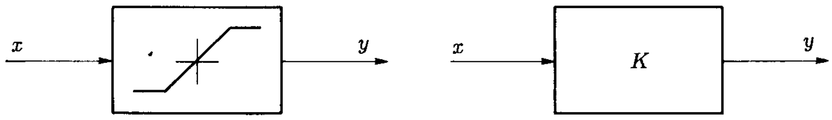
Riduzione degli schemi a blocchi

- Spesso i sistemi complessi vengono rappresentati con *schemi a blocchi*, i cui elementi hanno ciascuno un solo ingresso e una sola uscita.
- I blocchi elementari per la rappresentazione di sistemi puramente algebrici sono:

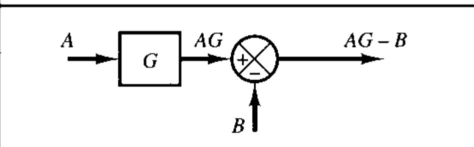
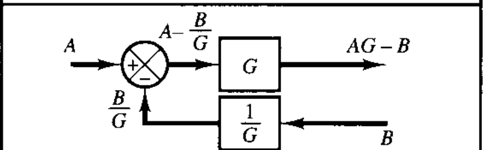
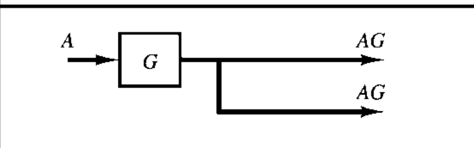
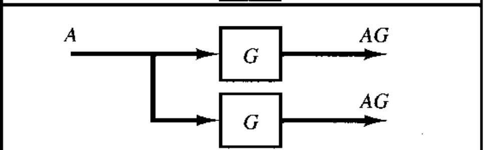
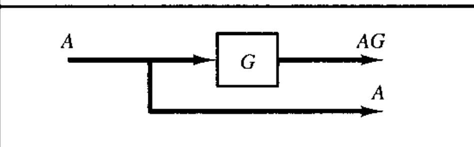
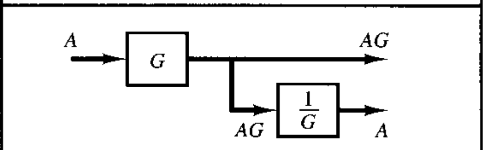
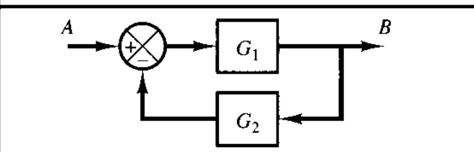
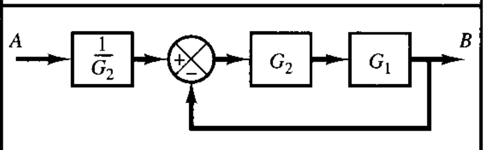
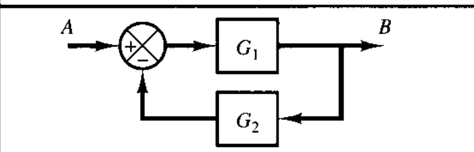
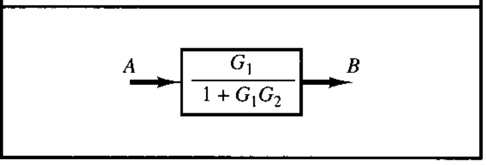


a) b)

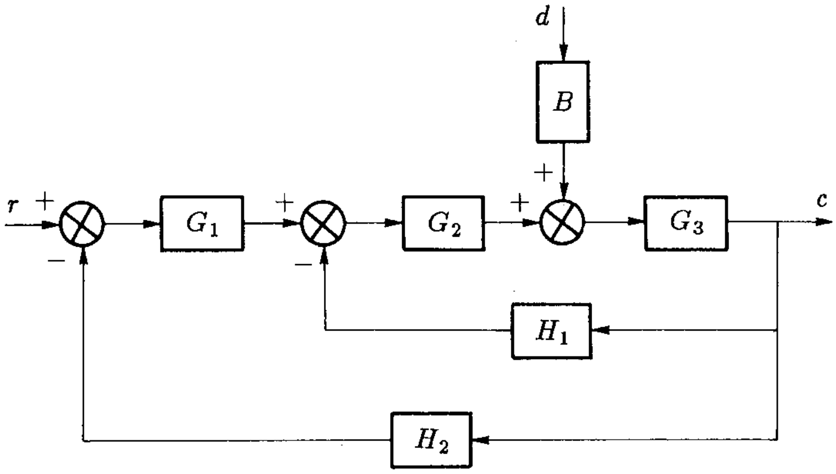
- Negli schemi a blocchi i diversi elementi sono collegati fra loro mediante i *punti di diramazione* e le *giunzioni sommanti*:

a) b)

