Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10

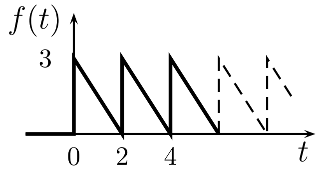
17 Aprile 2010 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

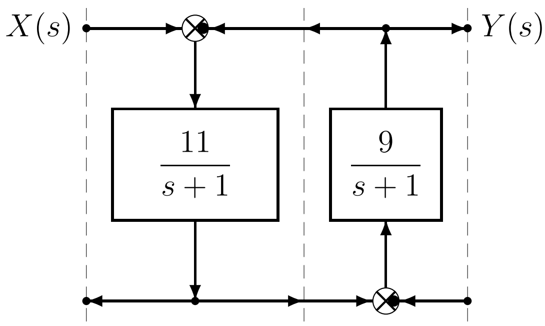
$$x_1(t) = \tfrac{t^2}{4}\, e^{-3\,t} + 5\,\sin(\pi\, t), \qquad x_2(t) = 2\,\cos(3\,t-9),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{-2}{(s+4)\,(s-3)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{4}{(s+3)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{s-2}{(s+6)\,(s-1)\,(s+5)}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

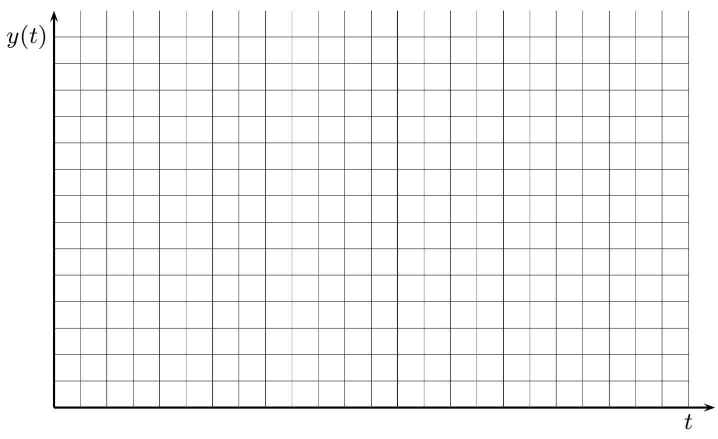
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

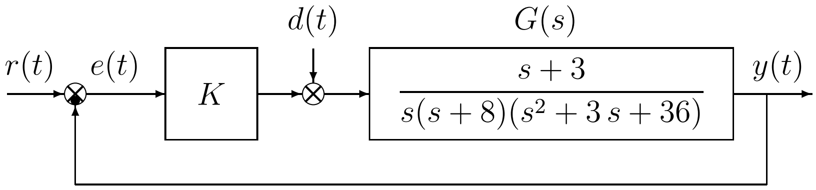
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 1$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



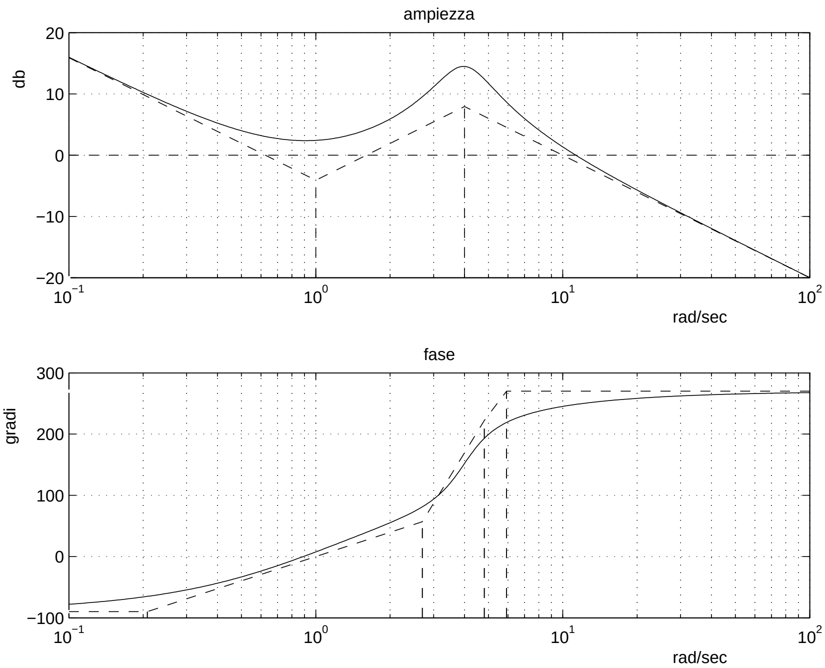
d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.4\, d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\, t$.

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\, G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:



e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = 5 \cos(4\, t + \pi/3)$;

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

$G(s) =$

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10
17 Aprile 2010 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. L'equazione differenziale $a_3(t)\,\dddot{y}(t) + a_2(t)\,\ddot{y}(t) + a_1(t)\,\dot{y}(t) + a_0(t)\,y(t) = b_1(t)\,\dot{x}(t) + b_0(t)\,x(t)$ è:
   - ◯ non-lineare;
   - ◯ lineare tempo-invariante;
   - ◯ lineare tempo-variante.

2. Una funzione di trasferimento con grado del denominatore n e grado del numeratore m si dice *fisicamente realizzabile* se:
   - ◯ $n = m$;
   - ◯ $n > m$;
   - ◯ $n < m$.

3. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La proprietà di traslazione nel tempo delle trasformate di Laplace afferma che:
   - ◯ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{t_0}F(s)$;
   - ◯ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-s}F(s)$;
   - ◯ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-t_0 s}F(s)$;
   - ◯ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{s/t_0}F(s)$.

4. Un sistema lineare è asintoticamente stabile se e solo se i poli della sua funzione di trasferimento:
   - ◯ hanno tutti parte reale positiva;
   - ◯ hanno tutti parte reale negativa;
   - ◯ hanno parte reale negativa o nulla con moltiplicità maggiore di uno;
   - ◯ hanno parte reale negativa o nulla con moltiplicità unitaria.

