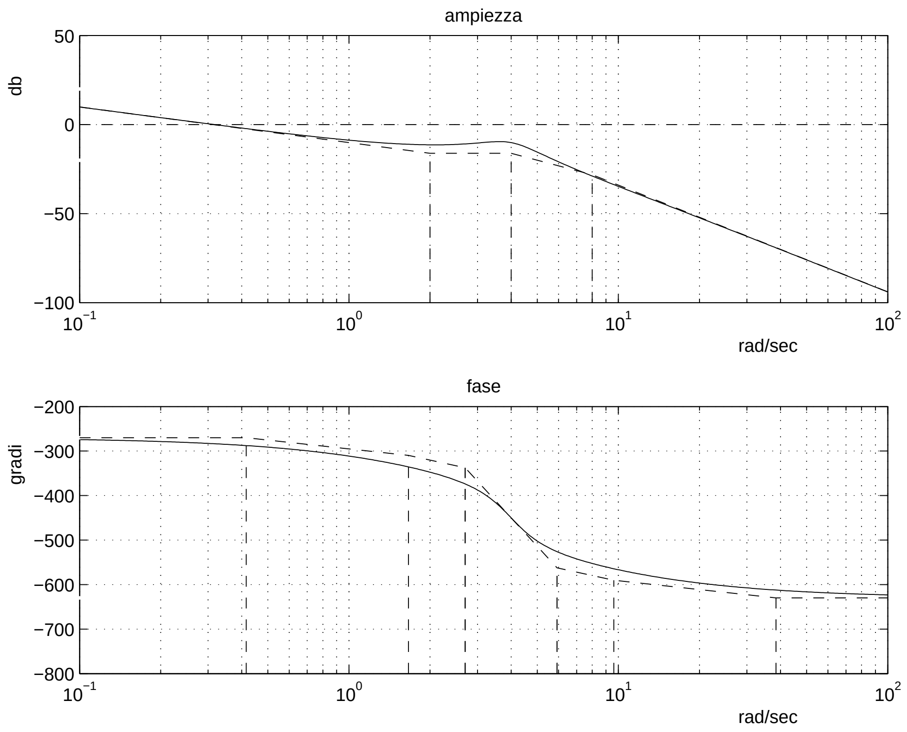
Il valore di σ_2^* si ricava utilizzando la seconda soluzione della riga 1:

$$\sigma_2^* = -0.059$$

I corrispondenti valori della pulsazione sono $\omega_1^* = 2.3$ e $\omega_2^* = 6.8$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.32\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + 2\,\cos(0.4\,t + \pi/4)$.

Soluzione: La risposta in catena aperta del sistema si pu facilmente determinare a partire dalla trasformata di Laplace dell'ingresso: $R(s) = \dfrac{5}{s} + 2\left(\dfrac{\cos(\pi/4)s - 0.4\sin(\pi/4)}{s^2+0.4^2}\right)$.

L'uscita del sistema quindi data da $Y(s) = KR(s)G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione: vedi figura 4. Soluzione:

