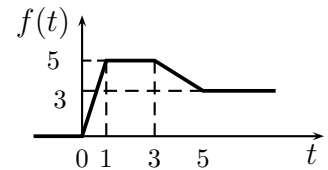


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

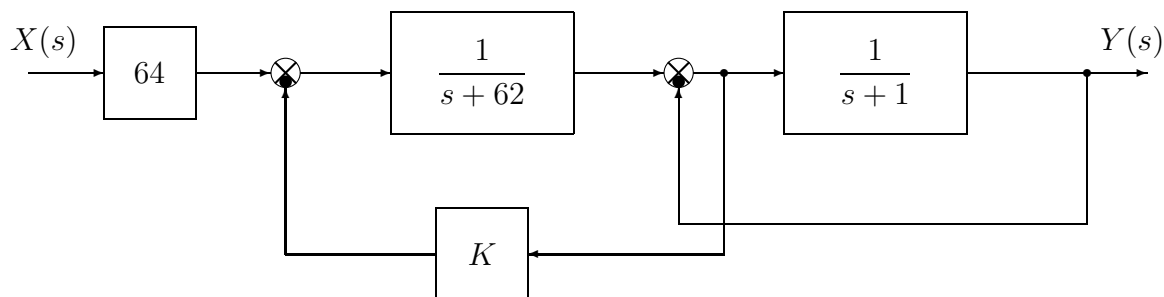
$$x_1(t) = \frac{3}{j} (e^{j3t} - e^{-j3t}) + 2 \cos(5\pi t), \quad x_2(t) = 4 \sin(6t - 12),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+1)(s-4)^2}, \quad G_2(s) = \frac{6}{s(s+2)^4}, \quad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-3)(s+4)}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -60$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

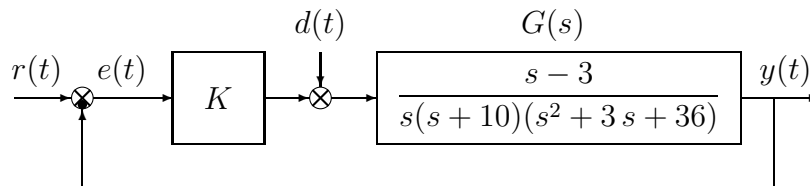
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema;
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema;
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema;
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema;
5. il guadagno statico K_0 ;
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino;
7. l'istante di massima sovraelongazione;
8. la massima sovraelongazione percentuale;
9. il periodo delle oscillazioni.

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 5$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.1 d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K , l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2t$.

d.4) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K G(s)$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 50$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K G(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4 + 3 \cos(0.3t + \pi/5)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K . Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2010/11
13 Gennaio 2011 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

- Un sistema di “tipo 2” è caratterizzato da:
 - 2 poli nulli;
 - 2 poli complessi coniugati;
 - grado relativo $n - m = 2$.
- Una funzione di trasferimento con grado del denominatore n e grado del numeratore m si dice *fisicamente realizzabile* se:
 - $n = m$;
 - $n > m$;
 - $n < m$.
- La Trasformata di Laplace $F(s)$ di una generica funzione reale del tempo $f(t)$ è definita come:
 - $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$;
 - $F(s) = \int_0^{\infty} f(s) e^{-t} ds$;
 - $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{t/s} dt$.
- Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La proprietà di traslazione nel tempo delle trasformate di Laplace afferma che:
 - $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{t_0} F(s)$;
 - $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-s} F(s)$;
 - $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$;
 - $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{s/t_0} F(s)$.
- Un sistema lineare è semplicemente stabile se la sua funzione di trasferimento:
 - ha tutti i poli a parte reale positiva;
 - ha tutti i poli a parte reale negativa;
 - ha tutti i poli a parte reale negativa ed un polo singolo a parte reale nulla.
- Data una funzione di trasferimento $G(s)$, si definisce *modo dominante*:
 - il polo di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assoluto più piccolo;
 - il polo di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assoluto più piccolo;
 - lo zero di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assoluto più piccolo;
 - lo zero di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assoluto più piccolo.
- Dato uno schema a blocchi in cui Δ è il determinante, \mathcal{P} è l'insieme dei percorsi da l'ingresso a all'uscita b e Δ_i è il grafo parziale relativo al percorso P_i , la trasmittanza T da a a b può essere calcolata come (formula di Mason):
 - $T = \Delta \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i$;
 - $T = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i$;
 - $T = \sum_{i \in \mathcal{P}} \Delta P_i \Delta_i$.

8. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo tre costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:
- il 100% del valore finale;
 - il 95% del valore finale;
 - l'85% del valore finale;
 - il 50% del valore finale.
9. In un sistema del secondo ordine, si definisce *tempo di ritardo* della risposta al gradino il tempo necessario all'uscita:
- per raggiungere il suo valore massimo;
 - per passare dal 10% al 90% del valore finale;
 - per raggiungere il 95% del valore finale;
 - per raggiungere il 50% del valore finale.
10. Il valore finale per $t \rightarrow \infty$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{4s+1}{s(s^2+2)}$ vale:
- $g(\infty) = 0$;
 - $g(\infty) = 1/2$;
 - $g(\infty) = 1$.
11. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+1)}{s^2+4s+64}$ per $\omega \in [0, \infty]$:
- termina nell'origine;
 - presenta un asintoto verticale;
 - si evolve tutto nel primo quadrante.
12. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze dispari di s . È possibile affermare che l'equazione caratteristica:
- ha almeno una radice a parte reale positiva;
 - ha un polo nell'origine;
 - ha lo stesso numero di radici a parte reale strettamente positiva e strettamente negativa;
 - ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine.

