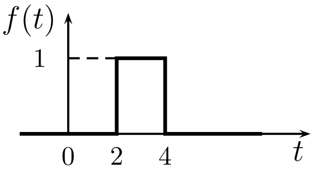
**Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10**

**09 Febbraio 2010 - Esercizi**

| | |
|---|---|
| Nome: | |
| Nr. Mat. | |
| Firma: | |

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

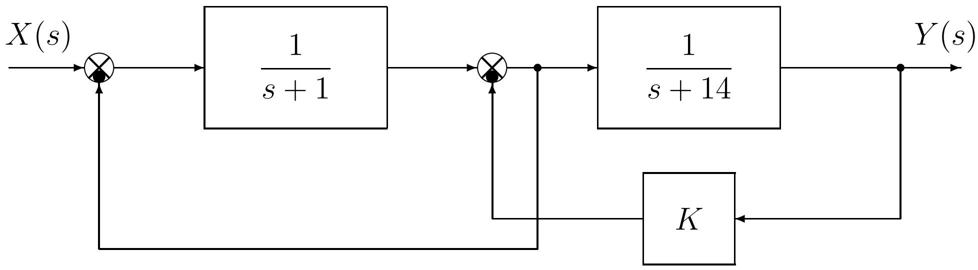
$$x_1(t) = 2\,\sin(5\,t)e^{-t}, \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{3}\,t^2\,e^{2\,t} + \cos(2\,\pi\,t),$$




b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{(s+2)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{s+2}{(s-2)\,(s+3)\,(s+4)}, \qquad G_3(s) = \frac{1}{(s-2)\,(s+1)^2}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:




c.1) Posto $K = -12$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

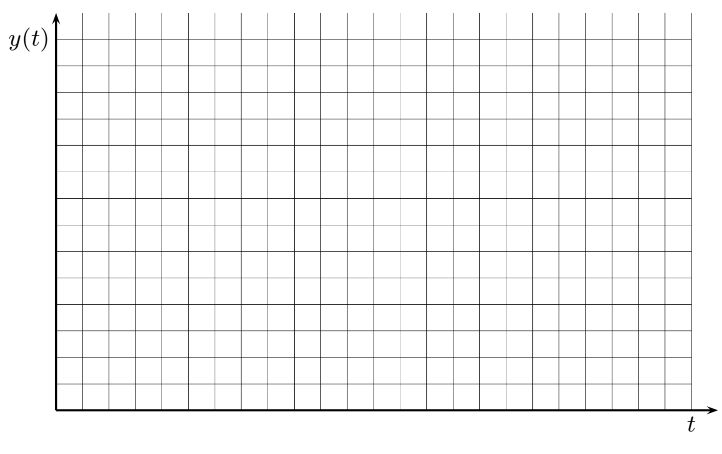
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale $\sigma$ e 2) la parte immaginaria $\omega$ dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale $\omega_n$ e 4) il coefficiente di smorzamento $\delta$ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico $K_0$; 6) il tempo di assestamento $T_a$ del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

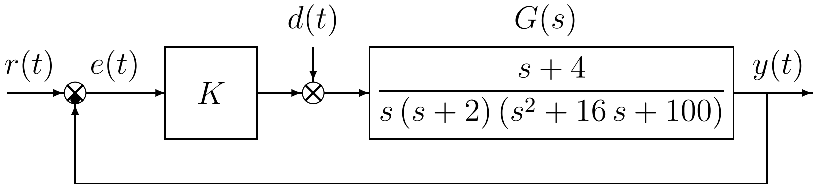
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 8$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:




d.1) Determinare per quali valori del parametro $K$ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

