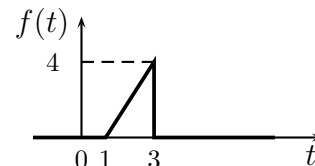


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

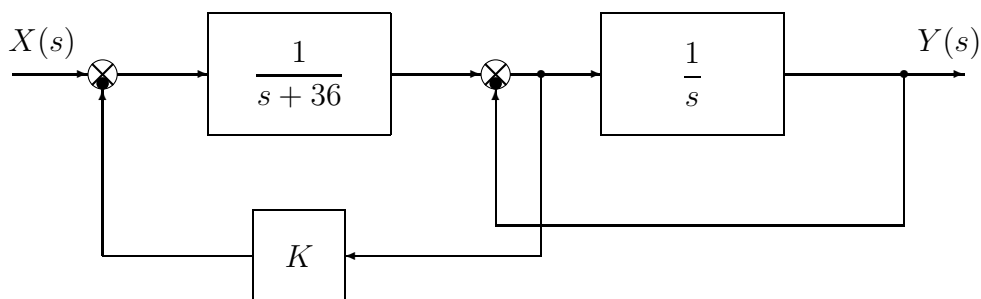
$$x_1(t) = \frac{1}{4} t^3 e^{-2t} + \cos(6\pi t), \quad x_2(t) = 2 \sin(4t - 6),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{-2}{(s+4)(s-3)^2}, \quad G_2(s) = \frac{5}{(s+3)^3}, \quad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+5)(s-1)(s+3)}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -31$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

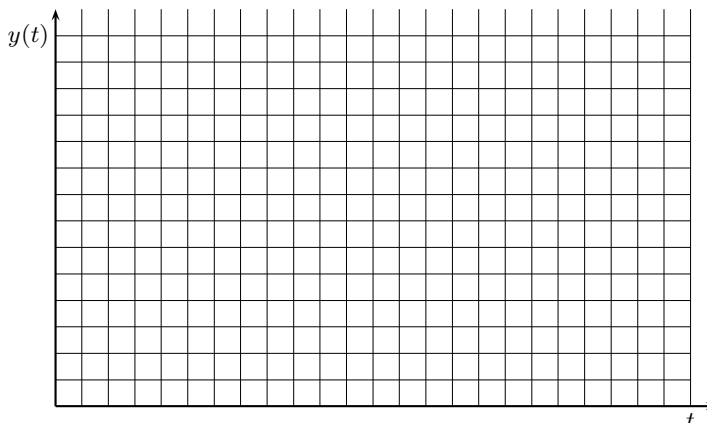
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0 ; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

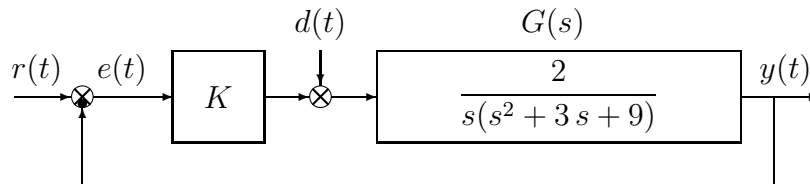
- | | | |
|--------------------------|----------------------------|-----------------------|
| 1) $\sigma = \dots\dots$ | 3) $\omega_n = \dots\dots$ | 5) $K_0 = \dots\dots$ |
| 2) $\omega = \dots\dots$ | 4) $\delta = \dots\dots$ | 6) $T_a = \dots\dots$ |

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 9$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

