Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10

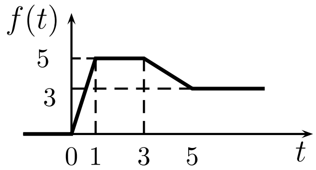
27 Luglio 2010 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

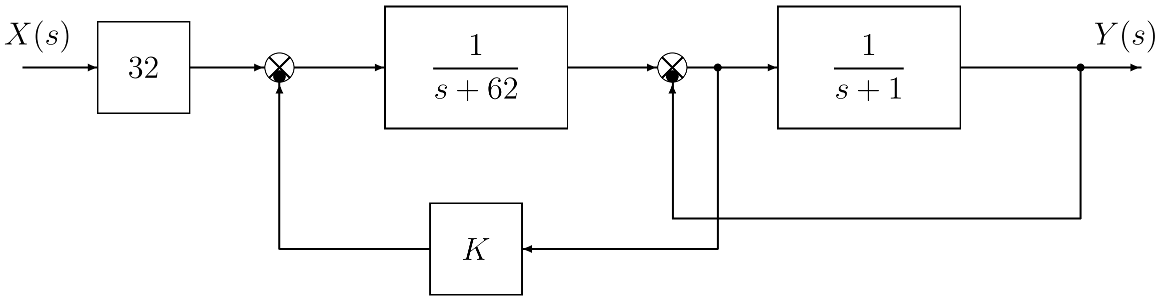
$$x_1(t) = \frac{1}{j}\,(e^{j\,3\,t} - e^{-j\,3\,t}) + 4\,\cos(5\,\pi\,t), \qquad x_2(t) = 6\,\sin(3\,t - 12),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{(s-3)^2}{(s+1)\,(s-4)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{5}{s\,(s+1)^4}, \qquad G_3(s) = \frac{s+4}{(s+1)\,(s-2)\,(s+3)}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -60$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

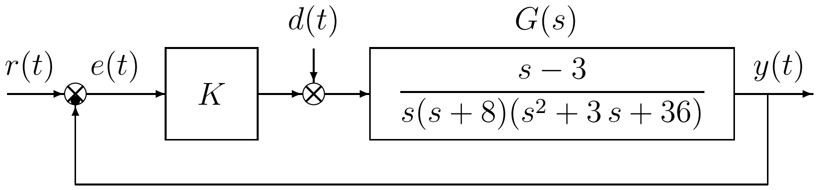
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema;
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema;
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema;
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema;
5. il guadagno statico K_0;
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino;
7. l'istante di massima sovraelongazione;
8. la massima sovraelongazione percentuale;
9. il periodo delle oscillazioni.

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 9$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.1\,d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2\,t$.

d.4) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K\,G(s)$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 50$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 3 + 4\,\cos(0.53\,t + \pi/5)$.
L'uscita del sistema quindi data da $Y(s) = KR(s)G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10

27 Luglio 2010 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. L'equazione differenziale $a_2\,\ddot{y}(t) + a_1\,\dot{y}(t) + a_0\,y(t) + b_1\,\dot{x}(t) + b_0\,x(t) + x(t)\,y(t) = 0$ è:
   - ○ non-lineare;
   - ○ lineare tempo-invariante;
   - ○ lineare tempo-variante.

2. Una funzione di trasferimento con grado del denominatore n e grado del numeratore m si dice *fisicamente realizzabile* se:
   - ○ $n = m$;
   - ○ $n > m$;
   - ○ $n < m$.

3. La Trasformata di Laplace $F(s)$ di una generica funzione reale del tempo $f(t)$ è definita come:
   - ○ $F(s) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}dt$;
   - ○ $F(s) = \int_0^\infty f(s)\,e^{-t}ds$;
   - ○ $F(s) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\,e^{t/s}dt$.

4. Data la funzione del tempo $f(t)$ non nulla solo per $0 \leq t \leq T$, sia $F(s)$ la sua trasformata di Laplace, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La trasformata di Laplace della ripetizione periodica di $f(t)$, $f_p(t + nT) = f(t)$, $\forall n$, $0 \leq t \leq T$ può essere espressa come:
   - ○ $\mathcal{L}[f_p(t)] = \frac{F(s)}{1-e^{-Ts}}$;
   - ○ $\mathcal{L}[f_p(t)] = e^{-Ts}F(s)$;
   - ○ $\mathcal{L}[f_p(t)] = (1 - e^{-Ts})F(s)$;
   - ○ $\mathcal{L}[f_p(t)] = \frac{F(s)}{1+e^{Ts}}$.

5. Un sistema lineare è semplicemente stabile se la sua funzione di trasferimento:
   - ○ ha tutti i poli a parte reale positiva;
   - ○ ha tutti i poli a parte reale negativa;
   - ○ ha tutti i poli a parte reale negativa ed un polo singolo a parte reale nulla.

6. Data una funzione di trasferimento $G(s)$, si definisce *modo dominante*:
   - ○ il polo di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assuluto più piccolo;
   - ○ il polo di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assuluto più piccolo;
   - ○ lo zero di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assuluto più piccolo;
   - ○ lo zero di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assuluto più piccolo.

7. Dato uno schema a blocchi in cui Δ è il determinante, $\mathcal{P}$ è l'insieme dei percorsi da l'ingresso a all'uscita b e Δ_i è il grafo parziale relativo al percorso P_i, la trasmittanza T da a a b può essere calcolata come (formula di Mason):
   - ○ $T = \Delta \sum_{i\in\mathcal{P}} P_i\Delta_i$;
   - ○ $T = \frac{1}{\Delta} \sum_{i\in\mathcal{P}} P_i\Delta_i$;
   - ○ $T = \sum_{i\in\mathcal{P}} \Delta P_i\Delta_i$.

8. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo tre costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:
   - ◯ il 100% del valore finale;
   - ◯ il 95% del valore finale;
   - ◯ l'85% del valore finale;
   - ◯ il 50% del valore finale.

9. In un sistema del secondo ordine, si definisce *tempo di ritardo* della risposta al gradino il tempo necessario all'uscita:
   - ◯ per raggiungere il suo valore massimo;
   - ◯ per passare dal 10% al 90% del valore finale;
   - ◯ per raggiungere il 95% del valore finale;
   - ◯ per raggiungere il 50% del valore finale.