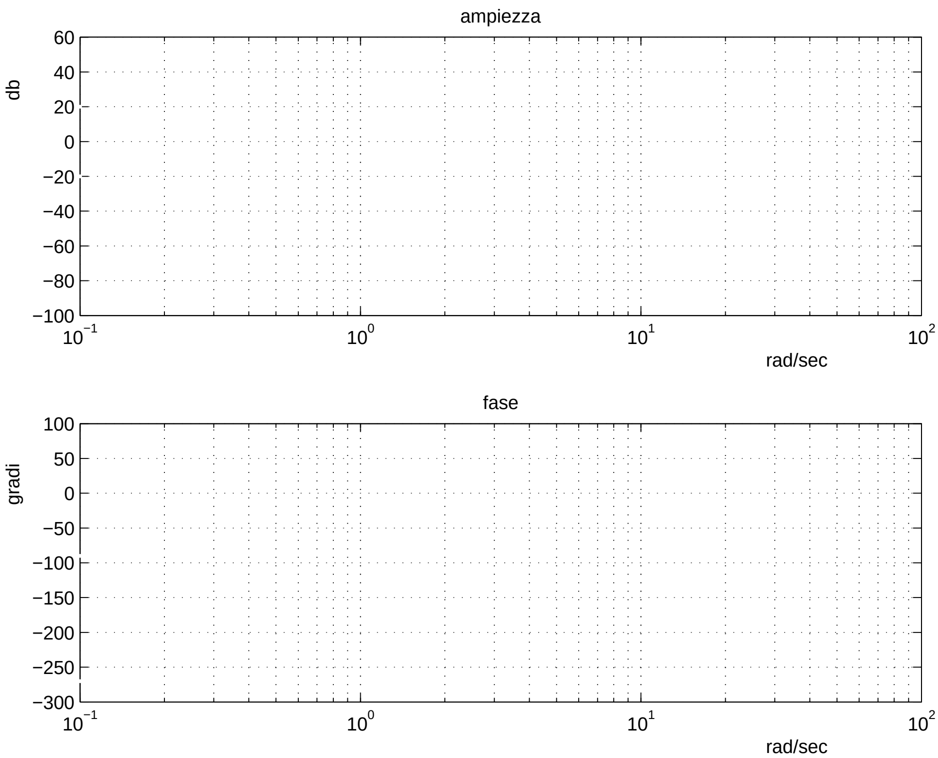
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro $K$ tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.02\,d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro $K$, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2\,t$.

d.4) Posto $K = 100$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione $\sigma_a$ dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni $\sigma_i^*$ con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni $\omega_i^*$. Determinare inoltre il margine di ampiezza $M_\alpha$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 100$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;




e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + \cos(0.01\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro $K$. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro $K$.

**Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10**

**09 Febbraio 2010 - Esercizi**

| | |
|---|---|
| Nome: | |
| Nr. Mat. | |
| Firma: | |

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all'infinito:

   ◯ con una circonferenza percorsa in senso antiorario;
   ◯ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso orario.

2. Fornire una stima del tempo di assestamento (al 5% del valore finale) del sistema $G(s) = \frac{1}{6s+1}$ chiuso in retroazione negativa con guadagno $K = 100$:

$$T_a =$$

3. Per $\omega > 0$, il diagramma di Bode reale delle fasi della funzione $G(s) = \frac{1}{1+\tau\, s}$ coincide con il diagramma "asintotico" di Bode:

   ◯ nei tre punti al finito $\omega_n = 1/\tau$, $\omega_a = \omega_n/4.81$, $\omega_b = 4.81\,\omega_n$.
   ◯ in nessun punto al finito;
   ◯ in un solo punto al finito $\omega_n = 1/\tau$;

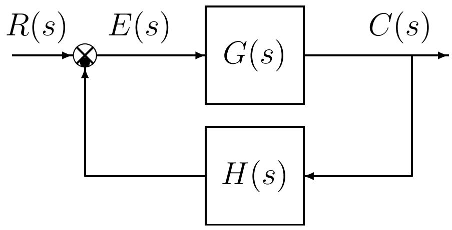
4. Il teorema del valore finale applicato alla funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ afferma che:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) =$$

5. Dato il sistema lineare $G(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+4)}$, il valore finale ($T \to \infty$) della risposta $h(t)$ ad un gradino di ampiezza 2 vale;

   ◯ $h(\infty) = \infty$
   ◯ $h(\infty) = \frac{1}{3}$
   ◯ $h(\infty) = 1$
   ◯ $h(\infty) = 0$

6. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $G(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro $\alpha$ interno alla funzione di trasferimento $G(s)$:




$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \qquad\qquad \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

7. Il margine di ampiezza $M_A$ del sistema $G(s) = \frac{1}{(1+\tau_1\, s)\,(1+\tau_2\, s)\,(1+\tau_3\, s)}$ con $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_3 > 0$ è;

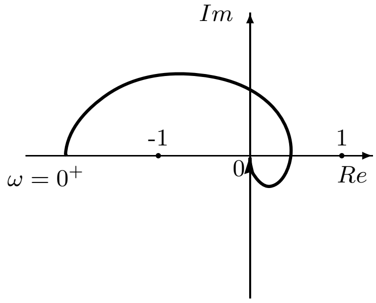
   ◯ sempre minore di 1;
   ◯ sempre maggiore di 1;
   ◯ può essere unitario.

8. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$2\,\ddot{x}(t)+4\,\dot{x}(t)+x(t) = \ddot{u}(t)+2\,\dot{u}(t)+3\,u(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} =$$

9. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con tutti i poli a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.

   Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è asintoticamente stabile per i seguenti valori di $K$:

   ○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* > 1$;
   ○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* > 1$;
   ○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* < 1$;
   ○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* < 1$;

10. Il margine di fase del sistema $G(s) = 1/s$:

    ○ è nullo;
    ○ è $-\frac{\pi}{2}$;
    ○ è $\frac{\pi}{2}$;
    ○ non è definibile.

11. Il segnale $x(t) = 2\sin(3\,t)$ viene posto in ingresso ad un sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s+4}$. L'ampiezza $A$ del segnale d'uscita vale:

$$A =$$

12. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il tempo di assestamento $T_a$ rimane costante al variare della posizione dei poli:

    ○ su di una circonferenza con centro nell'origine;
    ○ su due semirette uscenti dall'origine;
    ○ su di una retta parallela all'asse immaginario;
    ○ su di un'ellisse con fuoco nell'origine.

**Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

13. In un sistema con $K_\tau > 0$, per valori del guadagno di retroazione $K > 0$ un punto dell'asse reale appartiene al luogo delle radici se lascia alla sua destra:

    ○ un numero totale dispari di zeri e poli;
    ○ un numero totale pari di zeri e poli.
    ○ un numero totale dispari di poli;
    ○ un numero totale pari di poli;

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

    ○ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
    ○ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
    ○ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.

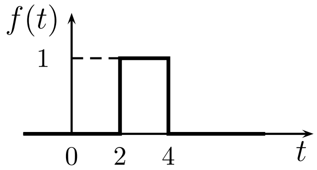
**Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10**

**09 Febbraio 2010 - Esercizi**

| | |
|---|---|
| Nome: | |
| Nr. Mat. | |
| Firma: | |

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 2\,\sin(5\,t)e^{-t}, \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{3}\,t^2\,e^{2\,t} + \cos(2\,\pi\,t),$$




Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{10}{(s+1)^2+25}, \qquad X_2(s) = \frac{2}{3\,(s-2)^3} + \frac{s}{s^2+4\,\pi^2}, \qquad X_3(s) = \frac{1}{s}\left[e^{-2s} - e^{-4s}\right]$$

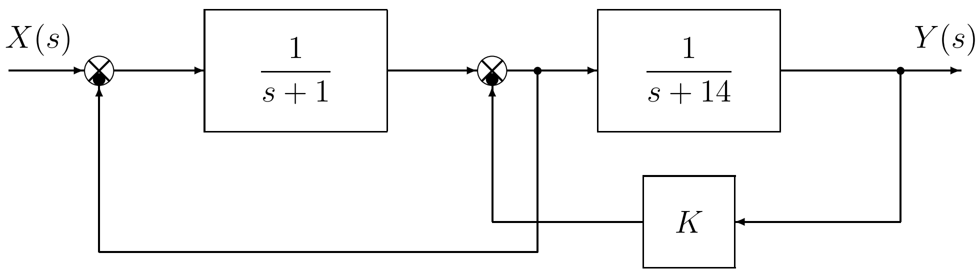
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{(s+2)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{s+2}{(s-2)\,(s+3)\,(s+4)}, \qquad G_3(s) = \frac{1}{(s-2)\,(s+1)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{3}{2}\,t^2\,e^{-2\,t}, \qquad g_2(t) = \frac{2}{15}\,e^{2\,t} + \frac{1}{5}\,e^{-3\,t} - \frac{1}{3}\,e^{-4\,t}, \qquad g_3(t) = \frac{1}{9}\,e^{2\,t} - \frac{1}{9}\,e^{-t} - \frac{1}{3}\,t\,e^{-t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



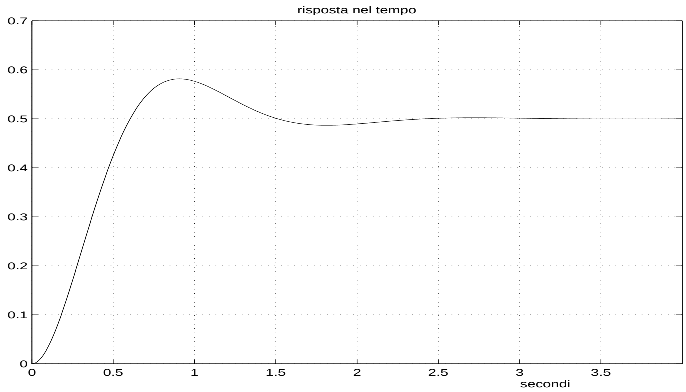

c.1) Posto $K = -12$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+4\,s+16}$$