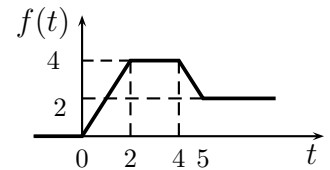
Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il *teorema del baricentro* del luogo delle radici si applica:
- solo a funzioni $G(s)$ razionali fratte e stabili;
 - solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r > 2$;
 - solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$.
14. In corrispondenza di un punto di diramazione nel luogo delle radici di un sistema dinamico $G(s)$:
- vi sono radici multiple nell'equazione caratteristica del sistema;
 - hanno origine rami che dividono il piano complesso in parti uguali;
 - i rami del luogo delle radici sono costituiti da semirette;
 - i rami del luogo delle radici sono perpendicolari fra di loro.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

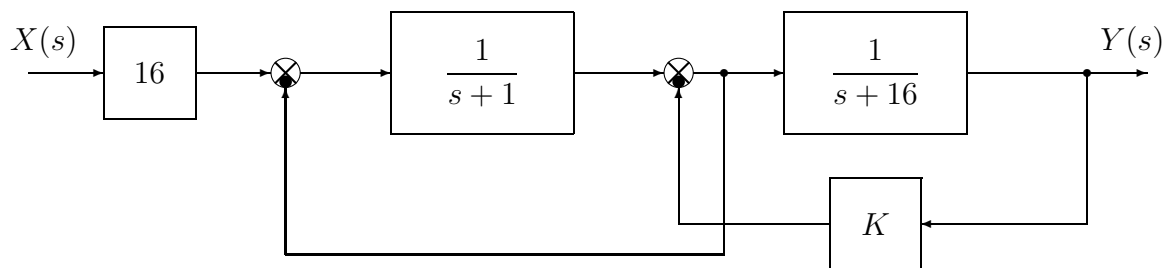
$$x_1(t) = 6 \cos(3t - 12), \quad x_2(t) = \frac{2}{j} (e^{j2t} - e^{-j2t}) + 3 \sin(4\pi t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{s(s+2)^4}, \quad G_2(s) = \frac{s-3}{(s+1)(s+2)(s+3)}, \quad G_3(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-2)(s+3)^2}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -16$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

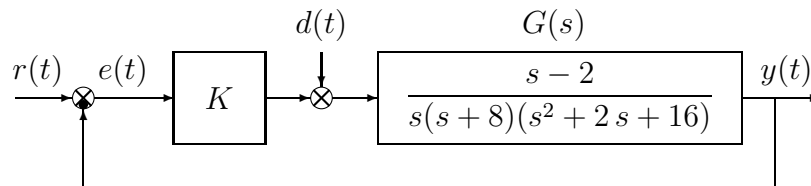
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema;
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema;
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema;
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema;
5. il guadagno statico K_0 ;
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino;
7. l'istante di massima sovraelongazione;
8. la massima sovraelongazione percentuale;
9. il periodo delle oscillazioni.

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 4$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2 d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K , l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3t$.

d.4) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K G(s)$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K G(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + 2 \cos(0.4t + \pi/4)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K . Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2010/11
13 Gennaio 2011 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

- Un sistema di “tipo 2” è caratterizzato da:
 - grado relativo $n - m = 2$;
 - 2 poli complessi coniugati;
 - 2 poli nulli.
- Una funzione di trasferimento con grado del denominatore n e grado del numeratore m si dice *fisicamente realizzabile* se:
 - $n = m$;
 - $n < m$;
 - $n > m$.
- La Trasformata di Laplace $F(s)$ di una generica funzione reale del tempo $f(t)$ è definita come:
 - $F(s) = \int_0^{\infty} f(s) e^{-t} ds$;
 - $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$;
 - $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{t/s} dt$;
- Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La proprietà di traslazione nel tempo delle trasformate di Laplace afferma che:
 - $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{s/t_0} F(s)$;
 - $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-s} F(s)$;
 - $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{t_0} F(s)$;
 - $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$.
- Un sistema lineare è semplicemente stabile se la sua funzione di trasferimento:
 - ha tutti i poli a parte reale negativa ed un polo singolo a parte reale nulla;
 - ha tutti i poli a parte reale negativa;
 - ha tutti i poli a parte reale positiva.
- Data una funzione di trasferimento $G(s)$, si definisce *modo dominante*:
 - lo zero di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assoluto più piccolo;
 - lo zero di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assoluto più piccolo;
 - il polo di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assoluto più piccolo;
 - il polo di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assoluto più piccolo.
- Dato uno schema a blocchi in cui Δ è il determinante, \mathcal{P} è l'insieme dei percorsi da l'ingresso a all'uscita b e Δ_i è il grafo parziale relativo al percorso P_i , la trasmittanza T da a a b può essere calcolata come (formula di Mason): determini
 - $T = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i$;
 - $T = \Delta \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i$;
 - $T = \sum_{i \in \mathcal{P}} \Delta P_i \Delta_i$.

8. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo tre costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:
- il 50% del valore finale;
 - l'85% del valore finale;
 - il 95% del valore finale;
 - il 100% del valore finale.
9. In un sistema del secondo ordine, si definisce *tempo di ritardo* della risposta al gradino il tempo necessario all'uscita:
- per raggiungere il suo valore massimo;
 - per raggiungere il 95% del valore finale;
 - per raggiungere il 50% del valore finale;
 - per passare dal 10% al 90% del valore finale.
10. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2s+3}{s^3+1}$ vale:
- $g(0^+) = 0$;
 - $g(0^+) = 1/2$;
 - $g(0^+) = 1$.
11. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+1)}{s^2+4s+64}$ per $\omega \in [0, \infty]$:
- si evolve tutto nel primo quadrante;
 - presenta un asintoto verticale;
 - termina nell'origine.
12. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze dispari di s . È possibile affermare che l'equazione caratteristica:
- ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine;
 - ha almeno una radice a parte reale positiva;
 - ha lo stesso numero di radici a parte reale strettamente positiva e strettamente negativa;
 - ha un polo nell'origine.

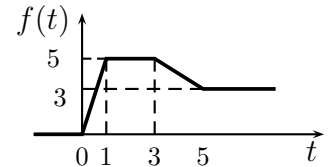
Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il *teorema del baricentro* del luogo delle radici si applica:
- solo a funzioni $G(s)$ razionali fratte e stabili;
 - solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$.
 - solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r > 2$.
14. In corrispondenza di un punto di diramazione nel luogo delle radici di un sistema dinamico $G(s)$:
- i rami del luogo delle radici sono costituiti da semirette;
 - i rami del luogo delle radici sono perpendicolari fra di loro;
 - vi sono radici multiple nell'equazione caratteristica del sistema;
 - hanno origine rami che dividono il piano complesso in parti uguali.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{3}{j} (e^{j3t} - e^{-j3t}) + 2 \cos(5\pi t), \quad x_2(t) = 4 \sin(6t - 12),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{18}{s^2 + 9} + \frac{2s}{s^2 + 25\pi^2}, \quad X_2(s) = \frac{24e^{-2s}}{s^2 + 36}, \quad X_3(s) = \frac{5}{s^2} - \frac{5e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-3s}}{s^2} + \frac{e^{-5s}}{s^2}$$

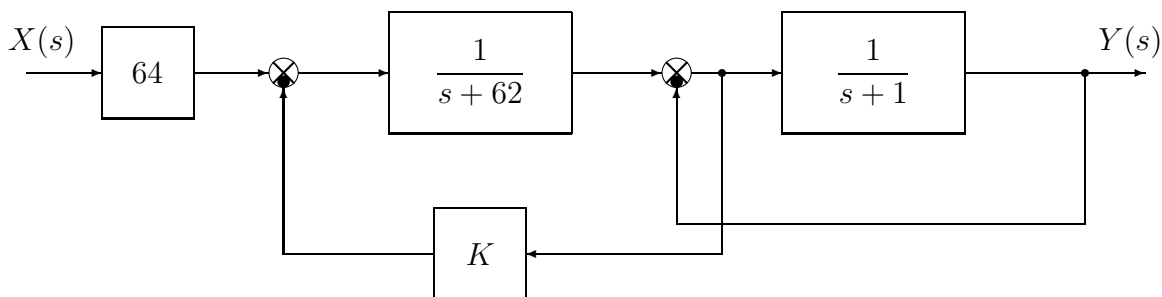
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+1)(s-4)^2}, \quad G_2(s) = \frac{6}{s(s+2)^4}, \quad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s-3)(s+4)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{9}{25} e^{-t} + \frac{16}{25} e^{4t} + \frac{4}{5} t e^{4t}, \quad g_2(t) = \int_0^t \tau^3 e^{-2\tau} d\tau, \quad g_3(t) = \frac{1}{10} e^{-2t} + \frac{4}{35} e^{3t} - \frac{3}{14} e^{-4t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:

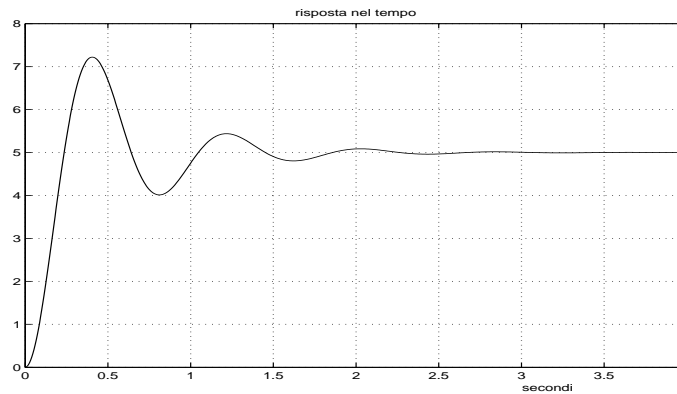


c.1) Posto $K = -60$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{64}{s^2 + 4s + 64}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

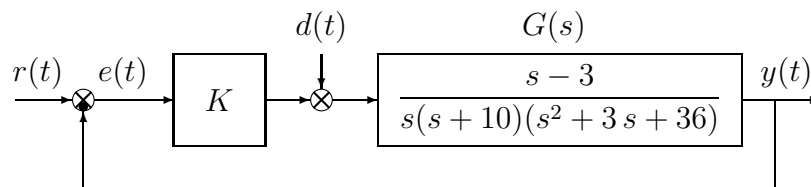
- la parte reale σ dei poli dominanti del sistema; $\sigma = 2$
- la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; $\omega = 7.746$
- la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema; $\omega_n = 8$
- il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; $\delta = 0.25$
- il guadagno statico K_0 ; $K_0 = 1$
- il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino; $T_a = \frac{3}{2}$
- l'istante di massima sovraelongazione; $T_M = 0.41$
- la massima sovraelongazione percentuale; $S = 44.4\%$
- il periodo delle oscillazioni. $T = 0.82$



c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 5$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s-3)}{s(s+10)(s^2+3s+36)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 10s^3 + 66s^2 + (360+K)s - 3K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 66 & -3K \\ 3 & 13 & 360+K & \\ 2 & 498-K & -39K & \\ 1 & -K^2+647K+179280 & & \\ 0 & -39K & & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > -209.7.8, \quad K < 0$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{360+K^*}{13}} = 3.4$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.1 d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0) d_0}{1 + K G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.1 d_0$$