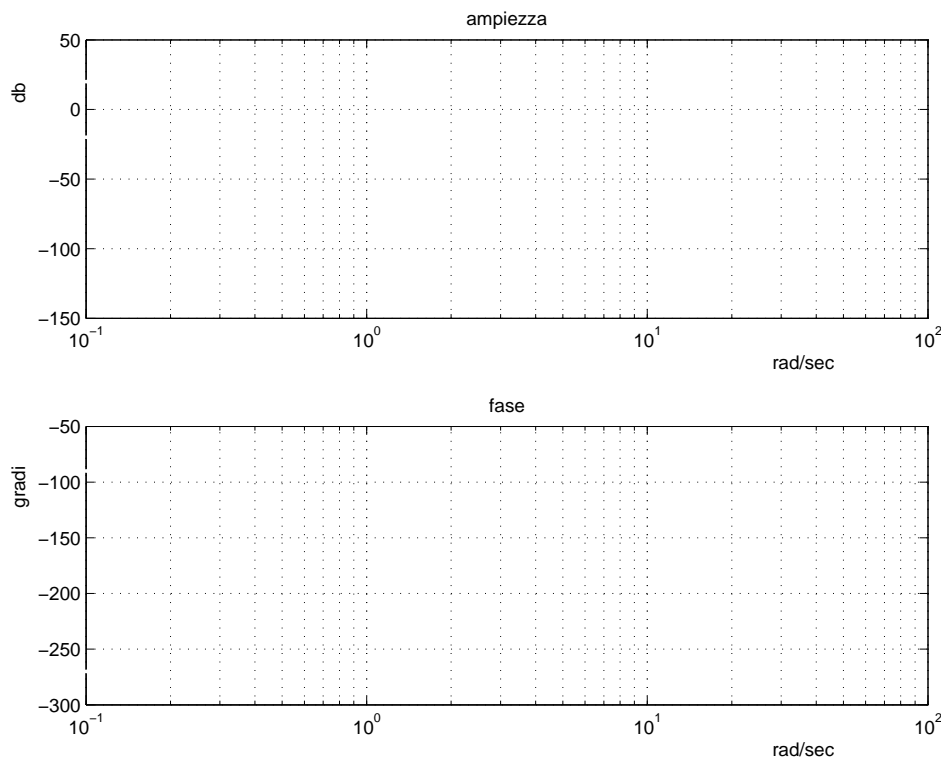
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.5 d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K , l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 4t$.

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α .

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 3 + 4 \cos(0.02t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2008/09

3 Settembre 2009 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di “tipo 2” è caratterizzato da:

- 2 poli nulli;
- 2 poli complessi coniugati;
- grado relativo $n - m = 2$.

2. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist “completo” di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all’infinito:

- con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
- con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
- con una circonferenza percorsa in senso orario;
- con una circonferenza percorsa in senso antiorario.

3. Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma delle fasi:

- solo se il diagramma di Bode presenta pendenze negative o nulle;
- solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
- solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa.

4. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = 2t$ è:

- $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
- $X(s) = \frac{2}{s^2}$;
- $X(s) = \frac{1}{s^3}$;
- $X(s) = \frac{2}{s^3}$.

5. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $0 < \delta < 1$ è caratterizzato da:

- due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
- due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
- due poli reali distinti a parte reale negativa;
- due poli reali distinti a parte reale positiva.

6. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa:

- ha guadagno statico minore di 1;
- ha guadagno statico maggiore di 1;
- ha guadagno statico unitario.

7. Nell’applicazione del criterio di Routh, le radici dell’equazione ausiliaria che si ottiene quando una riga intera della tabella di Routh si annulla:

- sono radici anche dell’equazione caratteristica di partenza;
- sono tutte radici a parte reale nulla;
- sono radici simmetriche rispetto all’origine del piano complesso.

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ è la trasformata di Laplace:

- di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \rightarrow \infty$;
- di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \rightarrow 0$;
- del segnale $x(t) = te^{-(t-3)}$;
- del segnale $x(t) = t^2e^{-3t}$.

9. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

- è una semicirconferenza;
- presenta un asintoto verticale;
- si evolve tutta nel semipiano positivo;
- ha guadagno statico unitario.

10. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s+4}$;

$$T_a =$$

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 1 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

- una pendenza di -20 db/decade per $\omega \rightarrow 0$;
- una pendenza di -40 db/decade per $\omega \rightarrow 0$;
- una pendenza di -20 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$;
- una pendenza di -40 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$.

12. Il valore finale per $t \rightarrow \infty$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{4s+1}{s^2+2}$ vale:

- $g(\infty) = 0$;
- $g(\infty) = 1$;
- $g(\infty) = 2$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Un sistema dinamico $G(s)$ avente i poli e gli zeri posizionati in modo alterno (un polo, uno zero, un polo, uno zero ecc.) sull'asse reale presenta un luogo delle radici:

- che per $K < 0$ si evolve tutto sull'asse reale;
- che per $K > 0$ si evolve tutto sull'asse reale;
- che può evolvere anche al di fuori dell'asse reale.