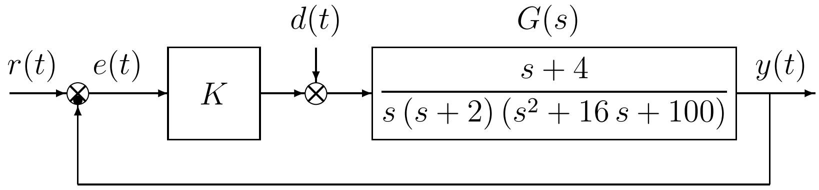
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale $\sigma$ e 2) la parte immaginaria $\omega$ dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale $\omega_n$ e 4) il coefficiente di smorzamento $\delta$ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico $K_0$; 6) il tempo di assestamento $T_a$ del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

| | | |
|---|---|---|
| 1) $\sigma = -2$ | 3) $\omega_n = 4$ | 5) $K_0 = \frac{1}{16}$ |
| 2) $\omega = 3.5$ | 4) $\delta = 0.5$ | 6) $T_a = 1.5$ |

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 8$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).




d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:




d.1) Determinare per quali valori del parametro $K$ il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K\,(s+4)}{s\,(s+2)\,(s^2+16\,s+100)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 17\,s^3 + 116\,s^2 + (100+K)\,s + 4\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{r|ccc}
4 & 1 & 132 & 4\,K \\
3 & 18 & 200+K & \\
2 & 2176-K & 72\,K & \\
1 & (2176-K)(200+K) - 1296\,K & & \\
0 & 72\,K & &
\end{array}$$

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 1082$$

La pulsazione $\omega^*$ corrispondente al valore limite $K^* = 1082$ è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{100+K^*}{17}} = 8.34$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro $K$ tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.02\,d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1 + K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.02\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico  infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 50$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro $K$, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{2}{K_v}$ con $K_v = \frac{K}{50}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{100}{K}.$$

d.4) Posto $K = 100$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione $\sigma_a$ dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni $\sigma_i^*$ con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni $\omega_i^*$. Determinare inoltre il margine di ampiezza $M_\alpha$.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

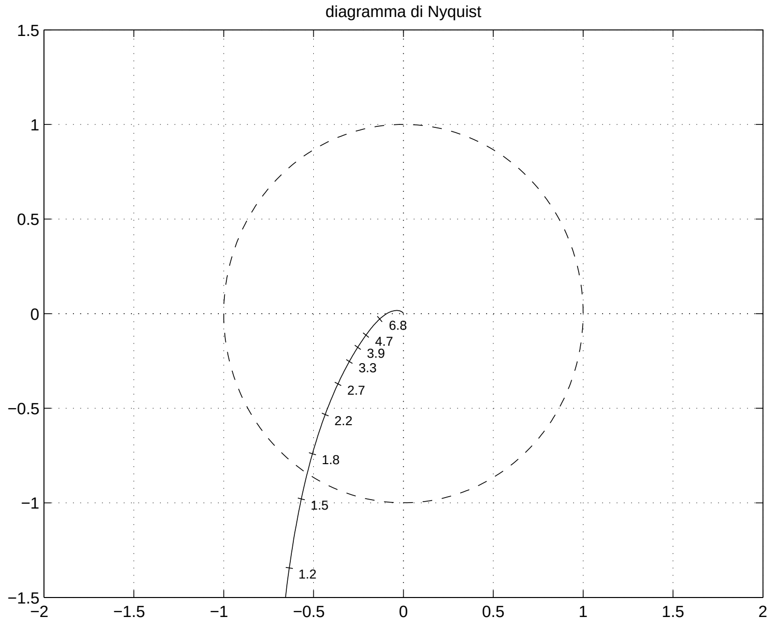



Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = -0.82$.