Il sistema $G(s)$ è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 10$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K , l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{2}{K_v}$ con $K_v = -\frac{K}{120}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = -\frac{240}{K}.$$

d.4) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” del guadagno d’anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell’asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l’asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K G(s)$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

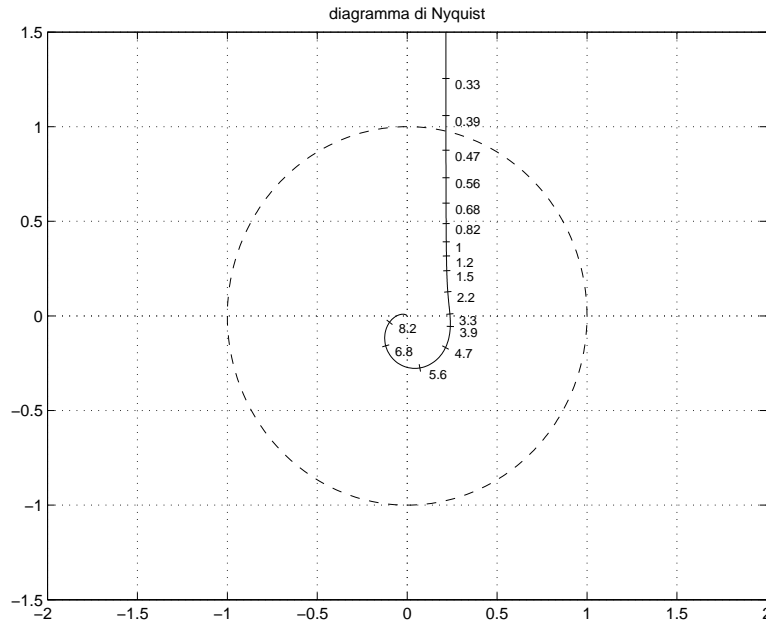


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau \Delta_a = 0.22$.

Esistono due intersezioni $\sigma_{(1,2)}^*$ con l’asse reale. Tali intersezioni si determinano facilmente dall’analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma_1^* = -\frac{50}{K^*} = 0.24$$

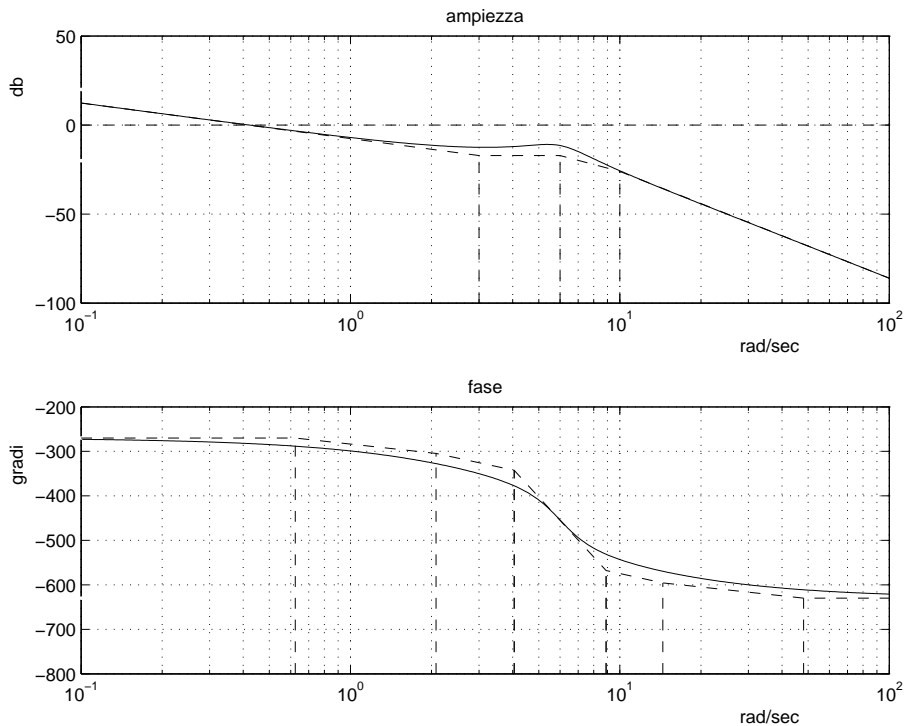
Il valore di σ_2^* si ricava utilizzando la seconda soluzione della riga 1:

$$\sigma_2^* = -0.059$$

I corrispondenti valori della pulsazione sono $\omega_1^* = 3.4$ e $\omega_2^* = 9.7$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell’esercizio precedente e si ponga $K = 50$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.45 \text{ rad/s}$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4 + 3 \cos(0.3t + \pi/5)$.

Soluzione: La risposta in catena aperta del sistema si pu facilmente determinare a partire dalla trasformata di Laplace dell'ingresso: $R(s) = \frac{4}{s} + 3 \left(\frac{\cos(\pi/5)s - 0.3 \sin(\pi/5)}{s^2 + 0.3^2} \right)$.