10. Il sistema $G(s) = \frac{e^{-s}(\tau_{z_1}s+1)(\tau_{z_2}s+1)}{s\,(\tau_{p_1}s+1)(\tau_{p_2}s+1)}$ presenta:
    - ◯ margine di fase maggiore di $\pi/2$;
    - ◯ margine di ampiezza infinito;
    - ◯ guadagno statico unitario.

11. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+1)}{s^2+4\,s+64}$ per $\omega \in [0,\, \infty]$:
    - ◯ termina nell'origine;
    - ◯ presenta un asintoto verticale;
    - ◯ si evolve tutto nel primo quadrante.

12. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze dispari di s. È possibile affermare che l'equazione caratteristica:
    - ◯ ha almeno una radice a parte reale positiva;
    - ◯ ha un polo nell'origine;
    - ◯ ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine.

    Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il *teorema del baricentro* del luogo delle radici si applica:
    - ◯ solo a funzioni $G(s)$ razionali fratte e stabili;
    - ◯ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r > 2$;
    - ◯ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$.

14. In corrispondenza di un punto di diramazione nel luogo delle radici di un sistema dinamico $G(s)$:
    - ◯ vi sono radici multiple nell'equazione caratteristica del sistema;
    - ◯ hanno origine rami che dividono il piano complesso in parti uguali;
    - ◯ i rami del luogo delle radici sono costituiti da semirette;
    - ◯ i rami del luogo delle radici sono perpendicolari fra di loro.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10

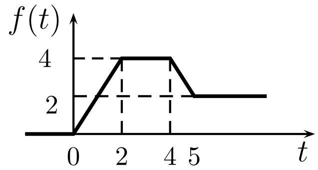
27 Luglio 2010 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

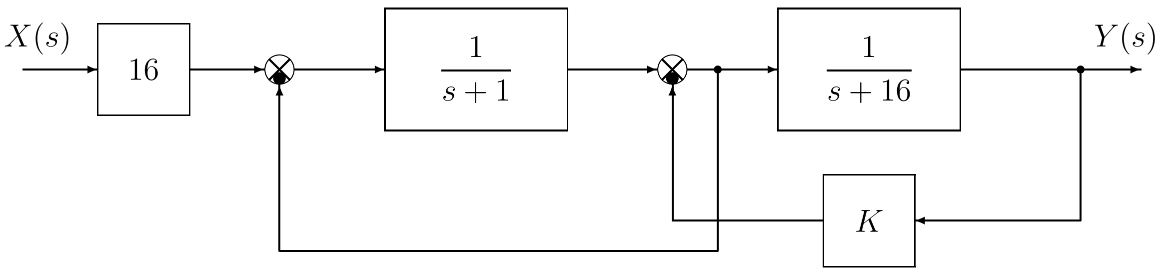
$$x_1(t) = 3\,\cos(6\,t - 12), \qquad x_2(t) = \tfrac{3}{j}\,(e^{j\,2\,t} - e^{-j\,2\,t}) + 2\,\sin(4\,\pi\,t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{2}{s\,(s+3)^4}, \qquad G_2(s) = \frac{s-4}{(s+4)\,(s+3)\,(s+2)}, \qquad G_3(s) = \frac{(s+3)^2}{(s-2)\,(s+5)^2}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -16$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

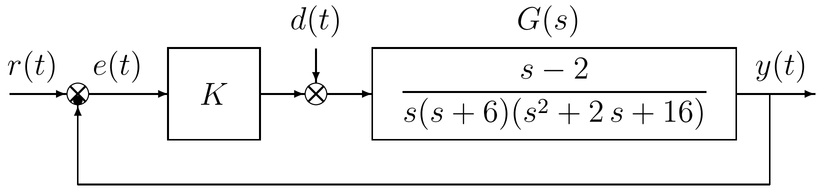
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema;
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema;
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema;
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema;
5. il guadagno statico K_0;
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino;
7. l'istante di massima sovraelongazione;
8. la massima sovraelongazione percentuale;
9. il periodo delle oscillazioni.

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 8$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.

d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2\,d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

d.4) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K\,G(s)$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;

e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 2 + 5\,\cos(0.043\,t + \pi/4)$.
L'uscita del sistema quindi data da $Y(s) = KR(s)G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10
27 Luglio 2010 - Domande Teoriche
Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. L'equazione differenziale $a_2\,\ddot{y}(t) + a_1\,\dot{y}(t) + a_0\,y(t) + b_1\,\dot{x}(t) + b_0\,x(t) + x(t)\,y(t) = 0$ è:
   - ◯ non-lineare;
   - ◯ lineare tempo-variante;
   - ◯ lineare tempo-invariante.
2. Una funzione di trasferimento con grado del denominatore n e grado del numeratore m si dice *fisicamente realizzabile* se:
   - ◯ $n = m$;
   - ◯ $n < m$;
   - ◯ $n > m$.
3. La Trasformata di Laplace $F(s)$ di una generica funzione reale del tempo $f(t)$ è definita come:
   - ◯ $F(s) = \int_0^\infty f(s)\,e^{-t}ds$;
   - ◯ $F(s) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}dt$;
   - ◯ $F(s) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\,e^{t/s}dt$;
4. Data la funzione del tempo $f(t)$ non nulla solo per $0 \le t \le T$, sia $F(s)$ la sua trasformata di Laplace, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La trasformata di Laplace della ripetizione periodica di $f(t)$, $f_p(t+nT) = f(t)$, $\forall n$, $0 \le t \le T$ può essere espressa come:
   - ◯ $\mathcal{L}[f_p(t)] = e^{-Ts}F(s)$;
   - ◯ $\mathcal{L}[f_p(t)] = (1 - e^{-Ts})F(s)$;
   - ◯ $\mathcal{L}[f_p(t)] = \frac{F(s)}{1-e^{-Ts}}$;
   - ◯ $\mathcal{L}[f_p(t)] = \frac{F(s)}{1+e^{Ts}}$.
5. Un sistema lineare è semplicemente stabile se la sua funzione di trasferimento:
   - ◯ ha tutti i poli a parte reale negativa ed un polo singolo a parte reale nulla;
   - ◯ ha tutti i poli a parte reale negativa;
   - ◯ ha tutti i poli a parte reale positiva.
6. Data una funzione di trasferimento $G(s)$, si definisce *modo dominante*:
   - ◯ lo zero di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assuluto più piccolo;
   - ◯ lo zero di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assuluto più piccolo;
   - ◯ il polo di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assuluto più piccolo;
   - ◯ il polo di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assuluto più piccolo.
7. Dato uno schema a blocchi in cui Δ è il determinante, $\mathcal{P}$ è l'insieme dei percorsi da l'ingresso a all'uscita b e Δ_i è il grafo parziale relativo al percorso P_i, la trasmittanza T da a a b può essere calcolata come (formula di Mason): determini
   - ◯ $T = \frac{1}{\Delta}\sum_{i\in\mathcal{P}} P_i\Delta_i$;
   - ◯ $T = \Delta\sum_{i\in\mathcal{P}} P_i\Delta_i$;
   - ◯ $T = \sum_{i\in\mathcal{P}} \Delta P_i\Delta_i$.

8. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo tre costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:

   ◯ il 50% del valore finale;
   ◯ l'85% del valore finale;
   ◯ il 95% del valore finale;
   ◯ il 100% del valore finale.

9. In un sistema del secondo ordine, si definisce *tempo di ritardo* della risposta al gradino il tempo necessario all'uscita:

   ◯ per raggiungere il suo valore massimo;
   ◯ per raggiungere il 95% del valore finale;
   ◯ per raggiungere il 50% del valore finale;
   ◯ per passare dal 10% al 90% del valore finale.

10. Il sistema $G(s) = \frac{e^{-s}(\tau_{z_1}s+1)(\tau_{z_2}s+1)}{s\,(\tau_{p_1}s+1)(\tau_{p_2}s+1)}$ presenta:

    ◯ guadagno statico unitario;
    ◯ margine di fase maggiore di $\pi/2$;
    ◯ margine di ampiezza infinito.

11. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+1)}{s^2+4\,s+64}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

    ◯ si evolve tutto nel primo quadrante;
    ◯ presenta un asintoto verticale;
    ◯ termina nell'origine.

12. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze dispari di s. È possibile affermare che l'equazione caratteristica:

    ◯ ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine;
    ◯ ha almeno una radice a parte reale positiva;
    ◯ ha un polo nell'origine.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il *teorema del baricentro* del luogo delle radici si applica:

    ◯ solo a funzioni $G(s)$ razionali fratte e stabili;
    ◯ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$.
    ◯ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r > 2$.

14. In corrispondenza di un punto di diramazione nel luogo delle radici di un sistema dinamico $G(s)$:

    ◯ i rami del luogo delle radici sono costituiti da semirette;
    ◯ i rami del luogo delle radici sono perpendicolari fra di loro;
    ◯ vi sono radici multiple nell'equazione caratteristica del sistema;
    ◯ hanno origine rami che dividono il piano complesso in parti uguali.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10

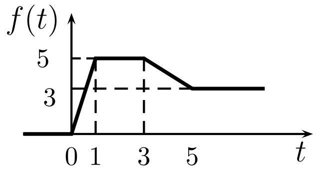
27 Luglio 2010 - Esercizi

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \tfrac{1}{j}\,(e^{j\,3\,t} - e^{-j\,3\,t}) + 4\,\cos(5\,\pi\,t), \qquad x_2(t) = 6\,\sin(3\,t - 12),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{3}{2(s^2+9)} + \frac{4\,s}{s^2+25\,\pi^2}, \qquad X_2(s) = \frac{18\,e^{-4\,s}}{s^2+9}, \qquad X_3(s) = \frac{5}{s^2} - \frac{5\,e^{-s}}{s^2} - \frac{2\,e^{-3\,s}}{s^2} + \frac{2\,e^{-5\,s}}{s^2}$$

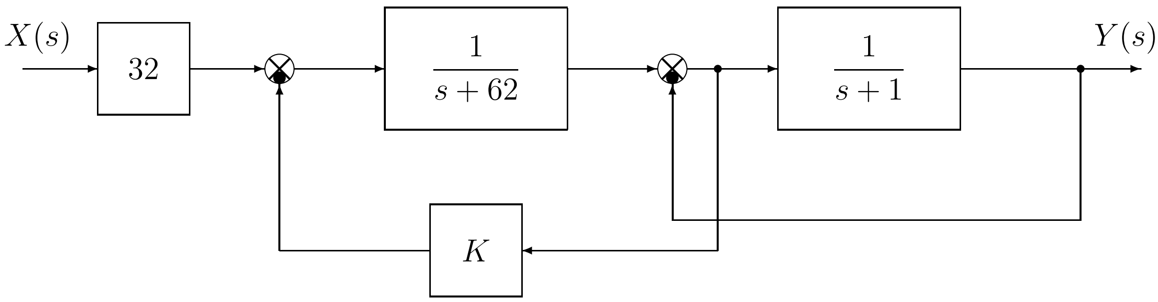
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{(s-3)^2}{(s+1)\,(s-4)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{5}{s\,(s+1)^4}, \qquad G_3(s) = \frac{s+4}{(s+1)\,(s-2)\,(s+3)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{16}{25}\,e^{-t} + \frac{9}{25}\,e^{4\,t} + \frac{1}{5}\,t\,e^{4\,t}, \qquad g_2(t) = \frac{5}{6}\int_0^t \tau^3\,e^{-\tau}\,d\tau, \qquad g_3(t) = -\frac{1}{2}\,e^{-t} + \frac{6}{15}\,e^{2\,t} + \frac{1}{10}\,e^{-3\,t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -60$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{32}{s^2 + 4\,s + 64}$$

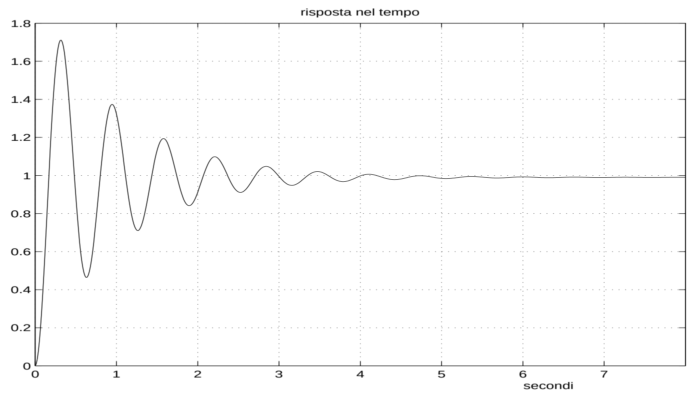
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema; $\sigma = 2$
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; $\omega = 7.746$
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema; $\omega_n = 8$
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; $\delta = 0.25$
5. il guadagno statico K_0; $K_0 = \frac{1}{2}$
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino; $T_a = \frac{3}{2}$
7. l'istante di massima sovraelongazione; $T_M = 0.41$