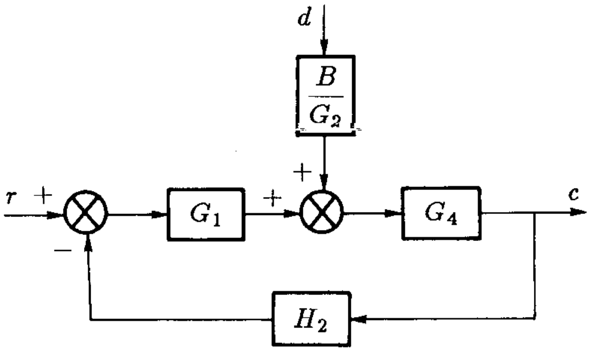
- Principali regole per la riduzione degli schemi a blocchi:

	Original Block Diagrams	Equivalent Block Diagrams
1		
2		
3		
4		
5		

Esempio di riduzione di schema a blocchi

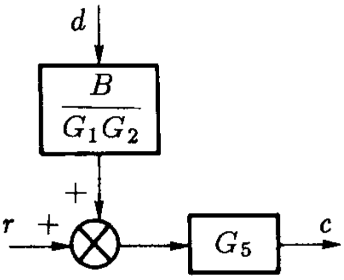


a)



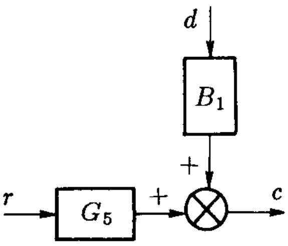
b)

$$G_4 = \frac{G_2 G_3}{1+G_2 G_3 H_1}$$



c)

$$G_5 = \frac{G_1 G_4}{1+G_1 G_4 H_2}$$



d)

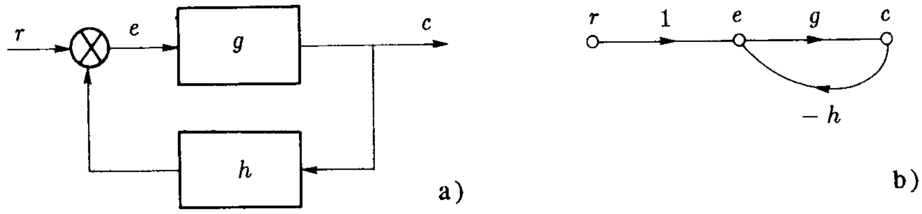
$$B_1 = \frac{B\, G_5}{G_1 G_2}$$

- Forma minima:

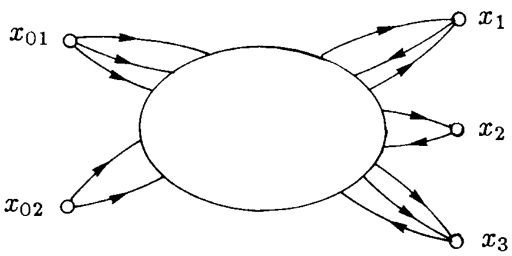
$$c = \frac{G_1 G_2 G_3\, r + B\, G_3\, d}{1 + G_2 G_3 H_1 + G_1 G_2 G_3 H_2}$$

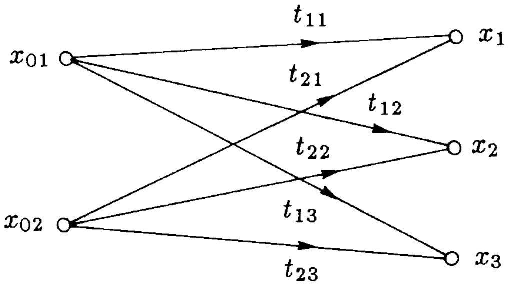
I grafi di flusso di segnale

- I *grafi di flusso di segnale* sono un mezzo, alternativo agli schemi a blocchi, per la rappresentazione grafica dei sistemi complessi. Esempio:



- Rispetto agli schemi a blocchi, essi forniscono una più semplice rappresentazione grafica del sistema.
- Un grafo di flusso di segnale è una rete composta di *nodi* e di *rami orientati*. I *nodi indipendenti* (o *nodi sorgente*) sono nodi a cui non giunge nessun ramo. I *nodi dipendenti* sono nodi ai quali giunge almeno un ramo. Ogni ramo è caratterizzato da un *coefficiente* o *trasmittanza*.
- Per i grafi di flusso di segnale esistono regole di riduzione che sono simili a quelle degli schemi a blocchi. Mediante riduzione, ogni grafo di flusso di segnale può essere portato in *forma minima*:





- Per calcolare la forma minima si utilizza la *Formula di Mason*

La formula di Mason

- Fornisce il *coefficiente di trasmittanza* T (ovvero la *funzione di trasferimento*) di ogni singolo ramo del grafo in forma minima:

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \, \Delta_i$$

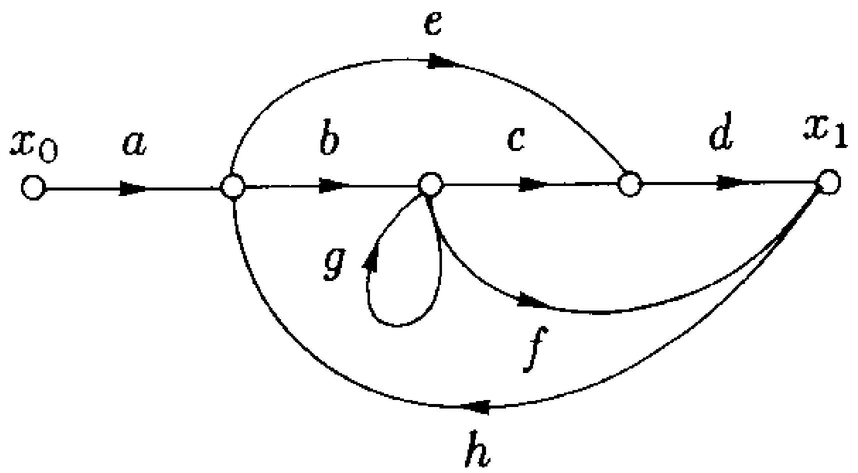
- $\mathcal{P}$ è l'insieme degli indici di tutti i percorsi esistenti tra i due nodi considerati; P_i è il coefficiente dell'i-esimo percorso, cioè il prodotto dei coefficienti di tutti i rami che compongono il percorso; Δ è il determinante dell'intero grafo; Δ_i è il determinante del grafo parziale che si ottiene eliminando tutti i nodi e i rami appartenenti al percorso i-esimo.

- Il determinante Δ (Δ_i) di un grafo si calcola nel modo seguente:

$$\Delta := 1 - \sum_{i \in \mathcal{J}_1} A_i + \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}_2} A_i \, A_j - \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{J}_3} A_i \, A_j \, A_k + \ \ldots$$

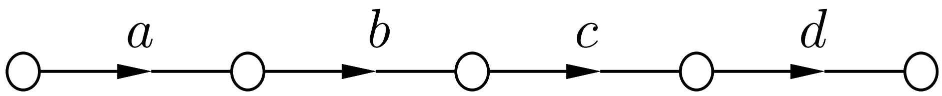
  dove A_i è il coefficiente dell'i-esimo anello; $\mathcal{J}_1$ è l'insieme degli indici di tutti gli anelli del grafo; $\mathcal{J}_n$ è l'insieme delle n-ple di indici di tutti gli anelli del grafo che non si toccano n ad n.

- Esempio. Calcolare la funzione di trasferimento $G(s) = \frac{X_1(s)}{X_0(s)} = T$ che, nel seguente grafo a flusso di segnale, lega la variabile di ingresso $X_0(s)$ alla variabile di uscita $X_1(s)$:



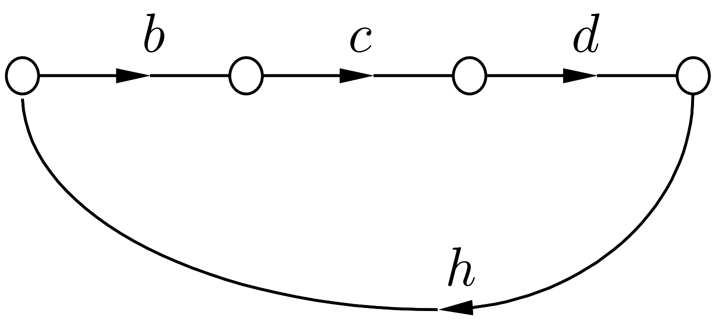
Alcune precisazioni:

- Un **percorso** è una successione di rami e nodi adiacenti senza anelli in cui ogni nodo viene attraversato una sola volta. Il **coefficiente** P del percorso è il prodotto dei guadagni dei rami che lo compongono. Esempio:



$$P = abcd$$

- Un **anello** è un percorso chiuso. Il **coefficiente** A dell'anello è il prodotto dei guadagni dei rami che lo compongono. Esempio:



$$A = bcdh$$

- Due percorsi o due anelli **non si toccano** quando non hanno nessun nodo in comune.