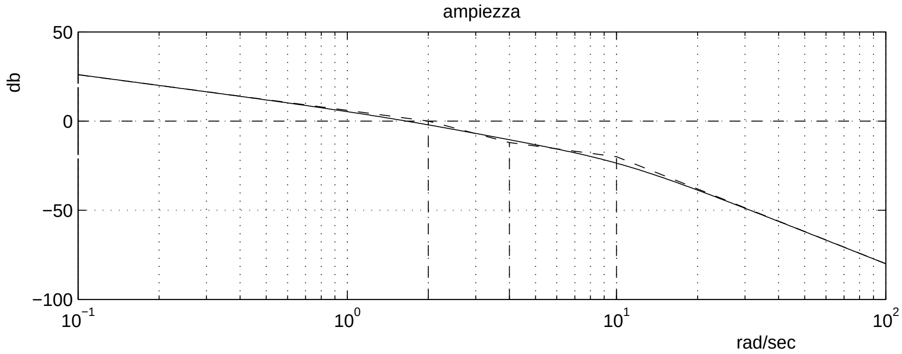
Esiste un'unica intersezione $\sigma^*$ con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

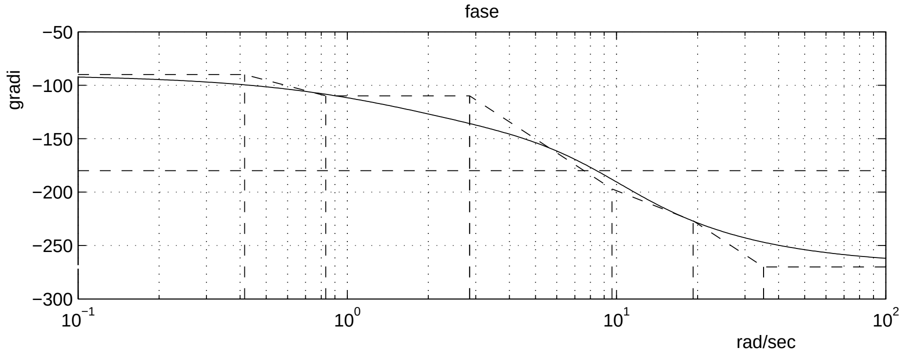
$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.09$$

Il corrispondente valore di $\omega^*$ è 8.34 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 10.82$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 100$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;




e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema pu essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 1.8\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + \cos(0.01\, t)$.

Soluzione: Essendo il sistema retroazionato di tipo passa-basso ed essendo la pulsazione del segnale di ingresso $\omega_r << \omega_T$, l'uscita risulta uguale all'ingresso, percui $y(t) = 5 + \cos(0.01\, t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro $K$. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 2.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro $K$.

Soluzione:

$$\sigma = -4.667$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 8.34\, i$$
$$K^* = 1082$$

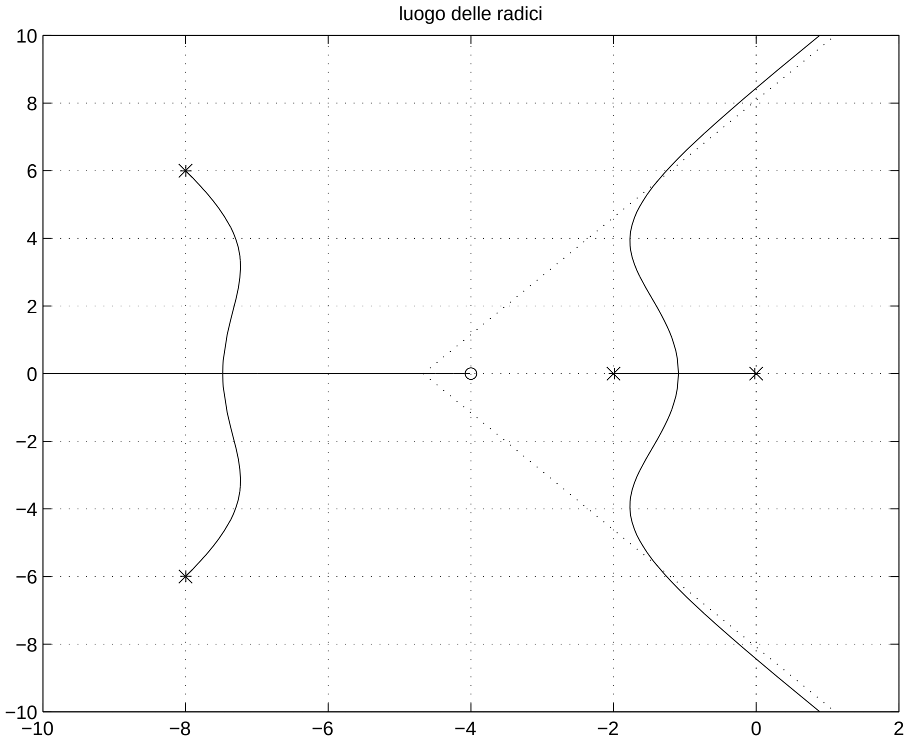



Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

**Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2009/10**

**09 Febbraio 2010 - Esercizi**

| | |
|---|---|
| Nome: | |
| Nr. Mat. | |
| Firma: | |

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all'infinito:

   ○ con una circonferenza percorsa in senso antiorario;
   ⊗ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   ○ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   ○ con una semicirconferenza percorsa in senso orario.