$$\sigma = -4$$
$$\phi = 0,\ 120,\ 240$$
$$s^* = 2.3\, i$$
$$K^* = -72.9$$

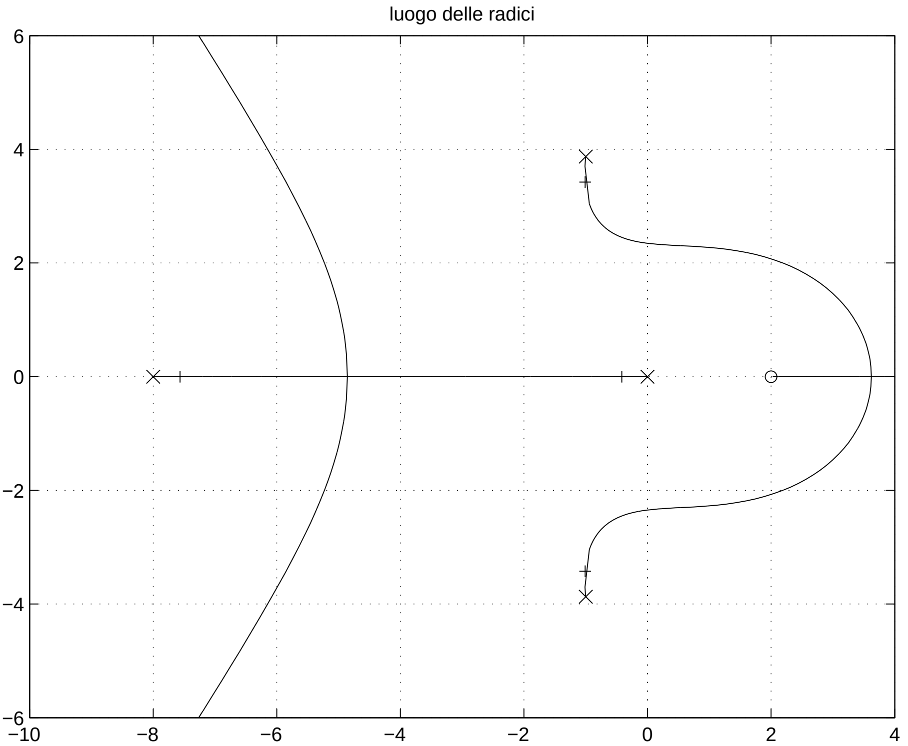


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2010/11

14 Giugno 2011 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il grado relativo di una funzione di trasferimento definito come:
   - ◯ il numero di poli complessi coniugati;
   - ◯ il numero di poli nulli.
   - ◯ il grado del numeratore meno quello del denominatore;
   - ⊗ il grado del denominatore meno quello del numeratore.

2. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 1 deve essere chiuso all'infinito:
   - ◯ con una circonferenza percorsa in senso antiorario;
   - ◯ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   - ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   - ⊗ con una semicirconferenza percorsa in senso orario.

3. Dato il diagramma di Bode asintotico delle fasi di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma asintotico delle ampiezze:
   - ◯ se nel sistema non sono presenti ritardi.
   - ⊗ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
   - ◯ solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa;
   - ◯ solo se il diagramma di Bode delle fasi presenta pendenze negative o nulle.

4. Un sistema del secondo ordine con coefficiente di smorzamento $\delta > 1$ è caratterizzato da:
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva;
   - ⊗ due poli reali distinti a parte reale negativa.

5. Il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{\tau_z s+1}{s^2(\tau_p s+1)}$:
   - ⊗ circonda il punto critico -1 se $\tau_z > \tau_p$;
   - ◯ circonda il punto critico -1 se $\tau_z < \tau_p$;
   - ◯ circonda sempre il punto critico -1.

6. Affinch un sistema sia asintoticamente stabile, occorre che i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh ad esso associata siano tutti:
   - ⊗ di segno concorde;
   - ◯ positivi o nulli;
   - ◯ a parte reale negativa.

7. Il valore iniziale della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{7s+3}{s^2+1}$ vale:
   - ◯ $g(0^+) = 0$;
   - ◯ $g(0^+) = 1$;
   - ⊗ $g(0^+) = 7$.

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+5)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   - $\otimes$ del segnale $x(t) = te^{-5t}$;
   - $\bigcirc$ del segnale $x(t) = te^{-(t-5)}$;
   - $\otimes$ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to 0$;
   - $\bigcirc$ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{5}$ per $t \to \infty$.

9. Determinare una stima del tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+202\,s+400}$;

$$T_a = 1.5$$

10. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    - $\otimes$ una pendenza di $-40\,dB/decade$ per $\omega \to 0$;
    - $\bigcirc$ una pendenza di $-20\,dB/decade$ per $\omega \to 0$;
    - $\otimes$ una pendenza di $-40\,dB/decade$ per $\omega \to \infty$;
    - $\bigcirc$ una pendenza di $-20\,dB/decade$ per $\omega \to \infty$.

11. Un sistema dinamico lineare semplicemente stabile se i poli della funzione di trasferimento sono:

    - $\otimes$ tutti a parte reale negativa tranne uno uguale a zero;
    - $\bigcirc$ tutti a parte reale negativa;
    - $\bigcirc$ tutti a parte reale positiva.

12. Data la funzione di risposta armonica $G(j\,\omega)$, il suo margine di fase definito come:

    - $\bigcirc$ $\left.\frac{1}{|G(j\omega)|}\right|_{\omega\,:\,\angle G(j\omega)=-\pi}$;
    - $\bigcirc$ $\left.\angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=0}$;
    - $\bigcirc$ $\left.\pi - \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$;
    - $\otimes$ $\left.\pi + \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$.

    Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Gli asintoti del luogo delle radici di un sistema avente 3 poli e guadagno statico negativo formano, nel caso di guadagno di retroazione $K > 0$, rispetto all'asse reale positivo angoli:

    - $\bigcirc$ di 60, 180 e 300 gradi;
    - $\otimes$ di 0, 120 e 240 gradi;
    - $\bigcirc$ il sistema non presenta asintoti.

14. Tramite lo studio del contorno delle radici possibile determinare il valore dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

    - $\otimes$ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
    - $\bigcirc$ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
    - $\otimes$ del guadagno di retroazione.