5. Data una funzione di trasferimento $G(s)$, si definisce *modo dominante*:
   - ◯ il polo di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assuluto più piccolo;
   - ◯ il polo di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assuluto più piccolo;
   - ◯ lo zero di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assuluto più piccolo;
   - ◯ lo zero di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assuluto più piccolo.

6. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo tre costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:
   - ◯ il 100% del valore finale;
   - ◯ il 95% del valore finale;
   - ◯ l'85% del valore finale;
   - ◯ il 50% del valore finale.

7. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+16\,s+64}$;

$$T_a =$$

8. L'istante di massima sovraelongazione T_m della risposta al gradino di un sistema lineare del secondo ordine, stabile, privo di zeri e caratterizzato da due poli complessi coniugati $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$ è:

   - ◯ $T_m = \frac{\pi}{\sigma}$;
   - ◯ $T_m = \frac{\pi}{\omega}$;
   - ◯ $T_m = \frac{\pi}{\sigma\omega}$.

9. La massima sovraelongazione percentuale S del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+4}$ in risposta ad un ingresso a gradino è:

   - ◯ $S = 0\,\%$;
   - ◯ $S = 20\,\%$;
   - ◯ $S = 50\,\%$;
   - ◯ $S = 100\,\%$.

10. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    - ◯ una pendenza di $0\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    - ◯ una pendenza di $-60\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

11. Per un sistema del secondo ordine stabile e privo di zeri, il legame che lega la massima sovraelongazione S al coefficiente di smorazmento δ è:

    - ◯ $S = 100\, e^{\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
    - ◯ $S = 100\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
    - ◯ $S = 100\, e^{\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$;
    - ◯ $S = 100\, e^{-\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$.

12. Sia $G(s)$ una funzione razionale fratta in s. La scomposizione in fratti semplici della funzione $G(s)$ mediante il metodo dei residui:

    - ◯ è sempre possibile;
    - ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è propria;
    - ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è strettamente propria.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il *teorema del baricentro* del luogo delle radici si applica:

    - ◯ solo a funzioni $G(s)$ razionali fratte e stabili;
    - ◯ anche a funzioni $G(s)$ trascendenti;
    - ◯ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r > 2$;
    - ◯ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$.

14. Dato un sistema con grado relativo r, il suo luogo delle radici presenta almeno un asintoto verticale se:

    - ◯ $r = 2$ e $K > 0$;
    - ◯ $r = 2$ e $K < 0$;
    - ◯ $r = 4$ e $K > 0$;
    - ◯ $r = 4$ e $K < 0$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10

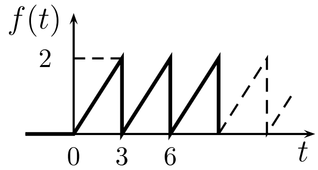
17 Aprile 2010 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

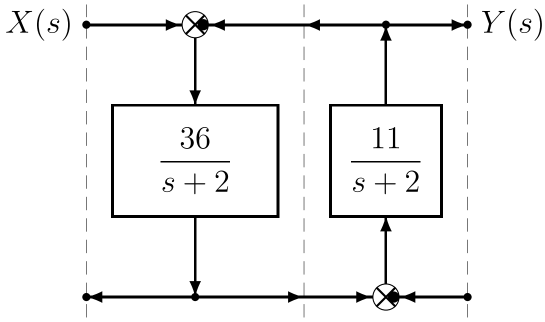
$$x_1(t) = 6\,\sin(4\,t - 12), \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{3}\,t^4\,e^{-4\,t} + 5\,\cos(7\,\pi\,t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{(s+5)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{s+3}{(s-5)\,(s-2)\,(s+1)}, \qquad G_3(s) = \frac{1}{(s-2)\,(s+3)^2}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

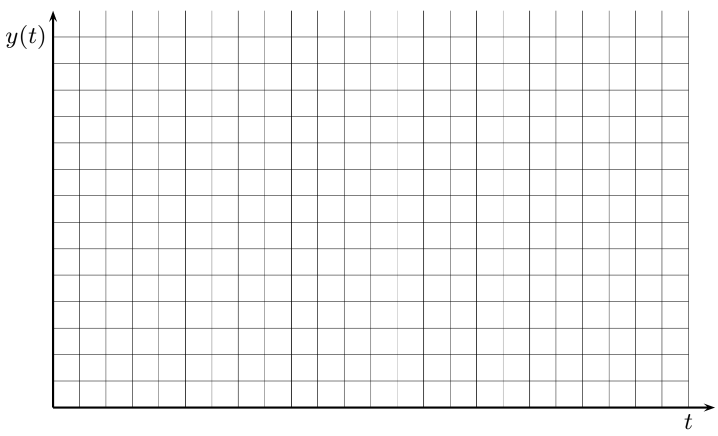
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

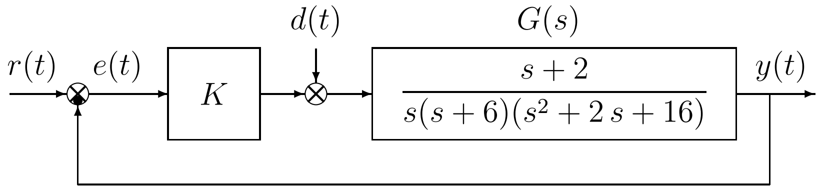
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 1$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