L'uscita del sistema quindi data da $Y(s) = KR(s)G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K . Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

Soluzione: vedi figura 4. Soluzione:

$$\begin{aligned} \sigma &= -5.33 \\ \phi &= 0, 120, 240 \\ s^* &= 3.4i \\ K^* &= -209.7 \end{aligned}$$

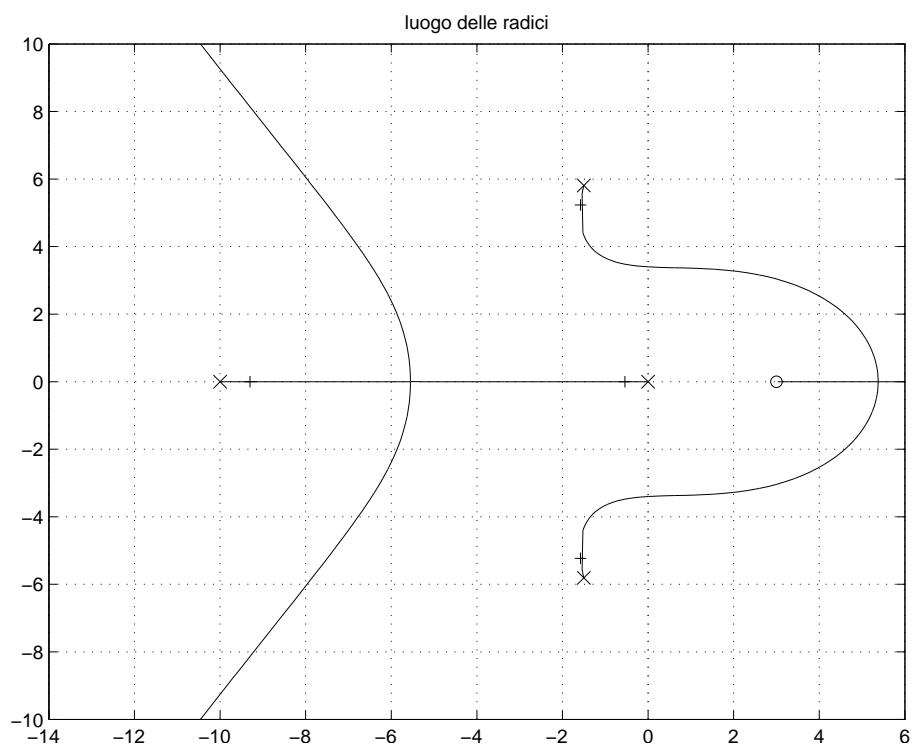


Figura 2: Luogo delle radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2010/11
13 Gennaio 2011 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di “tipo 2” è caratterizzato da:

- 2 poli nulli;
- 2 poli complessi coniugati;
- grado relativo $n - m = 2$.

2. Una funzione di trasferimento con grado del denominatore n e grado del numeratore m si dice *fisicamente realizzabile* se:

- $n = m$;
- $n > m$;
- $n < m$.

3. La Trasformata di Laplace $F(s)$ di una generica funzione reale del tempo $f(t)$ è definita come:

- $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$;
- $F(s) = \int_0^{\infty} f(s) e^{-t} ds$;
- $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{t/s} dt$.

4. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La proprietà di traslazione nel tempo delle trasformate di Laplace afferma che:

- $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{t_0} F(s)$;
- $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-s} F(s)$;
- $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$;
- $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{s/t_0} F(s)$.

5. Un sistema lineare è semplicemente stabile se la sua funzione di trasferimento:

- ha tutti i poli a parte reale positiva;
- ha tutti i poli a parte reale negativa;
- ha tutti i poli a parte reale negativa ed un polo singolo a parte reale nulla.

6. Data una funzione di trasferimento $G(s)$, si definisce *modo dominante*:

- il polo di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assoluto più piccolo;
- il polo di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assoluto più piccolo;
- lo zero di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assoluto più piccolo;
- lo zero di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assoluto più piccolo.

7. Dato uno schema a blocchi in cui Δ è il determinante, \mathcal{P} è l'insieme dei percorsi da l'ingresso a all'uscita b e Δ_i è il grafo parziale relativo al percorso P_i , la trasmittanza T da a a b può essere calcolata come (formula di Mason):

- $T = \Delta \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i$;
- $T = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i$;
- $T = \sum_{i \in \mathcal{P}} \Delta P_i \Delta_i$.

8. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo tre costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:
- il 100% del valore finale;
 - il 95% del valore finale;
 - l'85% del valore finale;
 - il 50% del valore finale.
9. In un sistema del secondo ordine, si definisce *tempo di ritardo* della risposta al gradino il tempo necessario all'uscita:
- per raggiungere il suo valore massimo;
 - per passare dal 10% al 90% del valore finale;
 - per raggiungere il 95% del valore finale;
 - per raggiungere il 50% del valore finale.
10. Il valore finale per $t \rightarrow \infty$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{4s+1}{s(s^2+2)}$ vale:
- $g(\infty) = 0$;
 - $g(\infty) = 1/2$;
 - $g(\infty) = 1$.
11. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+1)}{s^2+4s+64}$ per $\omega \in [0, \infty]$:
- termina nell'origine;
 - presenta un asintoto verticale;
 - si evolve tutto nel primo quadrante.
12. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze dispari di s . È possibile affermare che l'equazione caratteristica:
- ha almeno una radice a parte reale positiva;
 - ha un polo nell'origine;
 - ha lo stesso numero di radici a parte reale strettamente positiva e strettamente negativa;
 - ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine.