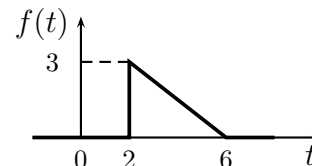
14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

- di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
- di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
- delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

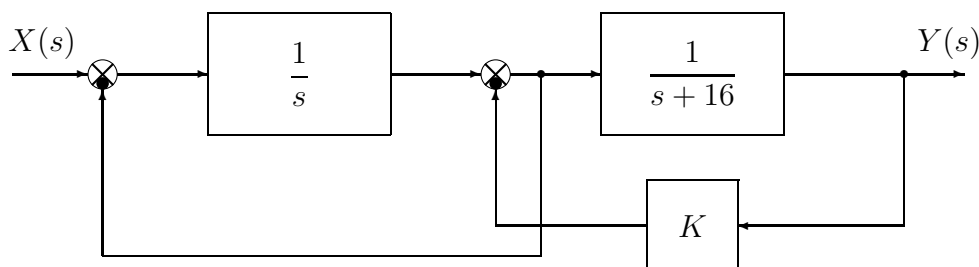
$$x_1(t) = \frac{1}{2} t^3 e^{-t} + 2 \sin(7\pi t), \quad x_2(t) = 4 \cos(3t - 8),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{3}{(s-4)(s+5)^2}, \quad G_2(s) = -\frac{7}{(s+2)^3}, \quad G_3(s) = \frac{s+2}{(s-4)(s-2)(s+5)}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -13$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

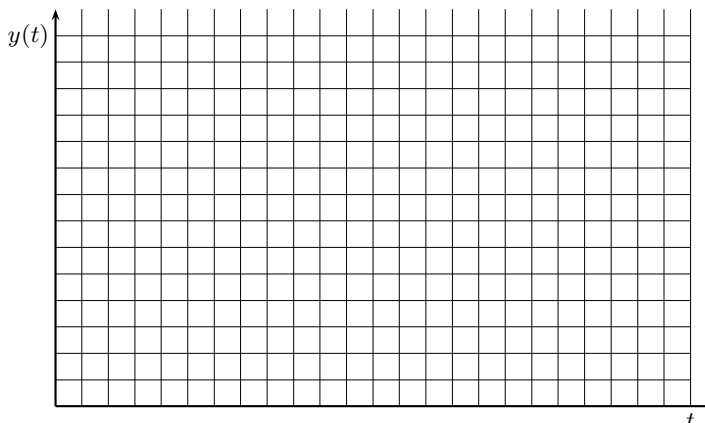
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0 ; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

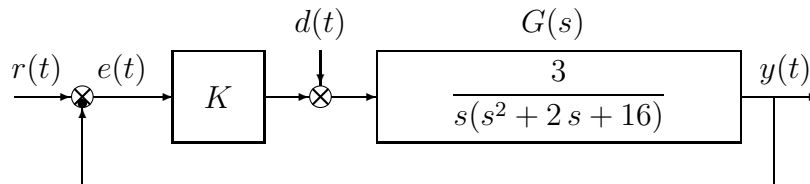
- | | | |
|--------------------------|----------------------------|-----------------------|
| 1) $\sigma = \dots\dots$ | 3) $\omega_n = \dots\dots$ | 5) $K_0 = \dots\dots$ |
| 2) $\omega = \dots\dots$ | 4) $\delta = \dots\dots$ | 6) $T_a = \dots\dots$ |

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 8$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