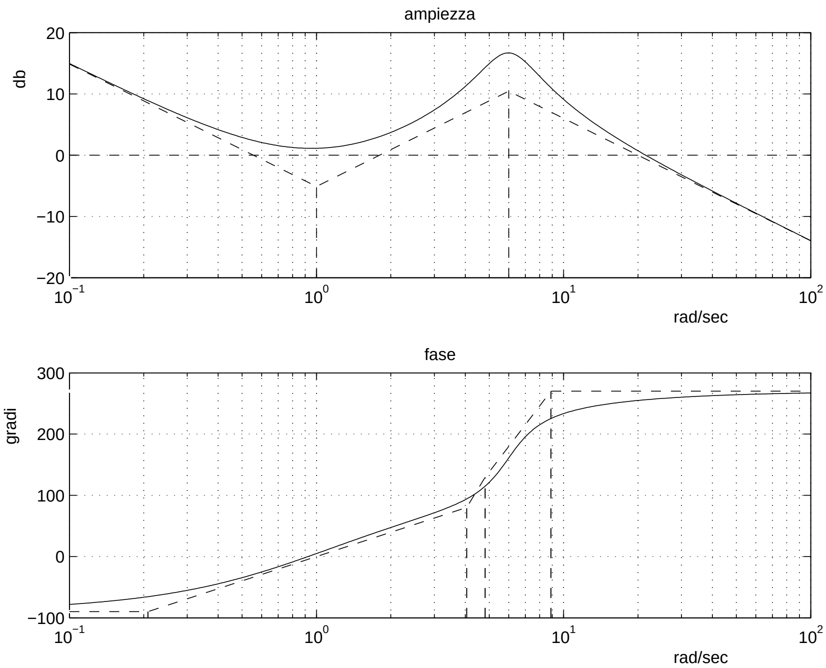
d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.5\, d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 4\, t$.

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\, G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:



e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = 3\cos(6\, t + \pi/2)$;

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

$G(s) =$

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10
17 Aprile 2010 - Domande Teoriche
Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. L'equazione differenziale $a_3(t)\,\dddot{y}(t) + a_2(t)\,\ddot{y}(t) + a_1(t)\,\dot{y}(t) + a_0(t)\,y(t) = b_1(t)\,\dot{x}(t) + b_0(t)\,x(t)$ è:
   - ◯ non-lineare;
   - ◯ lineare tempo-variante;
   - ◯ lineare tempo-invariante.
2. Una funzione di trasferimento con grado del denominatore n e grado del numeratore m si dice *fisicamente realizzabile* se:
   - ◯ $n = m$;
   - ◯ $n < m$;
   - ◯ $n > m$.
3. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La proprietà di traslazione nel tempo delle trasformate di Laplace afferma che:
   - ◯ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{s/t_0}F(s)$;
   - ◯ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-s}F(s)$;
   - ◯ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{t_0}F(s)$;
   - ◯ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-t_0 s}F(s)$.
4. Un sistema lineare è asintoticamente stabile se e solo se i poli della sua funzione di trasferimento:
   - ◯ hanno parte reale negativa;
   - ◯ hanno parte reale positiva;
   - ◯ hanno parte reale negativa o nulla con moltiplicità maggiore di uno;
   - ◯ hanno parte reale negativa o nulla con moltiplicità unitaria.
5. Data una funzione di trasferimento $G(s)$, si definisce *modo dominante*:
   - ◯ lo zero di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assuluto più piccolo;
   - ◯ lo zero di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assuluto più piccolo;
   - ◯ il polo di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assuluto più piccolo;
   - ◯ il polo di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assuluto più piccolo.
6. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo tre costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:
   - ◯ il 50% del valore finale;
   - ◯ l'85% del valore finale;
   - ◯ il 95% del valore finale;
   - ◯ il 100% del valore finale.
7. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+8\,s+64}$;

$$T_a =$$

8. L'istante di massima sovraelongazione T_m della risposta al gradino di un sistema lineare del secondo ordine, stabile, privo di zeri e caratterizzato da due poli complessi coniugati $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$ è:

   - ◯ $T_m = \frac{\pi}{\omega}$;
   - ◯ $T_m = \frac{\pi}{\sigma}$;
   - ◯ $T_m = \frac{\pi}{\sigma\omega}$.

9. La massima sovraelongazione percentuale S del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+4}$ in risposta ad un ingresso a gradino è:

   - ◯ $S = 100\,\%$;
   - ◯ $S = 50\,\%$;
   - ◯ $S = 20\,\%$;
   - ◯ $S = 0\,\%$.

10. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    - ◯ una pendenza di $-60\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    - ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    - ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una pendenza di $0\,db/decade$ per $\omega \to 0$.

11. Per un sistema del secondo ordine stabile e privo di zeri, il legame che lega la massima sovraelongazione S al coefficiente di smorazmento δ è:

    - ◯ $S = 100\,e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
    - ◯ $S = 100\,e^{\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
    - ◯ $S = 100\,e^{-\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$;
    - ◯ $S = 100\,e^{\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$.

12. Sia $G(s)$ una funzione razionale fratta in s. La scomposizione in fratti semplici della funzione $G(s)$ mediante il metodo dei residui:

    - ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è strettamente propria;
    - ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è propria;
    - ◯ è sempre possibile.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il *teorema del baricentro* del luogo delle radici si applica:

    - ◯ anche a funzioni $G(s)$ trascendenti;
    - ◯ solo a funzioni $G(s)$ razionali fratte e stabili;
    - ◯ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$.
    - ◯ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r > 2$.