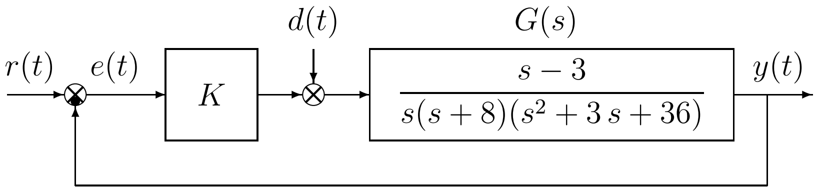
8. la massima sovraelongazione percentuale; $S = 44.4\%$
9. il periodo delle oscillazioni. $T = 0.82$

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 9$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s-3)}{s\,(s+8)\,(s^2+3\,s+36)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 11\,s^3 + 60\,s^2 + (288+K)\,s - 3K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 60 & -3\,K \\ 3 & 11 & 288+K & \\ 2 & 372-K & -33\,K & \\ 1 & -K^2+447\,K+107136 & & \\ 0 & -33\,K & & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > -172.8, \qquad K < 0$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{288+K^*}{11}} = 3.2$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.1\,d_0$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1+K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.1\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 10$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{2}{K_v}$ con $K_v = -\frac{K}{96}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = -\frac{96}{K}.$$

d.4) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K\,G(s)$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

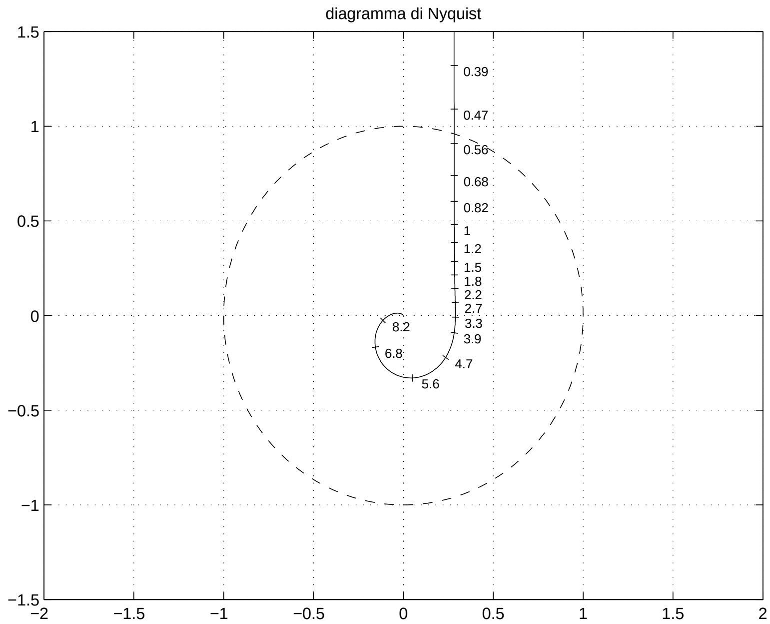


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = 0.28$.

Esiste due intersezioni $\sigma^*_{(1,2)}$ con l'asse reale. Tali intersezioni si determinano facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} = 0.29$$

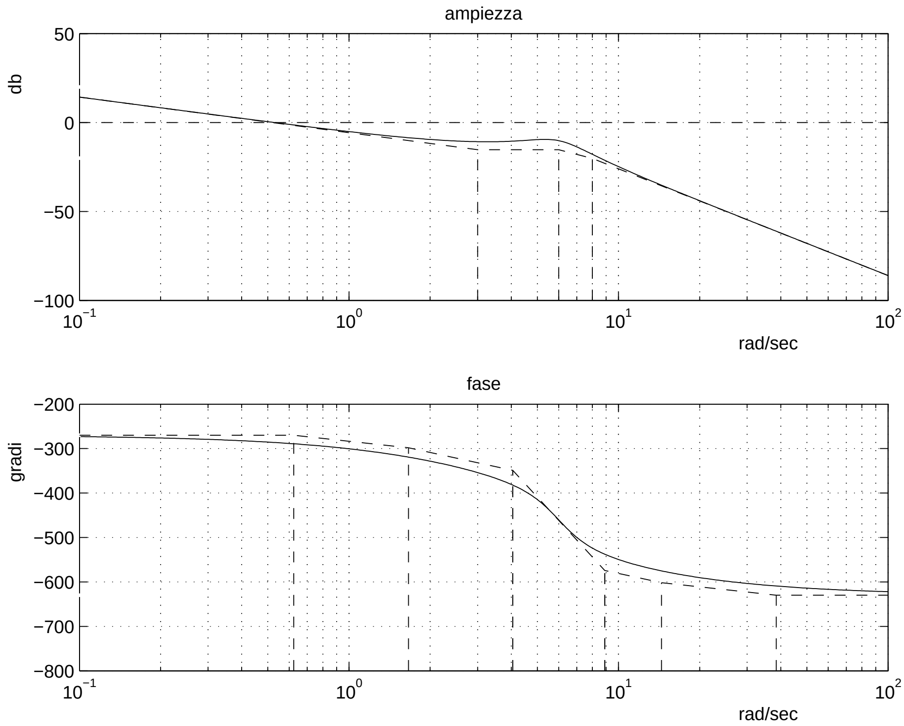
Il valore di σ_2^* si ricava utilizzando la seconda soluzione della riga 1:

$$\sigma_2^* = -0.08$$

I corrispondenti valori della pulsazione sono $\omega_1^* = 3.2$ e $\omega_2^* = 9.1$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 50$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;
Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.53\,rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 3 + 4\,\cos(0.53\,t + \pi/5)$.
Soluzione: La risposta in catena aperta del sistema si pu facilmente determinare a partire dalla trasformata di Laplace dell'ingresso: $R(s) = \dfrac{3}{s} + 4\left(\dfrac{\cos(\pi/5)s - 0.53\sin(\pi/5)}{s^2 + 0.53^2}\right)$
L'uscita del sistema quindi data da $Y(s) = KR(s)G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione: vedi figura 4. Soluzione:

$$\sigma = -2.66$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 9.1\,i$$
$$K^* = 619.8$$