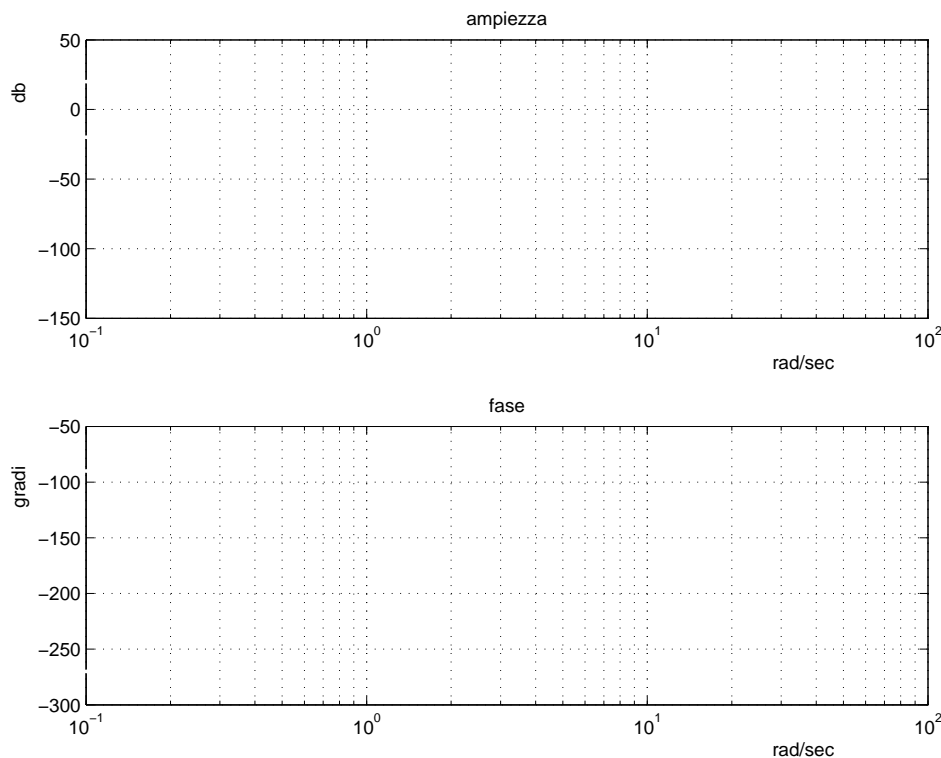
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.4 d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K , l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3t$.

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α .

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 2 + 5 \cos(0.01t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2008/09

3 Settembre 2009 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di “tipo 2” è caratterizzato da:

- grado relativo $n - m = 2$;
- 2 poli complessi coniugati;
- 2 poli nulli.

2. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist “completo” di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all’infinito:

- con una circonferenza percorsa in senso antiorario;
- con una circonferenza percorsa in senso orario;
- con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
- con una semicirconferenza percorsa in senso orario.

3. Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma delle fasi:

- solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
- solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa;
- solo se il diagramma di Bode presenta pendenze negative o nulle.

4. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = 2t$ è:

- $X(s) = \frac{1}{s^3}$;
- $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
- $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
- $X(s) = \frac{2}{s^2}$.

5. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $0 < \delta < 1$ è caratterizzato da:

- due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
- due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
- due poli reali distinti a parte reale positiva;
- due poli reali distinti a parte reale negativa.

6. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa:

- ha guadagno statico unitario;
- ha guadagno statico minore di 1;
- ha guadagno statico maggiore di 1.

7. Nell’applicazione del criterio di Routh, le radici dell’equazione ausiliaria che si ottiene quando una riga intera della tabella di Routh si annulla:

- sono tutte radici a parte reale nulla;
- sono radici simmetriche rispetto all’origine del piano complesso;
- sono radici anche dell’equazione caratteristica di partenza.

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ è la trasformata di Laplace:

- del segnale $x(t) = t^2 e^{-3t}$;
- del segnale $x(t) = t e^{-(t-3)}$;
- di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \rightarrow 0$;
- di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \rightarrow \infty$.

9. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

- ha guadagno statico unitario;
- si evolve tutta nel semipiano positivo;
- presenta un asintoto verticale;
- è una semicirconferenza.

10. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s+8}$;

$$T_a =$$

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 1 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

- una pendenza di -40 db/decade per $\omega \rightarrow 0$;
- una pendenza di -20 db/decade per $\omega \rightarrow 0$;
- una pendenza di -40 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$;
- una pendenza di -20 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$.

12. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2s+3}{s^2+1}$ vale:

- $g(0^+) = 0$;
- $g(0^+) = 1$;
- $g(0^+) = 2$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Un sistema dinamico $G(s)$ avente i poli e gli zeri posizionati in modo alterno (un polo, uno zero, un polo, uno zero ecc.) sull'asse reale presenta un luogo delle radici:

- che può evolvere anche al di fuori dell'asse reale;
- che per $K > 0$ si evolve tutto sull'asse reale;
- che per $K < 0$ si evolve tutto sull'asse reale.