14. Dato un sistema con grado relativo r, il suo luogo delle radici presenta almeno un asintoto verticale se:

    - ◯ $r = 2$ e $K < 0$;
    - ◯ $r = 2$ e $K > 0$;
    - ◯ $r = 4$ e $K < 0$;
    - ◯ $r = 4$ e $K > 0$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10

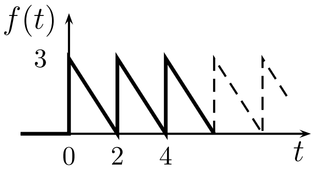
17 Aprile 2010 - Esercizi

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \tfrac{t^2}{4}\, e^{-3\,t} + 5\,\sin(\pi\, t), \qquad x_2(t) = 2\,\cos(3\,t - 9),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{1}{2}\frac{1}{(s+3)^3} + \frac{5\,\pi}{s^2+\pi^2}, \qquad X_2(s) = \frac{2\,s\,e^{-3s}}{s^2+9}, \quad X_3(s) = \frac{3}{s(1-e^{-2\,s})}\left[1 + \frac{e^{-2\,s}-1}{2\,s}\right]$$

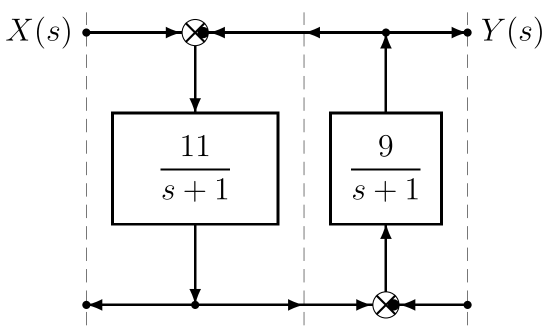
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{-2}{(s+4)\,(s-3)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{4}{(s+3)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{s-2}{(s+6)\,(s-1)\,(s+5)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{2}{49}\,e^{-4\,t} + \frac{2}{49}\,e^{3\,t} - \frac{2}{7}\,t\,e^{3\,t}, \qquad g_2(t) = 2\,t^2\,e^{-3\,t}, \qquad g_3(t) = -\frac{8}{7}\,e^{-6\,t} - \frac{1}{42}\,e^{t} + \frac{7}{6}\,e^{-5\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



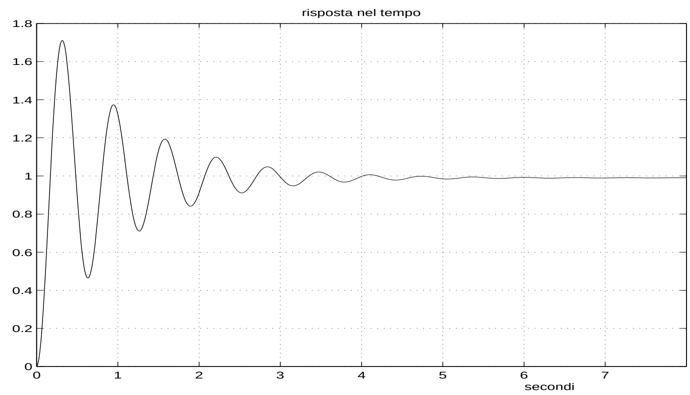
c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{99}{s^2 + 2\,s + 100}$$

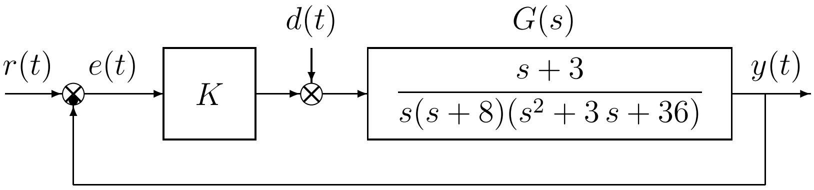
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

1) $\sigma = -1$	3) $\omega_n = 10$	5) $K_0 = 0.99$
2) $\omega = 9.9$	4) $\delta = 0.1$	6) $T_a = 3$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 1$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+\frac{K(s+3)}{s\,(s+8)\,(s^2+3\,s+36)}=0 \qquad \rightarrow \qquad s^4+11\,s^3+60\,s^2+(288+K)\,s+3K=0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 60 & 3\,K \\
3 & 11 & 288+K & \\
2 & 372-K & 33\,K & \\
1 & -K^2-279\,K+107136 & & \\
0 & 33\,K & &
\end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K>0, \qquad\qquad K<216.3$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^*=216.3$ è:

$$\omega^*=\sqrt{\frac{288+K^*}{11}}=6.77$$

d.2) Posto $r(t)=0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t)=d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty=0.4\,d_0$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t)=d_0$ è

$$y_\infty=\frac{G(0)\,d_0}{1+K\,G(0)}=\frac{d_0}{K}=0.4\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0)=\infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K=2.5$.

d.3) Posto $d(t)=0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t)=3\,t$.

<u>Soluzione</u>: L'errore a regime $e_\infty=\frac{3}{K_v}$ con $K_v=\frac{K}{96}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty=\frac{288}{K}.$$

d.4) Posto $K=1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

<u>Soluzione</u>: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega\in[0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a=0.0013$.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^*=-\frac{1}{K^*}=-0.0046$$