Per calcolare il determinante Δ di un grafo è necessario calcolare gli insiemi $\mathcal{P}$, $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, ecc.

- L'insieme $\mathcal{P} = \{1, 2, 3\}$ è l'insieme degli indici di tutti i percorsi del grafo che collegano il nodo sorgente x_0 al nodo dipendente di uscita x_1. Ad ogni indice si associa il coefficiente P_i del corrispondente percorso:

$$\begin{array}{lll} i = 1 & \text{percorso: a b c d} & \rightarrow \; P_1 = abcd \\ i = 2 & \text{percorso: a e d} & \rightarrow \; P_2 = aed \\ i = 3 & \text{percorso: a b f} & \rightarrow \; P_3 = abf \end{array}$$

- L'insieme $\mathcal{I}_1 = \{1,2,3,4\}$ è l'insieme degli indici di tutti gli anelli del grafo. Ad ogni indice si associa il coefficiente A_i del corrispondente anello:

$$\begin{array}{lll}
i=1 & \text{anello: e d h} & \rightarrow \; A_1 = edh \\
i=2 & \text{anello: b c d h} & \rightarrow \; A_2 = bcdh \\
i=3 & \text{anello: b f h} & \rightarrow \; A_3 = bfh \\
i=4 & \text{anello: g} & \rightarrow \; A_4 = g
\end{array}$$

- L'insieme $\mathcal{I}_2 = \{(1,4)\}$ è l'insieme delle COPPIE di indici degli anelli del grafo che NON si toccano a due a due:

$$\text{gli anelli 1 e 4 non si toccano} \rightarrow \; \mathcal{I}_2 = \{(1,4)\}$$

- L'insieme $\mathcal{I}_n = \{\ \}$ per $n \in [3,\,4,\,\ldots]$ è l'insieme delle n-PLE di indici degli anelli del grafo che NON si toccano a n a n:

$$\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_4 = \ldots = \mathcal{I}_n = \{\ \}$$

- Calcolati gli insiemi $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, …, $\mathcal{I}_n$ e i coefficienti A_i di tutti gli anelli, il determinante del grafo Δ si calcola utilizzando la formula:

$$\Delta \stackrel{def}{=} 1 - \sum_{i\in\mathcal{I}_1} A_i + \sum_{(i,j)\in\mathcal{I}_2} A_i A_j - \sum_{(i,j,k)\in\mathcal{I}_3} A_i A_j A_k + \ldots$$

  Per il caso in esame si ha che

$$\sum_{i\in\mathcal{I}_1} A_i = edh + bcdh + bfh + g, \qquad \sum_{(i,j)\in\mathcal{I}_2} A_i A_j = edhg$$

  per cui:

$$\Delta = 1 - edh - bcdh - bfh - g + edhg$$

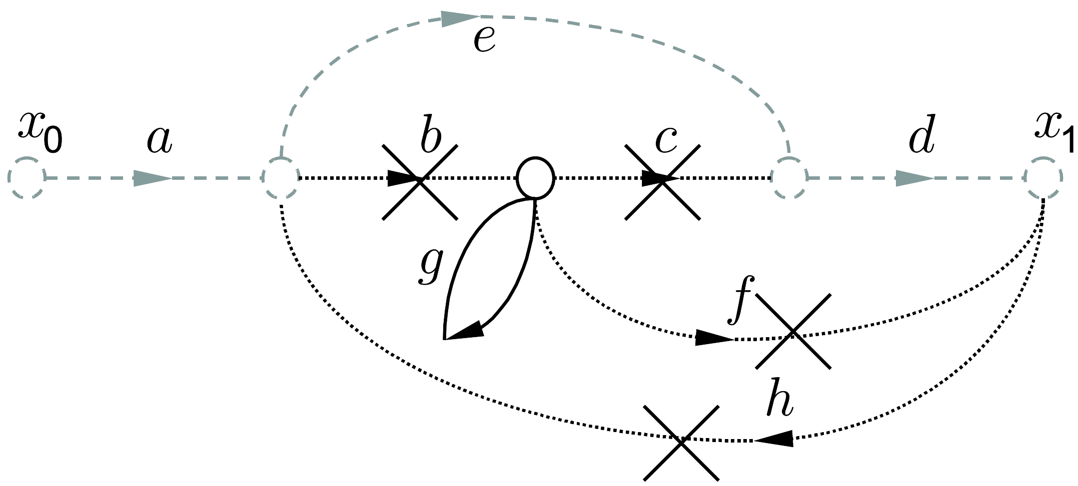
<u>Osservazioni</u>:

- Il determinante di un grafo dipende SOLO dalla struttura degli anelli, non dal particolare percorso tra i due nodi. Esso è dunque una proprietà del grafo.