2. Fornire una stima del tempo di assestamento (al 5% del valore finale) del sistema $G(s) = \frac{1}{6s+1}$ chiuso in retroazione negativa con guadagno $K = 100$:

$$T_a = 0.18$$

3. Per $\omega > 0$, il diagramma di Bode reale delle fasi della funzione $G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$ coincide con il diagramma "asintotico" di Bode:

   ○ nei tre punti al finito $\omega_n = 1/\tau$, $\omega_a = \omega_n/4.81$, $\omega_b = 4.81\,\omega_n$.
   ○ in nessun punto al finito;
   ⊗ in un solo punto al finito $\omega_n = 1/\tau$;

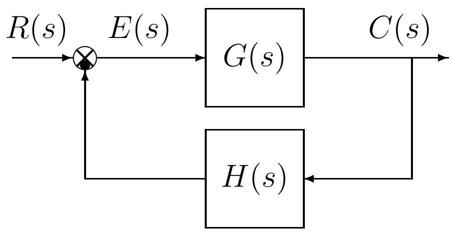
4. Il teorema del valore finale applicato alla funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ afferma che:

$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0^+} s\,F(s)$$

5. Dato il sistema lineare $G(s) = \frac{s+2}{(s+3)(s+4)}$, il valore finale ($T \to \infty$) della risposta $h(t)$ ad un gradino di ampiezza 2 vale;

   ○ $h(\infty) = \infty$
   ⊗ $h(\infty) = \frac{1}{3}$
   ○ $h(\infty) = 1$
   ○ $h(\infty) = 0$

6. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $G(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro $\alpha$ interno alla funzione di trasferimento $G(s)$:




$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)}\,\frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

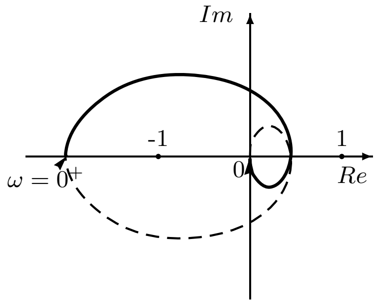
7. Il margine di ampiezza $M_A$ del sistema $G(s) = \frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}$ con $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_3 > 0$ è;

   ○ sempre minore di 1;
   ⊗ sempre maggiore di 1;
   ○ può essere unitario.

8. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$2\,\ddot{x}(t) + 4\,\dot{x}(t) + x(t) = \ddot{u}(t) + 2\,\dot{u}(t) + 3\,u(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s^2 + 2\,s + 3}{2\,s^2 + 4\,s + 1}$$

9. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con tutti i poli a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.




Utilizzando il criterio di Nyquist è possibile affermare che il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è asintoticamente stabile per i seguenti valori di $K$:

- ○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* > 1$;
- ○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* > 1$;
- ○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* < 1$;
- ⊗ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* < 1$;

10. Il margine di fase del sistema $G(s) = 1/s$:

- ○ è nullo;
- ○ è $-\frac{\pi}{2}$;
- ⊗ è $\frac{\pi}{2}$;
- ○ non è definibile.

11. Il segnale $x(t) = 2\,\sin(3\,t)$ viene posto in ingresso ad un sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s) = \frac{1}{s+4}$. L'ampiezza $A$ del segnale d'uscita vale:

$$A = \frac{2}{5}$$

12. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il tempo di assestamento $T_a$ rimane costante al variare della posizione dei poli:

- ○ su di una circonferenza con centro nell'origine;
- ○ su due semirette uscenti dall'origine;
- ⊗ su di una retta parallela all'asse immaginario;
- ○ su di un'ellisse con fuoco nell'origine.

**Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

13. In un sistema con $K_\tau > 0$, per valori del guadagno di retroazione $K > 0$ un punto dell'asse reale appartiene al luogo delle radici se lascia alla sua destra:

- ⊗ un numero totale dispari di zeri e poli;
- ○ un numero totale pari di zeri e poli.
- ○ un numero totale dispari di poli;
- ○ un numero totale pari di poli;

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

- ⊗ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
- ○ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
- ○ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.