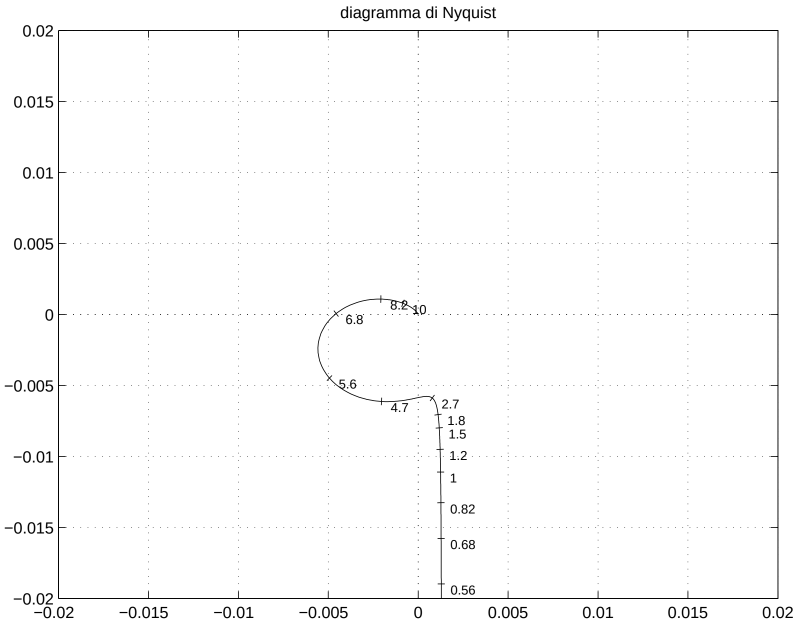
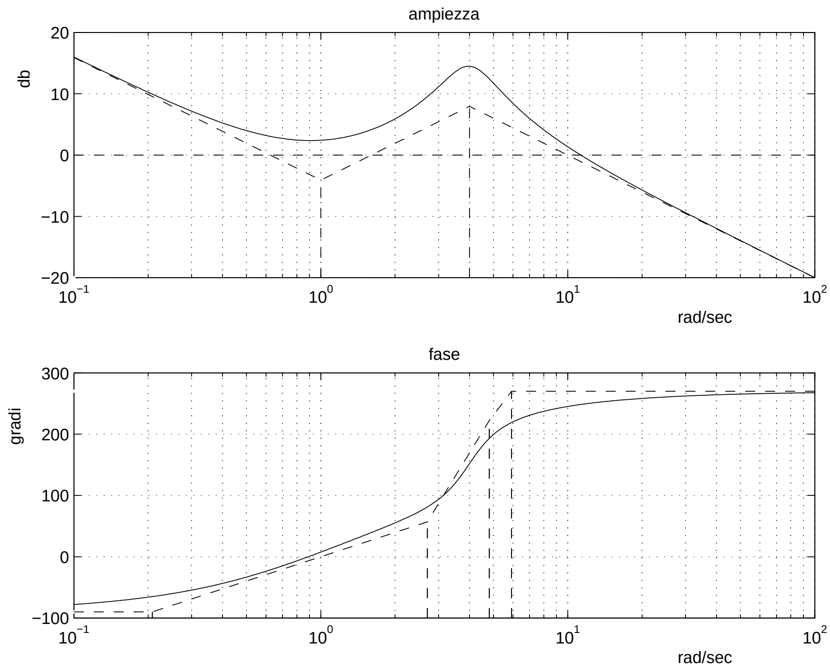


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il corrispondente valore di ω^* è 6.771 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 216.3$.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:



e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:
$x(t) = 5\cos(4\,t + \pi/3)$;

$y_\infty(t) = 28.12\cos(4\,t + 4\,\pi/3)$

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

$$G(s) = \frac{10\,(s+1)^2}{s\,(s^2 - 2\,s + 16)}$$

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. <u>Soluzione</u>: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

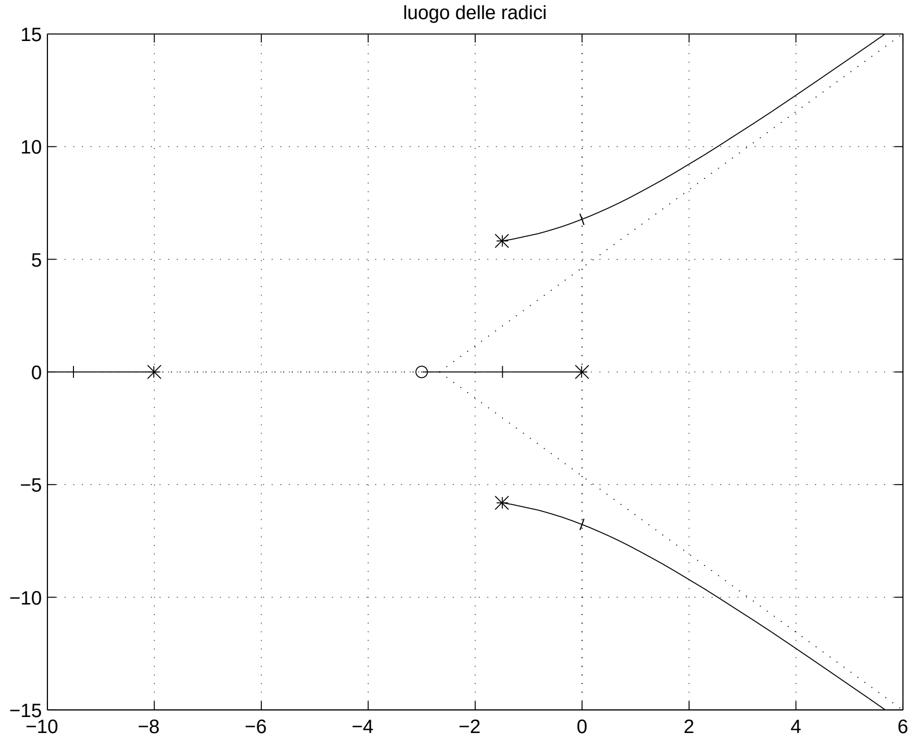


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

<u>Soluzione</u>:

$$\sigma = -3$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 6.771\, i$$
$$K^* = 216.3$$

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10
17 Aprile 2010 - Domande Teoriche
Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. L'equazione differenziale $a_3(t)\,\dddot{y}(t) + a_2(t)\,\ddot{y}(t) + a_1(t)\,\dot{y}(t) + a_0(t)\,y(t) = b_1(t)\,\dot{x}(t) + b_0(t)\,x(t)$ è:
   - ○ non-lineare;
   - ○ lineare tempo-invariante;
   - ⊗ lineare tempo-variante.
2. Una funzione di trasferimento con grado del denominatore n e grado del numeratore m si dice *fisicamente realizzabile* se:
   - ⊗ $n = m$;
   - ⊗ $n > m$;
   - ○ $n < m$.
3. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La proprietà di traslazione nel tempo delle trasformate di Laplace afferma che:
   - ○ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{t_0}F(s)$;
   - ○ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-s}F(s)$;
   - ⊗ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-t_0 s}F(s)$;
   - ○ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{s/t_0}F(s)$.
4. Un sistema lineare è asintoticamente stabile se e solo se i poli della sua funzione di trasferimento:
   - ○ hanno tutti parte reale positiva;
   - ⊗ hanno tutti parte reale negativa;
   - ○ hanno parte reale negativa o nulla con moltiplicità maggiore di uno;
   - ○ hanno parte reale negativa o nulla con moltiplicità unitaria.
5. Data una funzione di trasferimento $G(s)$, si definisce *modo dominante*:
   - ○ il polo di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assuluto più piccolo;
   - ⊗ il polo di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assuluto più piccolo;
   - ○ lo zero di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assuluto più piccolo;
   - ○ lo zero di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assuluto più piccolo.
6. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo tre costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:
   - ○ il 100% del valore finale;
   - ⊗ il 95% del valore finale;
   - ○ l'85% del valore finale;
   - ○ il 50% del valore finale.
7. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+16\,s+64}$;