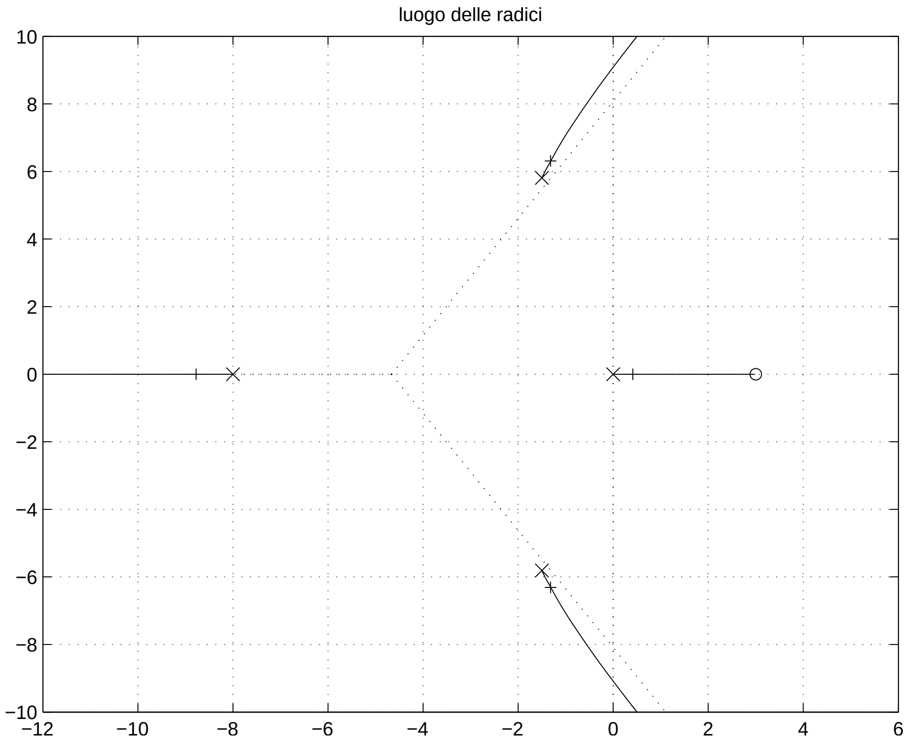


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10

27 Luglio 2010 - Domande Teoriche

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. L'equazione differenziale $a_2\,\ddot{y}(t) + a_1\,\dot{y}(t) + a_0\,y(t) + b_1\,\dot{x}(t) + b_0\,x(t) + x(t)\,y(t) = 0$ è:

   ⊗ non-lineare;
   ○ lineare tempo-invariante;
   ○ lineare tempo-variante.

2. Una funzione di trasferimento con grado del denominatore n e grado del numeratore m si dice *fisicamente realizzabile* se:

   ⊗ $n = m$;
   ⊗ $n > m$;
   ○ $n < m$.

3. La Trasformata di Laplace $F(s)$ di una generica funzione reale del tempo $f(t)$ è definita come:

   ⊗ $F(s) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st}dt$;
   ○ $F(s) = \int_0^\infty f(s)\,e^{-t}ds$;
   ○ $F(s) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\,e^{t/s}dt$.

4. Data la funzione del tempo $f(t)$ non nulla solo per $0 \leq t \leq T$, sia $F(s)$ la sua trasformata di Laplace, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La trasformata di Laplace della ripetizione periodica di $f(t)$, $f_p(t + nT) = f(t)$, $\forall n$, $0 \leq t \leq T$ può essere espressa come:

   ⊗ $\mathcal{L}[f_p(t)] = \frac{F(s)}{1-e^{-Ts}}$;
   ○ $\mathcal{L}[f_p(t)] = e^{-Ts}F(s)$;
   ○ $\mathcal{L}[f_p(t)] = (1 - e^{-Ts})F(s)$;
   ○ $\mathcal{L}[f_p(t)] = \frac{F(s)}{1+e^{Ts}}$.

5. Un sistema lineare è semplicemente stabile se la sua funzione di trasferimento:

   ○ ha tutti i poli a parte reale positiva;
   ○ ha tutti i poli a parte reale negativa;
   ⊗ ha tutti i poli a parte reale negativa ed un polo singolo a parte reale nulla.

6. Data una funzione di trasferimento $G(s)$, si definisce *modo dominante*:

   ○ il polo di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assuluto più piccolo;
   ⊗ il polo di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assuluto più piccolo;
   ○ lo zero di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assuluto più piccolo;
   ○ lo zero di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assuluto più piccolo.

7. Dato uno schema a blocchi in cui Δ è il determinante, $\mathcal{P}$ è l'insieme dei percorsi da l'ingresso a all'uscita b e Δ_i è il grafo parziale relativo al percorso P_i, la trasmittanza T da a a b può essere calcolata come (formula di Mason):

   ○ $T = \Delta \sum_{i\in\mathcal{P}} P_i\Delta_i$;
   ⊗ $T = \frac{1}{\Delta} \sum_{i\in\mathcal{P}} P_i\Delta_i$;
   ○ $T = \sum_{i\in\mathcal{P}} \Delta P_i\Delta_i$.

8. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo tre costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:

   ◯ il 100% del valore finale;
   ⊗ il 95% del valore finale;
   ◯ l'85% del valore finale;
   ◯ il 50% del valore finale.

9. In un sistema del secondo ordine, si definisce *tempo di ritardo* della risposta al gradino il tempo necessario all'uscita:

   ◯ per raggiungere il suo valore massimo;
   ◯ per passare dal 10% al 90% del valore finale;
   ◯ per raggiungere il 95% del valore finale;
   ⊗ per raggiungere il 50% del valore finale.

10. Il sistema $G(s) = \frac{e^{-s}(\tau_{z_1}s+1)(\tau_{z_2}s+1)}{s\,(\tau_{p_1}s+1)(\tau_{p_2}s+1)}$ presenta:

   ◯ margine di fase maggiore di $\pi/2$;
   ◯ margine di ampiezza infinito;
   ◯ guadagno statico unitario.

11. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+1)}{s^2+4\,s+64}$ per $\omega \in [0,\,\infty]$:

   ⊗ termina nell'origine;
   ◯ presenta un asintoto verticale;
   ◯ si evolve tutto nel primo quadrante.

12. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze dispari di s. È possibile affermare che l'equazione caratteristica:

   ◯ ha almeno una radice a parte reale positiva;
   ⊗ ha un polo nell'origine;
   ⊗ ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il *teorema del baricentro* del luogo delle radici si applica:

   ◯ solo a funzioni $G(s)$ razionali fratte e stabili;
   ◯ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r > 2$;
   ⊗ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$.

14. In corrispondenza di un punto di diramazione nel luogo delle radici di un sistema dinamico $G(s)$:

   ⊗ vi sono radici multiple nell'equazione caratteristica del sistema;
   ⊗ hanno origine rami che dividono il piano complesso in parti uguali;
   ◯ i rami del luogo delle radici sono costituiti da semirette;
   ◯ i rami del luogo delle radici sono perpendicolari fra di loro.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10

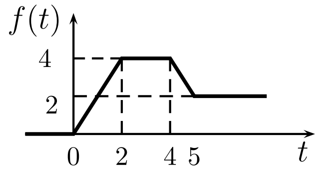
27 Luglio 2010 - Esercizi

Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 3\,\cos(6\,t - 12), \qquad x_2(t) = \tfrac{3}{j}\,(e^{j\,2\,t} - e^{-j\,2\,t}) + 2\,\sin(4\,\pi\,t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{3\,s\,e^{-2s}}{s^2+36}, \qquad X_2(s) = \frac{6}{s^2+4} + \frac{8\,\pi}{s^2+16\,\pi^2}, \qquad X_3(s) = \frac{3}{2\,s^2} - \frac{3\,e^{-2\,s}}{2\,s^2} - \frac{3\,e^{-4\,s}}{s^2} + \frac{3\,e^{-5\,s}}{s^2}$$

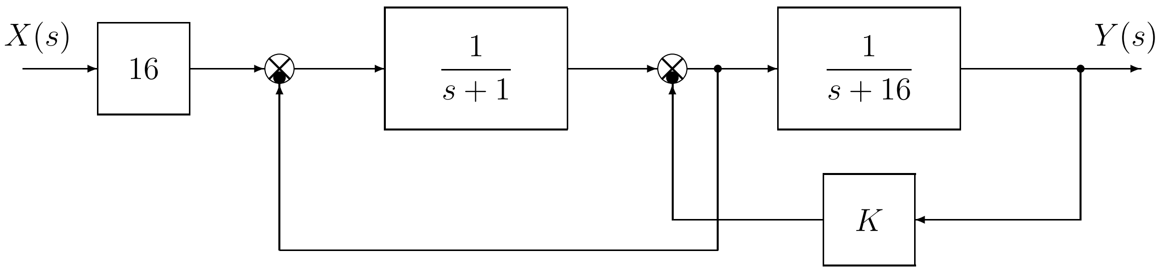
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{2}{s\,(s+3)^4}, \qquad G_2(s) = \frac{s-4}{(s+4)\,(s+3)\,(s+2)}, \qquad G_3(s) = \frac{(s+3)^2}{(s-2)\,(s+5)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{1}{3}\int_0^t \tau^3\,e^{-3\,\tau} d\tau, \qquad g_2(t) = -4\,e^{-4\,t} + 7\,e^{-3\,t} - 3\,e^{-2\,t}, \qquad g_3(t) = \frac{25}{49}\,e^{2\,t} + \frac{24}{49}\,e^{-5\,t} - \frac{4}{7}\,t\,e^{-5\,t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -16$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{16}{s^2 + 2\,s + 16}$$

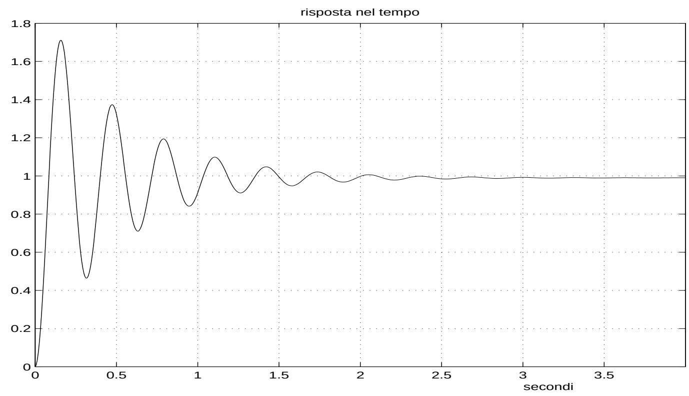
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare:

1. la parte reale σ dei poli dominanti del sistema; $\sigma = 1$
2. la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; $\omega = 3.873$
3. la pulsazione naturale ω_n dei poli dominanti del sistema; $\omega_n = 4$
4. il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; $\delta = 0.25$
5. il guadagno statico K_0; $K_0 = 1$
6. il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino; $T_a = 3$
7. l'istante di massima sovraelongazione; $T_M = 0.81$

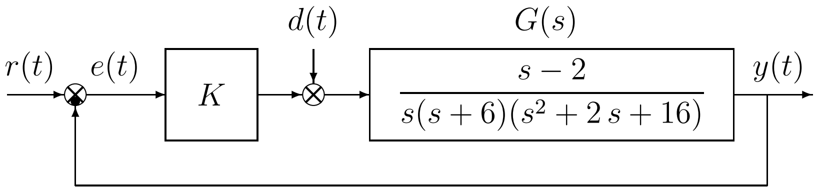
8. la massima sovraelongazione percentuale; $S = 44.4\%$
9. il periodo delle oscillazioni. $T = 1.62$

c.3) Disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 8$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto precedente.