- Per quanto detto, tutti i rami del grafo in forma minima sono caratterizzati dallo stesso determinante Δ.

- I determinanti Δ_i, per $i \in [1, 2, 3]$, dei grafi parziali associati ai percorsi P_i si calcolano nello stesso modo del determinate Δ.

- Il determinante Δ_2 del percorso 2 (a, e, d), per esempio, si calcola eliminando tutti i rami e tutti i nodi appartenenti al percorso 2. Successivamente si cancellano tutti i rami che partono o arrivano in un nodo precedentemente eliminato (rami b, c, f, h). Il determinante Δ_2 del grafo parziale (anello g) è quindi il seguente: $\Delta_2 = 1 - g$.



- Nel caso in esame, i determinanti Δ_i dei grafi parziali associati ai percorsi P_i sono i seguenti:

$$\begin{array}{lll} i = 1 & P_1 = abcd & \Delta_1 = 1 \\ i = 2 & P_2 = aed & \Delta_2 = 1 - g \\ i = 3 & P_3 = abf & \Delta_3 = 1 \end{array}$$

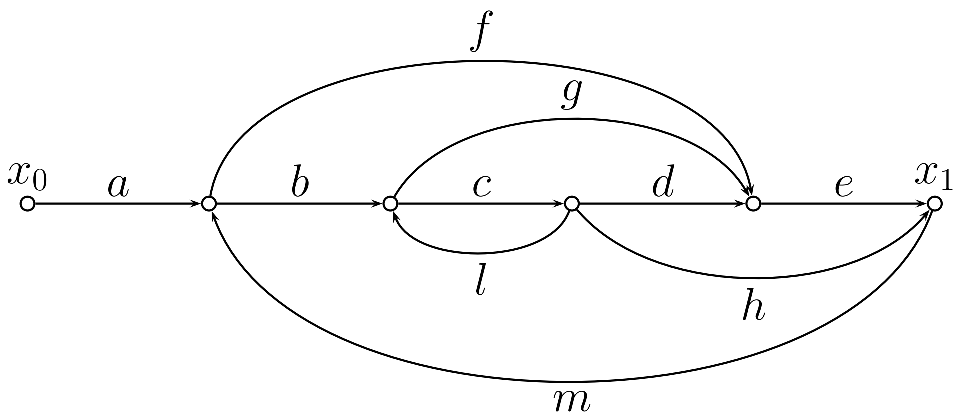
- Il numeratore della formula di Mason è quindi il seguente:

$$\sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i = abcd(1) + aed(1-g) + abf(1)$$

- La funzione di trasferimento $G(s) = \frac{X_1(s)}{X_0(s)} = T$ che nel grafo in forma minima collega l'ingresso x_0 all'uscita x_1 è quindi la seguente:

$$T = \frac{abcd + aed(1-g) + abf}{1 - edh - bcdh - bfh - g + edhg}$$

- **Esempio 1**:

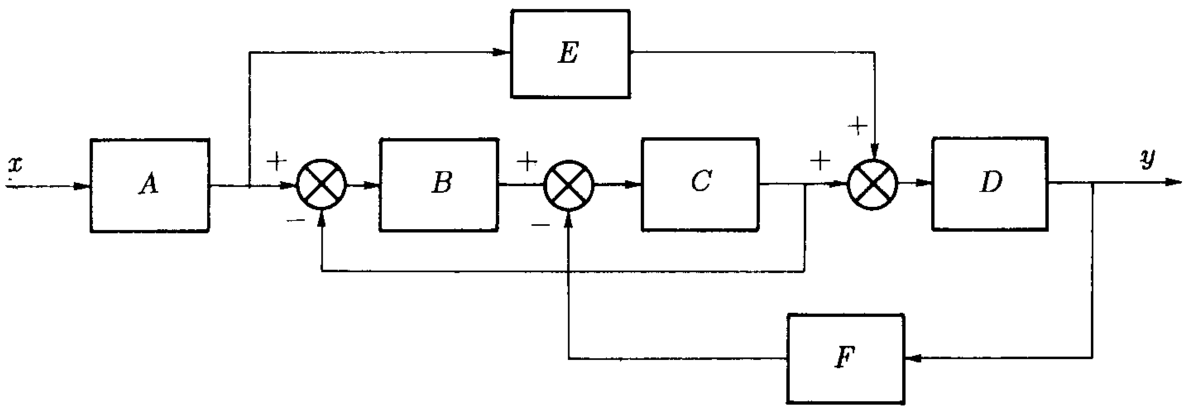


- Nel grafo sono presenti quattro percorsi di segnale $P_1 = a\,f\,e$, $P_2 = a\,b\,g\,e$, $P_3 = a\,b\,c\,h$, $P_4 = a\,b\,c\,d\,e$ e i cinque anelli $A_1 = f\,e\,m$, $A_2 = b\,g\,e\,m$, $A_3 = b\,c\,h\,m$, $A_4 = b\,c\,d\,e\,m$, $A_5 = c\,l$

- Funzione di trasferimento:

$$T = \frac{x_1}{x_0} = \frac{a\,f\,e(1 - c\,l) + a\,b\,g\,e + a\,b\,c\,h + a\,b\,c\,d\,e}{1 - f\,e\,m - b\,g\,e\,m - b\,c\,h\,m - b\,c\,d\,e\,m - c\,l + f\,e\,m\,c\,l}$$

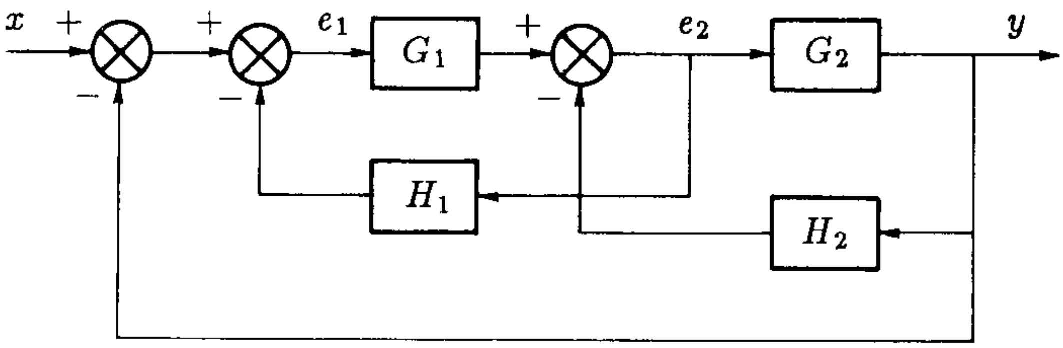
- **Esempio 2**:



- Funzione di trasferimento:

$$\frac{y}{x} = A\,D\,\frac{B\,C + E\,(1+B\,C)}{1 + B\,C + C\,D\,F}$$

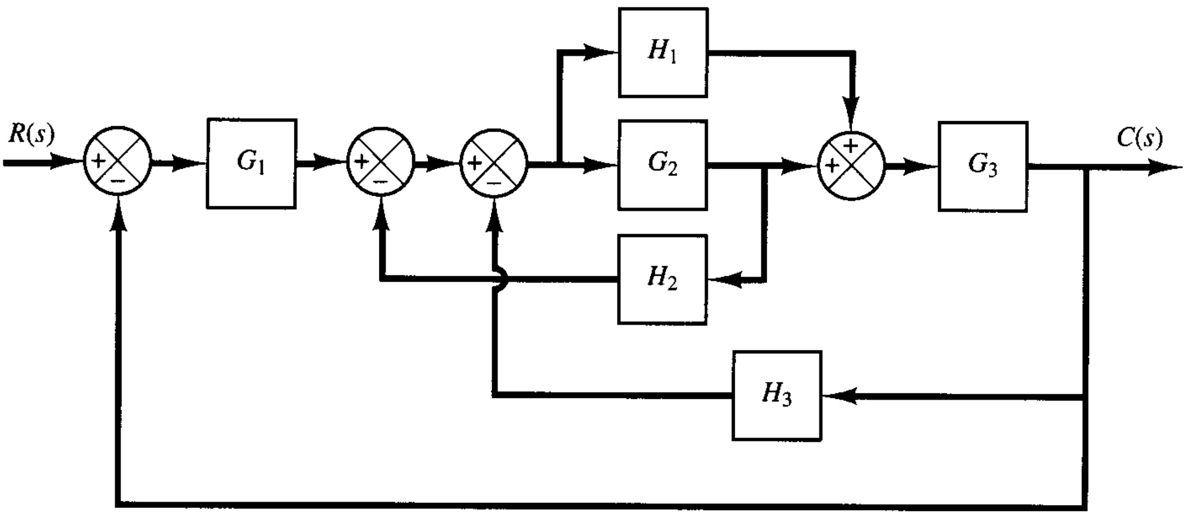
- **Esempio 3**:



- Funzione di trasferimento:

$$\frac{y}{x} = \frac{G_1\,G_2}{1 + G_1\,H_1 + G_2\,H_2 + G_1\,G_2}$$

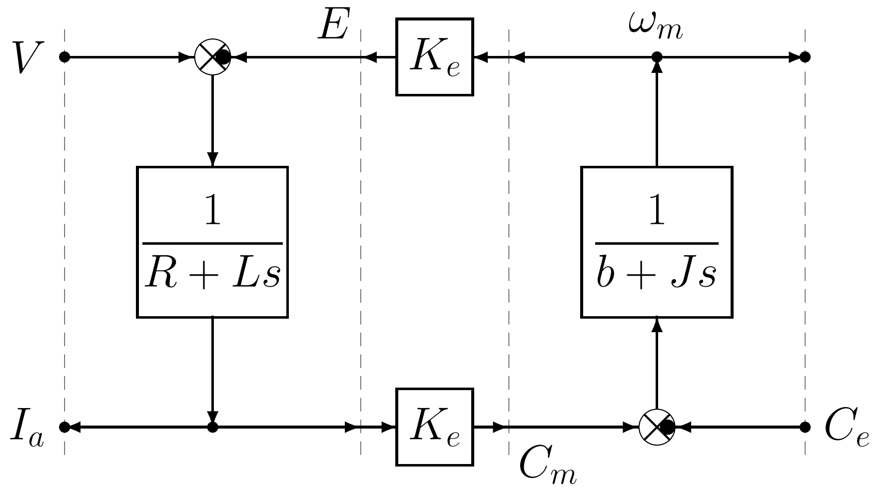
- **Esempio 4**:



- Funzione di trasferimento:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1G_2G_3 + G_1H_1G_3}{1 + G_1G_2G_3 + G_1H_1G_3 + G_2H_2 + G_2G_3H_3 + H_1G_3H_3}$$

- **Esempio 5.** Schema a blocchi di un motore in corrente continua:



- Il legame "in forma minima" tra la variabile di uscita $\omega_m(s)$ e le variabili di ingresso $V(s)$ e $C_e(s)$ è il seguente:

$$\omega_m(s) = G_1(s)V(s) + G_2(s)C_e(s)$$

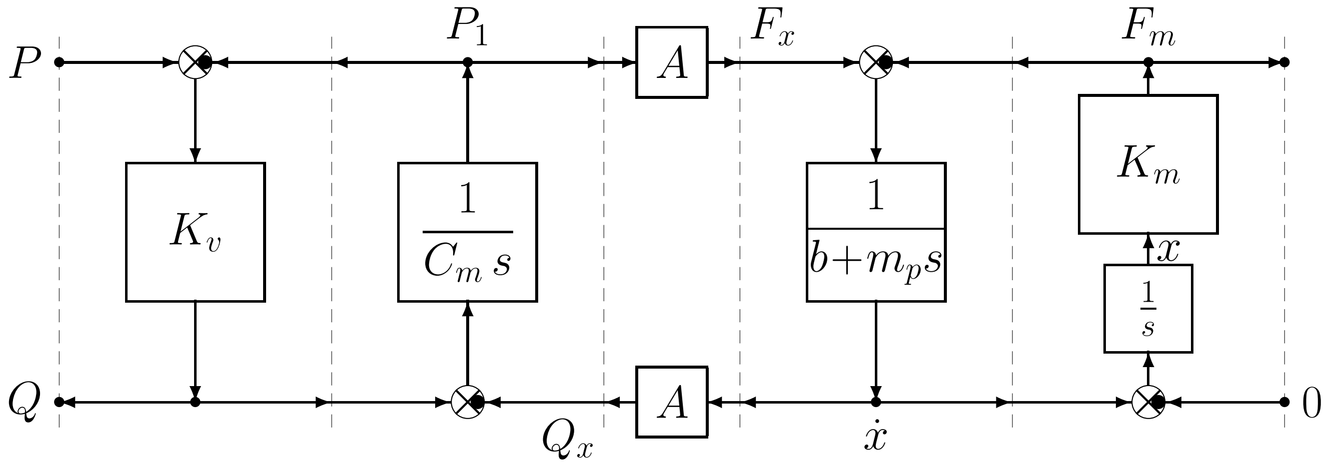
dove $G_1(s)$ lega l'ingresso di controllo $V(s)$ all'uscita $\omega_m(s)$