$$T_a = \frac{3}{8}$$

8. L'istante di massima sovraelongazione T_m della risposta al gradino di un sistema lineare del secondo ordine, stabile, privo di zeri e caratterizzato da due poli complessi coniugati $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$ è:
   - ○ $T_m = \frac{\pi}{\sigma}$;
   - ⊗ $T_m = \frac{\pi}{\omega}$;
   - ○ $T_m = \frac{\pi}{\sigma\omega}$.
9. La massima sovraelongazione percentuale S del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+4}$ in risposta ad un ingresso a gradino è:
   - ○ $S = 0\,\%$;
   - ○ $S = 20\,\%$;
   - ○ $S = 50\,\%$;
   - ⊗ $S = 100\,\%$.
10. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:
    - ○ una pendenza di $0\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ⊗ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ○ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    - ⊗ una pendenza di $-60\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.
11. Per un sistema del secondo ordine stabile e privo di zeri, il legame che lega la massima sovraelongazione S al coefficiente di smorazmento δ è:
    - ○ $S = 100\, e^{\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
    - ⊗ $S = 100\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
    - ○ $S = 100\, e^{\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$;
    - ○ $S = 100\, e^{-\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$.
12. Sia $G(s)$ una funzione razionale fratta in s. La scomposizione in fratti semplici della funzione $G(s)$ mediante il metodo dei residui:
    - ○ è sempre possibile;
    - ○ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è propria;
    - ⊗ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è strettamente propria.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il *teorema del baricentro* del luogo delle radici si applica:
    - ○ solo a funzioni $G(s)$ razionali fratte e stabili;
    - ○ anche a funzioni $G(s)$ trascendenti;
    - ○ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r > 2$;
    - ⊗ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$.
14. Dato un sistema con grado relativo r, il suo luogo delle radici presenta almeno un asintoto verticale se:
    - ⊗ $r = 2$ e $K > 0$;
    - ○ $r = 2$ e $K < 0$;
    - ○ $r = 4$ e $K > 0$;
    - ⊗ $r = 4$ e $K < 0$.

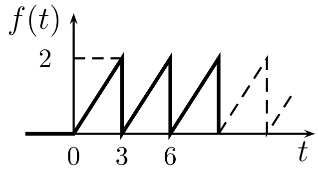
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10

17 Aprile 2010 - Esercizi

Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:



$$x_1(t) = 6\,\sin(4\,t - 12), \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{3}\,t^4\,e^{-4\,t} + 5\,\cos(7\,\pi\,t),$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{24\,s\,e^{-3s}}{s^2+16}, \qquad X_2(s) = \frac{8}{(s+4)^5} + \frac{5\,s}{s^2+49\,\pi^2}, \qquad X_3(s) = \frac{2}{3\,s(1-e^{-3\,s})}\left[-3\,e^{-3\,s} + \frac{1-e^{-3\,s}}{s}\right]$$

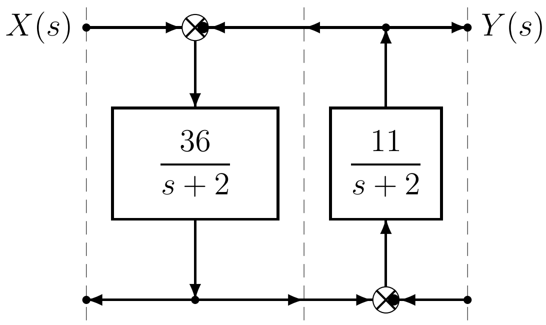
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{(s+5)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{s+3}{(s-5)\,(s-2)\,(s+1)}, \qquad G_3(s) = \frac{1}{(s-2)\,(s+3)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{3}{2}\,t^2\,e^{-5\,t}, \qquad g_2(t) = \frac{4}{9}\,e^{5\,t} - \frac{5}{9}\,e^{2\,t} + \frac{1}{9}\,e^{-t}, \qquad g_3(t) = \frac{1}{25}\,e^{2\,t} - \frac{1}{25}\,e^{-3\,t} - \frac{1}{5}\,t\,e^{-3\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

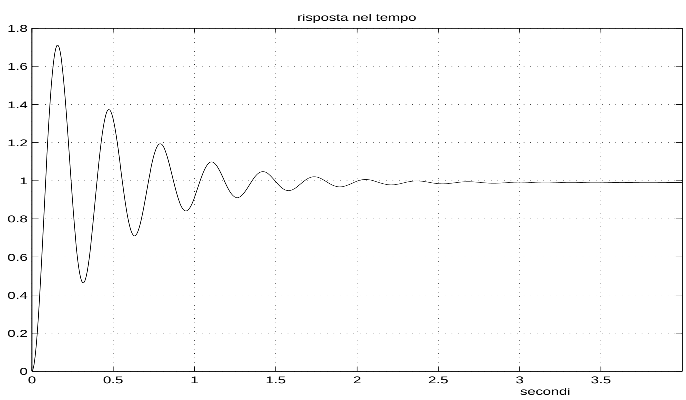
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{396}{s^2 + 4\,s + 400}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