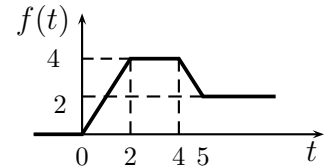
Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il *teorema del baricentro* del luogo delle radici si applica:
- solo a funzioni $G(s)$ razionali fratte e stabili;
 - solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r > 2$;
 - solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$.
14. In corrispondenza di un punto di diramazione nel luogo delle radici di un sistema dinamico $G(s)$:
- vi sono radici multiple nell'equazione caratteristica del sistema;
 - hanno origine rami che dividono il piano complesso in parti uguali;
 - i rami del luogo delle radici sono costituiti da semirette;
 - i rami del luogo delle radici sono perpendicolari fra di loro.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 6 \cos(3t - 12), \quad x_2(t) = \frac{2}{j} (e^{j2t} - e^{-j2t}) + 3 \sin(4\pi t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{6s e^{-4s}}{s^2 + 9}, \quad X_2(s) = \frac{8}{s^2 + 4} + \frac{12\pi}{s^2 + 16\pi^2}, \quad X_3(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2e^{-2s}}{s^2} - \frac{2e^{-4s}}{s^2} + \frac{2e^{-5s}}{s^2}$$

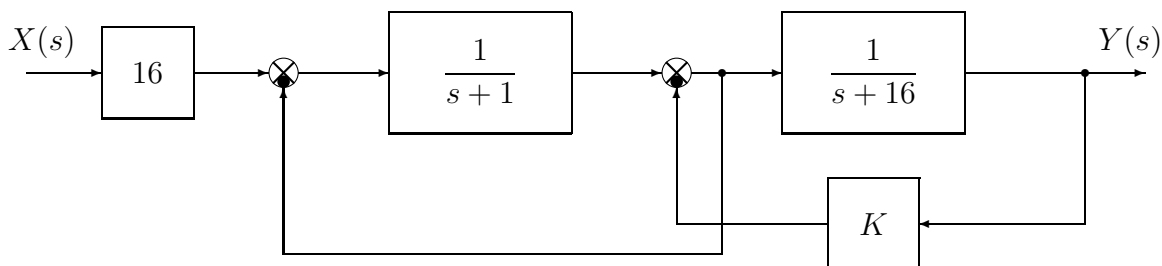
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{s(s+2)^4}, \quad G_2(s) = \frac{s-3}{(s+1)(s+2)(s+3)}, \quad G_3(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-2)(s+3)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{1}{2} \int_0^t \tau^3 e^{-2\tau} d\tau, \quad g_2(t) = -2e^{-t} + 5e^{-2t} - 3e^{-3t}, \quad g_3(t) = \frac{16}{25} e^{2t} + \frac{9}{25} e^{-3t} - \frac{1}{5} t e^{-3t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:

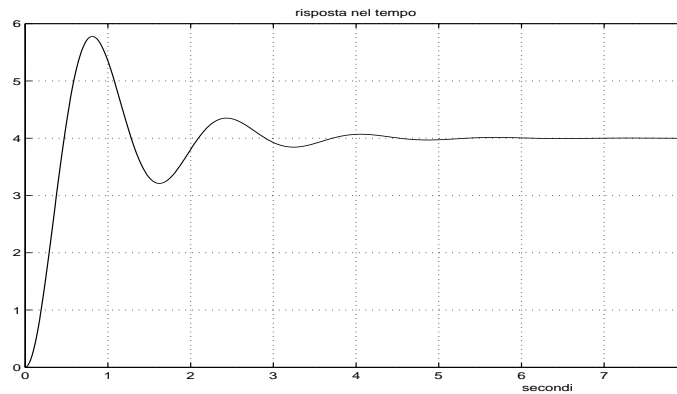


c.1) Posto $K = -16$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{16}{s^2 + 2s + 16}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

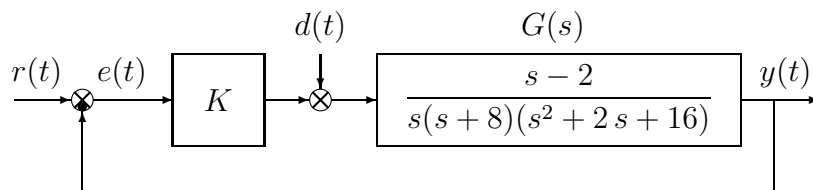
- la parte reale σ dei poli dominanti del sistema; $\sigma = 1$
- la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; $\omega = 3.873$
- la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema; $\omega_n = 4$
- il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; $\delta = 0.25$
- il guadagno statico K_0 ; $K_0 = 1$
- il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino; $T_a = 3$
- l'istante di massima sovraelongazione; $T_M = 0.81$
- la massima sovraelongazione percentuale; $S = 44.4\%$
- il periodo delle oscillazioni. $T = 1.62$



c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 4$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s-2)}{s(s+8)(s^2+2s+16)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 10s^3 + 32s^2 + (128+K)s - 2K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 32 & -2K \\ 3 & 10 & 128+K & \\ 2 & 192-K & -20K & \\ 1 & -K^2+264K+24576 & & \\ 0 & -20K & & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > -72.9, \quad K < 0$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{128+K^*}{10}} = 2.3$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2 d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0) d_0}{1 + K G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.2 d_0$$