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s-2)}{s\,(s+6)\,(s^2+2\,s+16)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 8\,s^3 + 28\,s^2 + (96+K)\,s - 2K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 28 & -2\,K \\ 3 & 8 & 96+K & \\ 2 & 128-K & -16\,K & \\ 1 & -K^2+160\,K+12288 & & \\ 0 & -16\,K & & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > -56.7, \qquad\qquad K < 0$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{96+K^*}{8}} = 2.2$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2\,d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1 + K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.2\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 5$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{3}{K_v}$ con $K_v = -\frac{K}{48}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = -\frac{144}{K}.$$

d.4) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α e indicare sul diagramma il margine di fase di $K\,G(s)$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

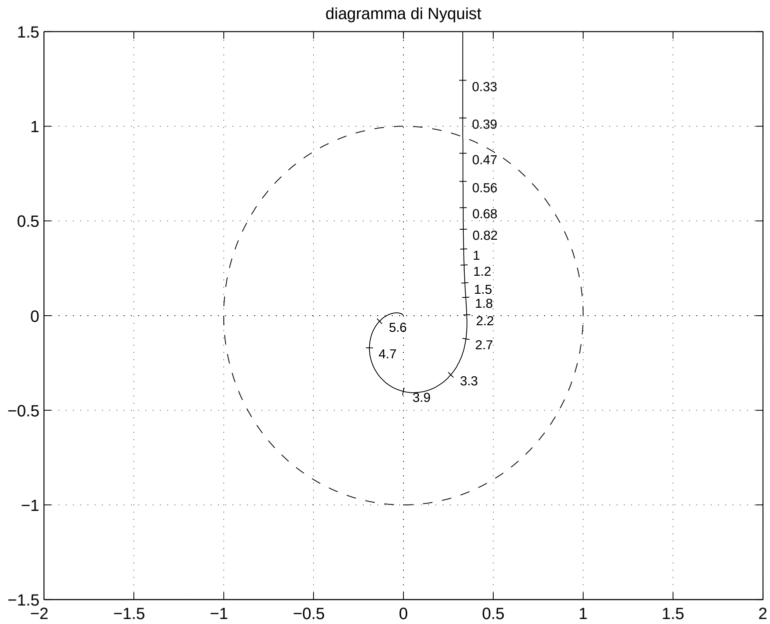


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = 0.33$.

Esiste due intersezioni $\sigma_{(1,2)}^*$ con l'asse reale. Tali intersezioni si determinano facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K^*} = -0.35$$

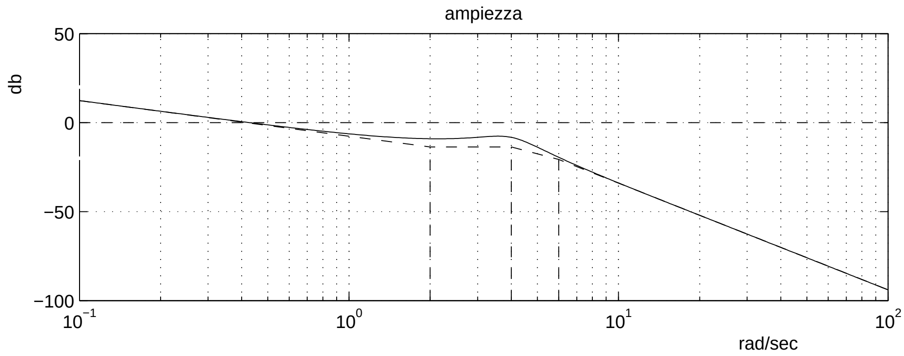
Il valore di σ_2^* si ricava utilizzando la seconda soluzione della riga 1:

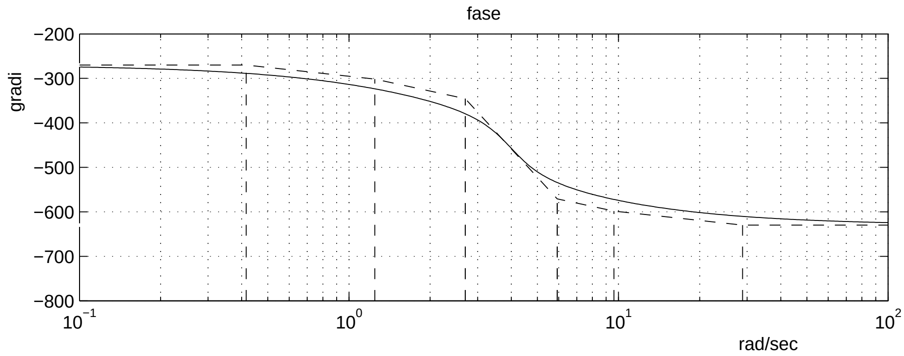
$$\sigma_2^* = -0.09$$

I corrispondenti valori della pulsazione sono $\omega_1^* = 2.2$ e $\omega_2^* = 6.2$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare i diagrammi di Bode asintotici delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;





e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.43\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema in catena aperta quando in ingresso è presente il segnale $r(t) = 2 + 5\,\cos(0.043\,t + \pi/4)$.

Soluzione: La risposta in catena aperta del sistema si pu facilmente determinare a partire dalla trasformata di Laplace dell'ingresso: $R(s) = \dfrac{2}{s} + 5\left(\dfrac{\cos(\pi/4)s - 0.043\sin(\pi/4)}{s^2 + 0.043^2}\right)$

L'uscita del sistema quindi data da $Y(s) = KR(s)G(s)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare:

1. l'angolo con cui rami entrano o escono dalle radici;
2. la posizione qualitativa dei punti di diramazione;
3. il centro degli asintoti;
4. gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo
5. le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione: vedi figura 4. Soluzione:

$$
\begin{gathered}
\sigma = -2 \\
\phi = 60,\ 180,\ 300 \\
s^* = 6.2\,i \\
K^* = 216.7
\end{gathered}
$$