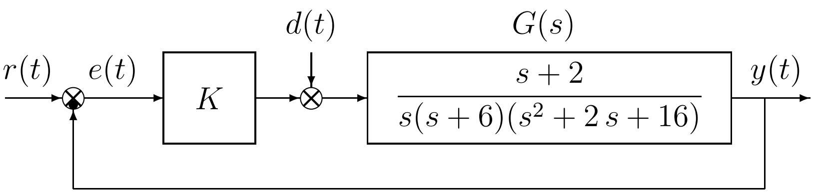
1) $\sigma = -2$ 3) $\omega_n = 20$ 5) $K_0 = 0.99$

2) $\omega = 19.8$ 4) $\delta = 0.1$ 6) $T_a = 1.5$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 1$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+2)}{s\,(s+6)\,(s^2+2\,s+16)} = 0 \qquad \to \qquad s^4 + 8\,s^3 + 28\,s^2 + (96+K)\,s + 2K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 28 & 2\,K \\ 3 & 8 & 96+K & \\ 2 & 128-K & 16\,K & \\ 1 & -K^2-96\,K+12288 & & \\ 0 & 16\,K & & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 72.8$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 72.8$ è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{96+K^*}{8}} = 4.6$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.5\,d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1+K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.5\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 2$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 4\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{4}{K_v}$ con $K_v = \frac{K}{48}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{192}{K}.$$

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = 0.00434$.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.0137$$

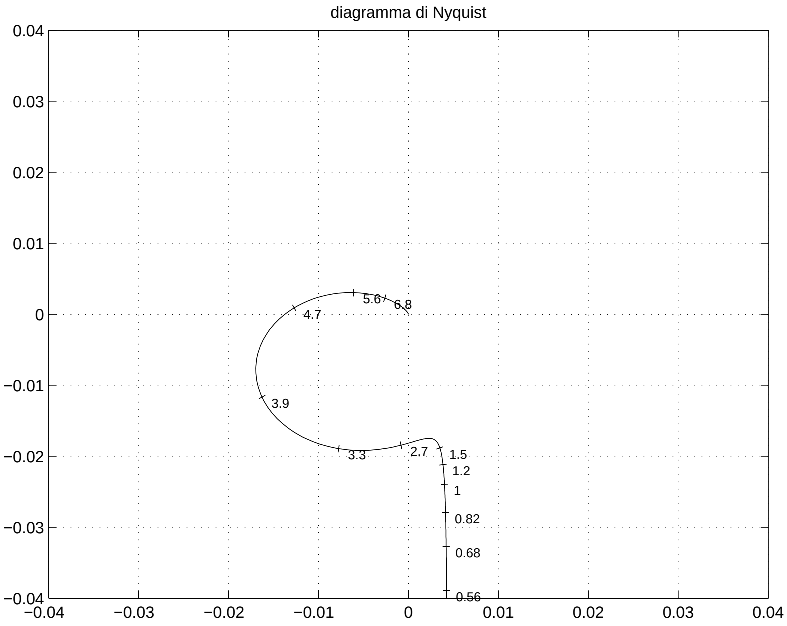
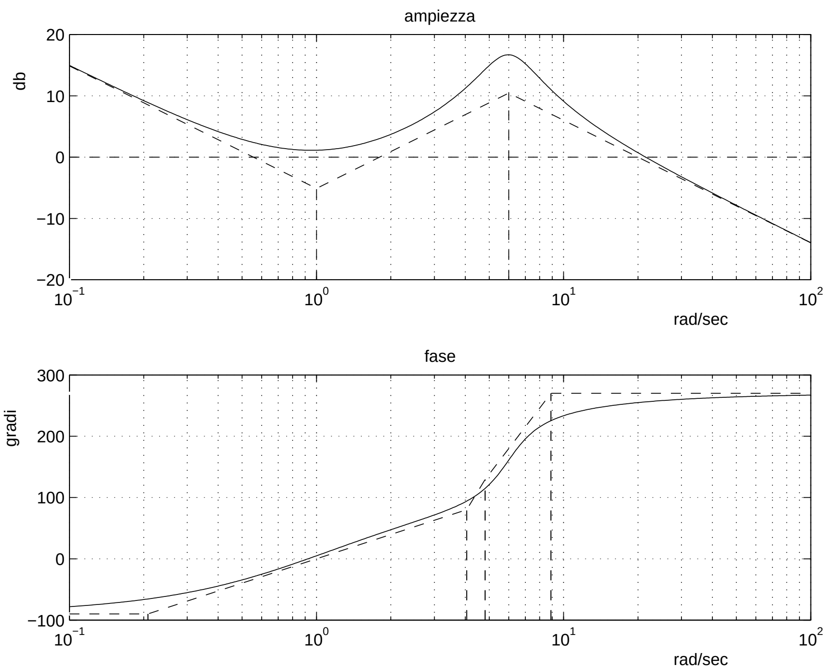


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il corrispondente valore di ω^* è 4.594 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 72.8$.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:



e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = 3\cos(6\,t + \pi/2)$;