Il sistema $G(s)$ è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 5$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K , l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{3}{K_v}$ con $K_v = -\frac{K}{64}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = -\frac{192}{K}.$$

d.4) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K G(s)$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

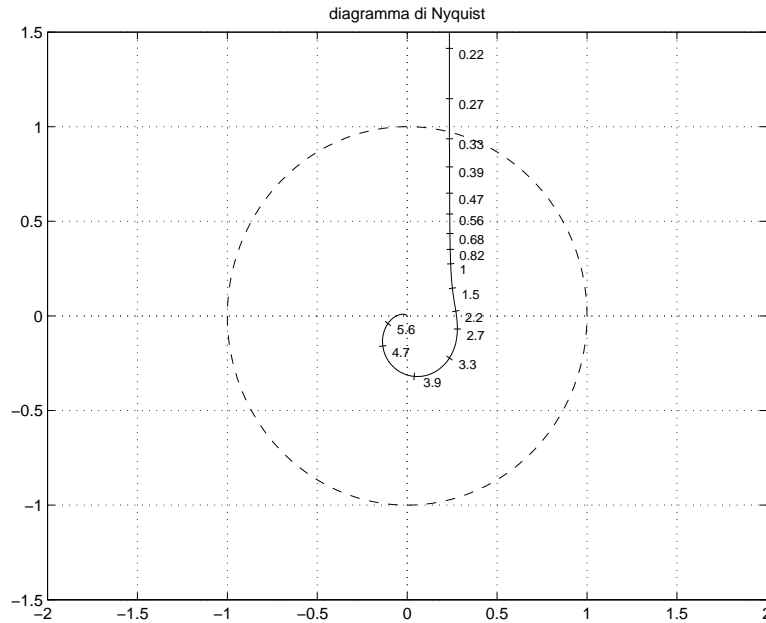


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau \Delta_a = 0.23$.

Esistono due intersezioni $\sigma_{(1,2)}^*$ con l'asse reale. Tali intersezioni si determinano facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma_1^* = -\frac{20}{K^*} = 0.27$$

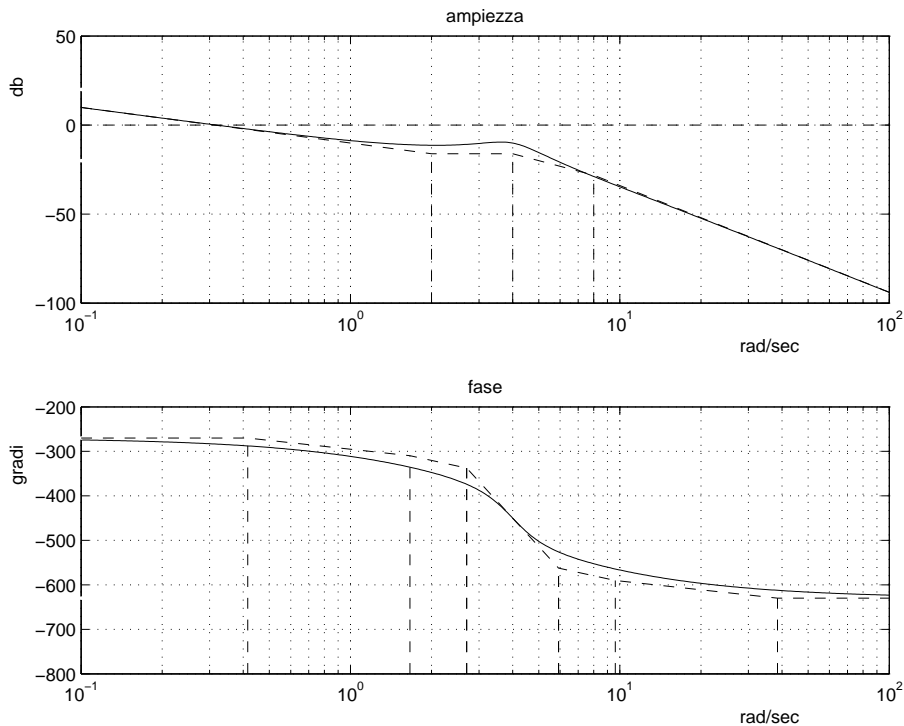
Il valore di σ_2^* si ricava utilizzando la seconda soluzione della riga 1:

$$\sigma_2^* = -0.059$$

I corrispondenti valori della pulsazione sono $\omega_1^* = 2.3$ e $\omega_2^* = 6.8$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.32 \text{ rad/s}$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + 2 \cos(0.4t + \pi/4)$.

Soluzione: La risposta in catena aperta del sistema si pu facilmente determinare a partire dalla trasformata di Laplace dell'ingresso: $R(s) = \frac{5}{s} + 2 \left(\frac{\cos(\pi/4)s - 0.4 \sin(\pi/4)}{s^2 + 0.4^2} \right)$.