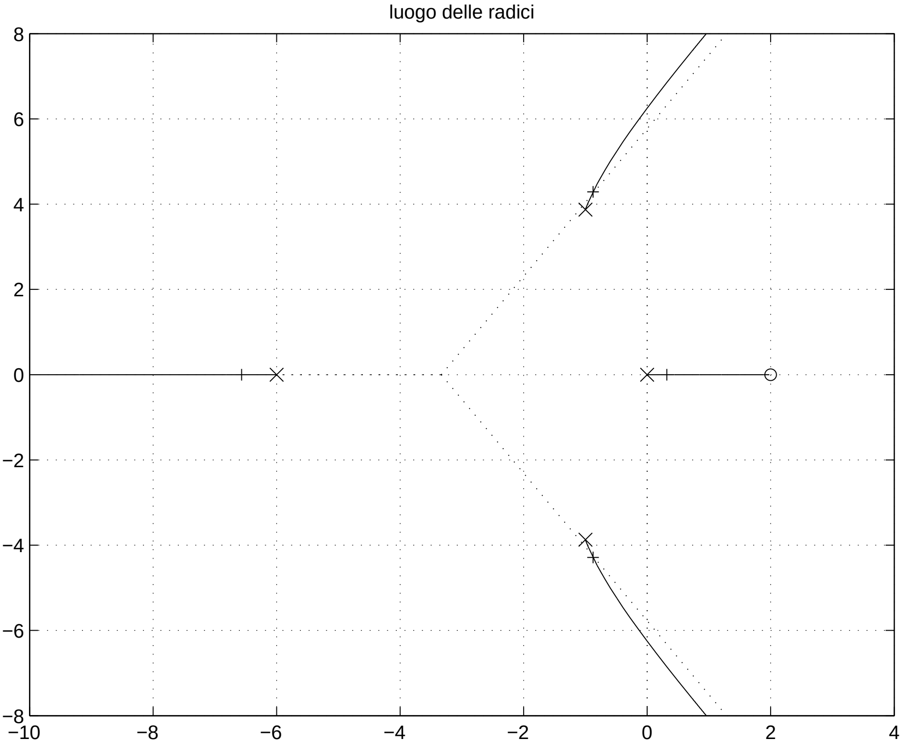


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10

27 Luglio 2010 - Domande Teoriche

Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. L'equazione differenziale $a_2\,\ddot{y}(t) + a_1\,\dot{y}(t) + a_0\,y(t) + b_1\,\dot{x}(t) + b_0\,x(t) + x(t)\,y(t) = 0$ è:

   ⊗ non-lineare;
   ○ lineare tempo-variante;
   ○ lineare tempo-invariante.

2. Una funzione di trasferimento con grado del denominatore n e grado del numeratore m si dice *fisicamente realizzabile* se:

   ⊗ $n = m$;
   ○ $n < m$;
   ⊗ $n > m$.

3. La Trasformata di Laplace $F(s)$ di una generica funzione reale del tempo $f(t)$ è definita come:

   ○ $F(s) = \int_0^\infty f(s)\,e^{-t} ds$;
   ⊗ $F(s) = \int_0^\infty f(t)\,e^{-st} dt$;
   ○ $F(s) = \int_{-\infty}^\infty f(t)\,e^{t/s} dt$;

4. Data la funzione del tempo $f(t)$ non nulla solo per $0 \leq t \leq T$, sia $F(s)$ la sua trasformata di Laplace, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La trasformata di Laplace della ripetizione periodica di $f(t)$, $f_p(t + nT) = f(t)$, $\forall n$, $0 \leq t \leq T$ può essere espressa come:

   ○ $\mathcal{L}[f_p(t)] = e^{-Ts} F(s)$;
   ○ $\mathcal{L}[f_p(t)] = (1 - e^{-Ts}) F(s)$;
   ⊗ $\mathcal{L}[f_p(t)] = \frac{F(s)}{1 - e^{-Ts}}$;
   ○ $\mathcal{L}[f_p(t)] = \frac{F(s)}{1 + e^{Ts}}$.

5. Un sistema lineare è semplicemente stabile se la sua funzione di trasferimento:

   ⊗ ha tutti i poli a parte reale negativa ed un polo singolo a parte reale nulla;
   ○ ha tutti i poli a parte reale negativa;
   ○ ha tutti i poli a parte reale positiva.

6. Data una funzione di trasferimento $G(s)$, si definisce *modo dominante*:

   ○ lo zero di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assuluto più piccolo;
   ○ lo zero di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assuluto più piccolo;
   ○ il polo di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assuluto più piccolo;
   ⊗ il polo di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assuluto più piccolo.

7. Dato uno schema a blocchi in cui Δ è il determinante, $\mathcal{P}$ è l'insieme dei percorsi da l'ingresso a all'uscita b e Δ_i è il grafo parziale relativo al percorso P_i, la trasmittanza T da a a b può essere calcolata come (formula di Mason): determini

   ⊗ $T = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i$;
   ○ $T = \Delta \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i$;
   ○ $T = \sum_{i \in \mathcal{P}} \Delta P_i \Delta_i$.

8. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo tre costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:

   ○ il 50% del valore finale;
   ○ l'85% del valore finale;
   ⊗ il 95% del valore finale;
   ○ il 100% del valore finale.

9. In un sistema del secondo ordine, si definisce *tempo di ritardo* della risposta al gradino il tempo necessario all'uscita:

   ○ per raggiungere il suo valore massimo;
   ○ per raggiungere il 95% del valore finale;
   ⊗ per raggiungere il 50% del valore finale;
   ○ per passare dal 10% al 90% del valore finale.

10. Il sistema $G(s) = \frac{e^{-s}(\tau_{z_1}s+1)(\tau_{z_2}s+1)}{s\,(\tau_{p_1}s+1)(\tau_{p_2}s+1)}$ presenta:

    ○ guadagno statico unitario;
    ○ margine di fase maggiore di $\pi/2$;
    ○ margine di ampiezza infinito.

11. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{(s+1)}{s^2+4\,s+64}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

    ○ si evolve tutto nel primo quadrante;
    ○ presenta un asintoto verticale;
    ⊗ termina nell'origine.

12. Si consideri un'equazione caratteristica nella quale compaiono solamente le potenze dispari di s. È possibile affermare che l'equazione caratteristica:

    ⊗ ha soluzioni simmetriche rispetto all'origine;
    ○ ha almeno una radice a parte reale positiva;
    ⊗ ha un polo nell'origine.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il *teorema del baricentro* del luogo delle radici si applica:

    ○ solo a funzioni $G(s)$ razionali fratte e stabili;
    ⊗ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$.
    ○ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r > 2$.

14. In corrispondenza di un punto di diramazione nel luogo delle radici di un sistema dinamico $G(s)$:

    ○ i rami del luogo delle radici sono costituiti da semirette;
    ○ i rami del luogo delle radici sono perpendicolari fra di loro;
    ⊗ vi sono radici multiple nell'equazione caratteristica del sistema;
    ⊗ hanno origine rami che dividono il piano complesso in parti uguali.