$y_\infty(t) = 23.83\cos(6\,t + 7,\pi/2)$

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

$$G(s) = \frac{20\,(s+1)^2}{s\,(s^2 - 3\,s + 36)}$$

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

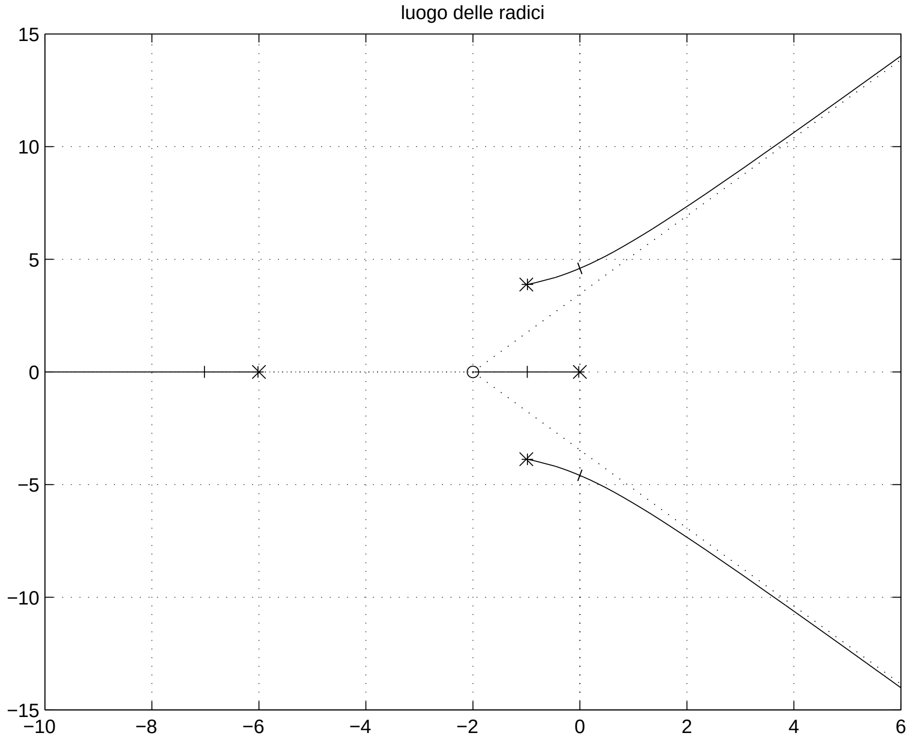


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$.

Soluzione:

$$\sigma = -2$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 4.594\, i$$
$$K^* = 72.8$$

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10
17 Aprile 2010 - Domande Teoriche
Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. L'equazione differenziale $a_3(t)\,\dddot{y}(t) + a_2(t)\,\ddot{y}(t) + a_1(t)\,\dot{y}(t) + a_0(t)\,y(t) = b_1(t)\,\dot{x}(t) + b_0(t)\,x(t)$ è:

   ○ non-lineare;
   ⊗ lineare tempo-variante;
   ○ lineare tempo-invariante.

2. Una funzione di trasferimento con grado del denominatore n e grado del numeratore m si dice *fisicamente realizzabile* se:

   ⊗ $n = m$;
   ○ $n < m$;
   ⊗ $n > m$.

3. Sia $F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione del tempo $f(t)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$. La proprietà di traslazione nel tempo delle trasformate di Laplace afferma che:

   ○ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{s/t_0}F(s)$;
   ○ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-s}F(s)$;
   ○ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{t_0}F(s)$;
   ⊗ $\mathcal{L}[f(t-t_0)] = e^{-t_0 s}F(s)$.

4. Un sistema lineare è asintoticamente stabile se e solo se i poli della sua funzione di trasferimento:

   ⊗ hanno parte reale negativa;
   ○ hanno parte reale positiva;
   ○ hanno parte reale negativa o nulla con moltiplicità maggiore di uno;
   ○ hanno parte reale negativa o nulla con moltiplicità unitaria.

5. Data una funzione di trasferimento $G(s)$, si definisce *modo dominante*:

   ○ lo zero di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assuluto più piccolo;
   ○ lo zero di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assuluto più piccolo;
   ○ il polo di $G(s)$ a parte reale positiva con valore assuluto più piccolo;
   ⊗ il polo di $G(s)$ a parte reale negativa con valore assuluto più piccolo.

6. La risposta al gradino di un sistema del primo ordine raggiunge, dopo tre costanti di tempo dall'applicazione dell'ingresso:

   ○ il 50% del valore finale;
   ○ l'85% del valore finale;
   ⊗ il 95% del valore finale;
   ○ il 100% del valore finale.

7. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+8\,s+64}$;

$$T_a = \frac{3}{4}$$

8. L'istante di massima sovraelongazione T_m della risposta al gradino di un sistema lineare del secondo ordine, stabile, privo di zeri e caratterizzato da due poli complessi coniugati $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$ è:

   ⊗ $T_m = \frac{\pi}{\omega}$;
   ◯ $T_m = \frac{\pi}{\sigma}$;
   ◯ $T_m = \frac{\pi}{\sigma\omega}$.

9. La massima sovraelongazione percentuale S del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+4}$ in risposta ad un ingresso a gradino è:

   ⊗ $S = 100\,\%$;
   ◯ $S = 50\,\%$;
   ◯ $S = 20\,\%$;
   ◯ $S = 0\,\%$.

10. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    ⊗ una pendenza di $-60\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    ⊗ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ◯ una pendenza di $0\,db/decade$ per $\omega \to 0$.

11. Per un sistema del secondo ordine stabile e privo di zeri, il legame che lega la massima sovraelongazione S al coefficiente di smorazmento δ è:

    ⊗ $S = 100\,e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
    ◯ $S = 100\,e^{\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$;
    ◯ $S = 100\,e^{-\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$;
    ◯ $S = 100\,e^{\frac{\pi\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}}$.

12. Sia $G(s)$ una funzione razionale fratta in s. La scomposizione in fratti semplici della funzione $G(s)$ mediante il metodo dei residui:

    ⊗ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è strettamente propria;
    ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è propria;
    ◯ è sempre possibile.

    Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il *teorema del baricentro* del luogo delle radici si applica:

    ◯ anche a funzioni $G(s)$ trascendenti;
    ◯ solo a funzioni $G(s)$ razionali fratte e stabili;
    ⊗ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r \geq 2$.
    ◯ solo a funzioni $G(s)$ con grado relativo $r > 2$.

14. Dato un sistema con grado relativo r, il suo luogo delle radici presenta almeno un asintoto verticale se:

    ◯ $r = 2$ e $K < 0$;
    ⊗ $r = 2$ e $K > 0$;
    ⊗ $r = 4$ e $K < 0$;
    ◯ $r = 4$ e $K > 0$.