$$G_1(s) = \frac{\omega_m(s)}{V(s)} = \frac{\dfrac{K_e}{(R+L\,s)(b+J\,s)}}{1+\dfrac{K_e^2}{(R+L\,s)(b+J\,s)}} = \frac{K_e}{(R+L\,s)(b+J\,s)+K_e^2}$$

mentre $G_2(s)$ lega l'ingresso di disturbo $C_e(s)$ all'uscita $\omega_m(s)$:

$$G_2(s) = \frac{\omega_m(s)}{C_e(s)} = \frac{-\dfrac{1}{(b+J\,s)}}{1+\dfrac{K_e^2}{(R+L\,s)(b+J\,s)}} = \frac{-(R+L\,s)}{(R+L\,s)(b+J\,s)+K_e^2}$$

- **Esempio 5.** Schema a blocchi di una frizione idraulica:



Utilizzando la formula di Mason e le seguenti variabili ausiliarie

$$G_1 = K_v, \qquad G_2 = \frac{1}{C_m s}, \qquad G_3 = \frac{1}{b + m_p s}, \qquad G_4 = \frac{K_m}{s}$$

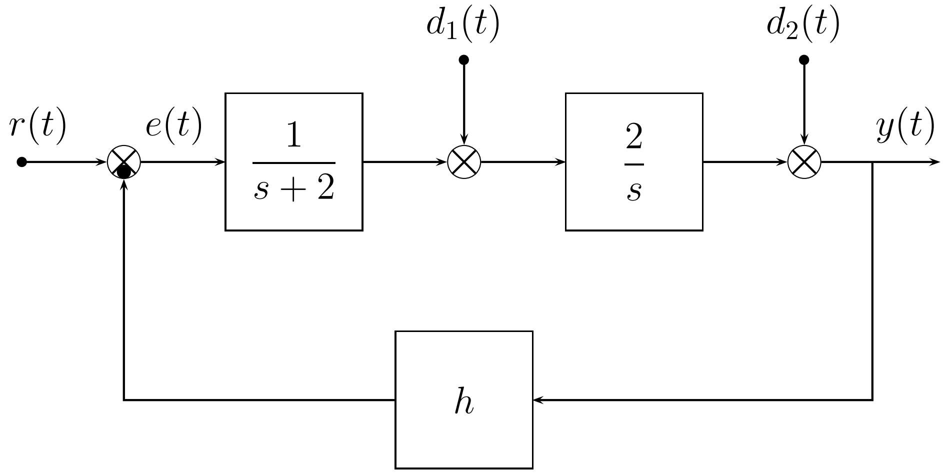
si ottiene la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema:

$$G(s) = \frac{F_m(s)}{P(s)} = \frac{A\, G_1\, G_2\, G_3\, G_4}{1 + G_1\, G_2 + A^2\, G_2\, G_3 + G_3\, G_4 + G_1\, G_2\, G_3\, G_4}$$

che sostituendo diventa:

$$G(s) = \frac{A K_m K_v}{C_m m_p s^3 + (C_m\, b + K_v m_p) s^2 + (A^2 + C_m K_m + K_v\, b) s + K_m K_v}$$

- **Esempio.** Sia dato il seguente sistema dinamico retroazionato:



- Calcolare il valore a regime della variabile $e(t)$ in presenza dei seguenti segnali: $r(t) = t$, $d_1(t) = 1$ e $d_2(t) = 1$.

  Si opera con le trasformate di Laplace e si applica la sovrapposizione degli effetti:

$$E(s) = \frac{R(s) - \frac{2h}{s} D_1(s) - hD_2(s)}{1 + \frac{2h}{s(s+2)}}$$

$$= \frac{s(s+2)R(s) - 2h(s+2)D_1(s) - hs(s+2)D_2(s)}{s^2 + 2s + 2h}$$

  Essendo $R(s) = \frac{1}{s^2}$ e $D_1(s) = D_2(s) = \frac{1}{s}$, si ha che:

$$E(s) = \frac{(s+2) - 2h(s+2) - hs(s+2)}{s(s^2 + 2s + 2h)} = \frac{(s+2)(1 - 2h - hs)}{s(s^2 + 2s + 2h)}$$

  Applicando il teorema del valore finale si ricava:

$$\lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \frac{1-2h}{h} = \frac{1}{h} - 2$$