L'uscita del sistema quindi data da $Y(s) = KR(s)G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori negativi del parametro K . Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

Soluzione: vedi figura 4. Soluzione:

$$\begin{aligned} \sigma &= -4 \\ \phi &= 0, 120, 240 \\ s^* &= 2.3i \\ K^* &= -72.9 \end{aligned}$$

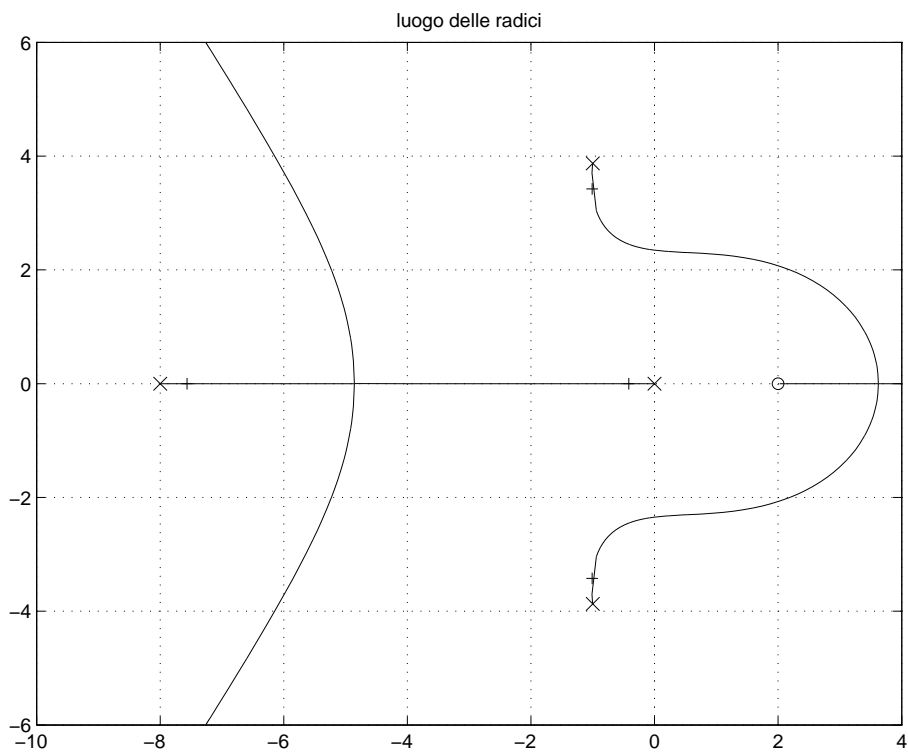


Figura 4: Luogo delle radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2010/11
13 Gennaio 2011 - Domande Teoriche

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di “tipo 2” è caratterizzato da:

- grado relativo $n - m = 2$;
- 2 poli complessi coniugati;
- 2 poli nulli.

2. Una funzione di trasferimento con grado del denominatore n e grado del numeratore m si dice *fisicamente realizzabile* se:

- $n = m$;
- $n < m$;
- $n > m$.

3. La Trasformata di Laplace $F(s)$ di una generica funzione reale del tempo $f(t)$ è definita come:

- $F(s) = \int_0^{\infty} f(s) e^{-t} ds$;
- $F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt$;
- $F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{t/s} dt$;

4. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La proprietà di traslazione nel tempo delle trasformate di Laplace afferma che:

- $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{s/t_0} F(s)$;
- $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-s} F(s)$;
- $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{t_0} F(s)$;
- $\mathcal{L}[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} F(s)$.

5. Un sistema lineare è semplicemente stabile se la sua funzione di trasferimento:

- ha tutti i poli a parte reale negativa ed un polo singolo a parte reale nulla;
- ha tutti i poli a parte reale negativa;
- ha tutti i poli a parte reale positiva.

6. Data una funzione di trasferimento $G(s)$, si definisce *modo dominante*:

- lo zero di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assoluto più piccolo;
- lo zero di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assoluto più piccolo;
- il polo di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assoluto più piccolo;
- il polo di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assoluto più piccolo.

7. Dato uno schema a blocchi in cui Δ è il determinante, \mathcal{P} è l'insieme dei percorsi da l'ingresso a all'uscita b e Δ_i è il grafo parziale relativo al percorso P_i , la trasmittanza T da a a b può essere calcolata come (formula di Mason): determini

- $T = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i$;
- $T = \Delta \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i$;
- $T = \sum_{i \in \mathcal{P}} \Delta P_i \Delta_i$.

8. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo tre costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:
- il 50% del valore finale;
 - l'85% del valore finale;
 - il 95% del valore finale;
 - il 100% del valore finale.
9. In un sistema del secondo ordine, si definisce *tempo di ritardo* della risposta al gradino il tempo necessario all'uscita:
- per raggiungere il suo valore massimo;
 - per raggiungere il 95% del valore finale;
 - per raggiungere il 50% del valore finale;
 - per passare dal 10% al 90% del valore finale.
10. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2s+3}{s^3+1}$ vale:
- $g(0^+) = 0$;
 - $g(0^+) = 1/2$;
 - $g(0^+) = 1$.
11. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+1)}{s^2+4s+64}$ per $\omega \in [0, \infty]$:
- si evolve tutto nel primo quadrante;
 - presenta un asintoto verticale;
 - termina nell'origine.
12. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze dispari di s . È possibile affermare che l'equazione caratteristica:
- ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine;
 - ha almeno una radice a parte reale positiva;
 - ha lo stesso numero di radici a parte reale strettamente positiva e strettamente negativa;
 - ha un polo nell'origine.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il *teorema del baricentro* del luogo delle radici si applica:
- solo a funzioni $G(s)$ razionali fratte e stabili;
 - solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$.
 - solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r > 2$.
14. In corrispondenza di un punto di diramazione nel luogo delle radici di un sistema dinamico $G(s)$:
- i rami del luogo delle radici sono costituiti da semirette;
 - i rami del luogo delle radici sono perpendicolari fra di loro;
 - vi sono radici multiple nell'equazione caratteristica del sistema;
 - hanno origine rami che dividono il piano complesso in parti uguali.