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

- di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
- di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
- delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.

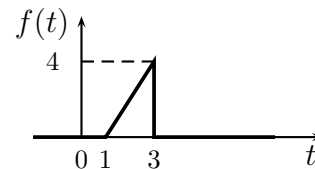
Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2008/09
3 Settembre 2009 - Esercizi
Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{1}{4} t^3 e^{-2t} + \cos(6\pi t),$$

$$x_2(t) = 2 \sin(4t - 6),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{3}{2(s+2)^4} + \frac{s}{s^2 + 36\pi^2},$$

$$X_2(s) = \frac{8e^{-3s/2}}{s^2 + 16},$$

$$X_3(s) = \frac{2}{s} \left[\frac{e^{-s}}{s} - 2e^{-3s} - \frac{e^{-3s}}{s} \right]$$

b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{-2}{(s+4)(s-3)^2},$$

$$G_2(s) = \frac{5}{(s+3)^3},$$

$$G_3(s) = \frac{s+1}{(s+5)(s-1)(s+3)}$$

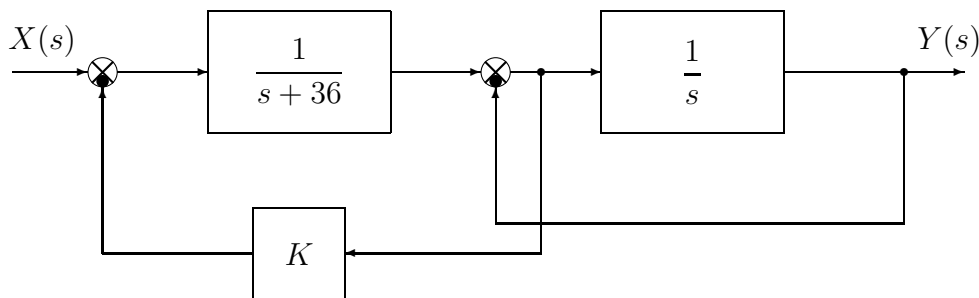
Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{2}{49} e^{-4t} + \frac{2}{49} e^{3t} - \frac{2}{7} t e^{3t},$$

$$g_2(t) = \frac{5}{2} t^2 e^{-3t},$$

$$g_3(t) = -\frac{1}{3} e^{-5t} + \frac{1}{12} e^t + \frac{1}{4} e^{-3t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -31$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 6s + 36}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0 ; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

1) $\sigma = -3$

3) $\omega_n = 6$

5) $K_0 = \frac{1}{36}$

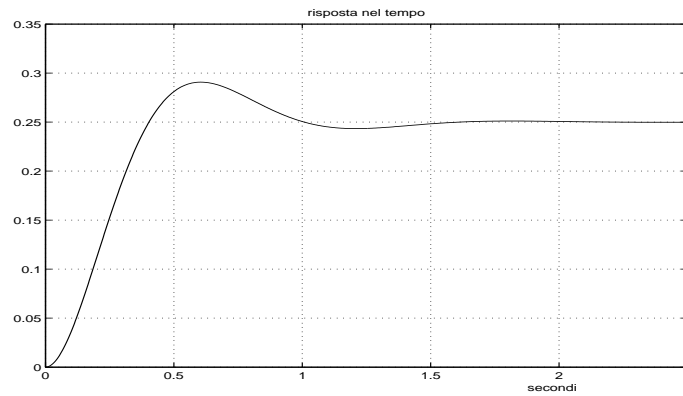
2) $\omega = 5.2$

4) $\delta = 0.5$

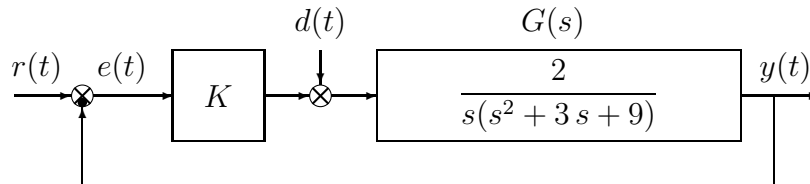
6) $T_a = 1$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 9$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{2K}{s(s^2 + 3s + 9)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 3s^2 + 9s + 2K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 9 & \\ 2 & 3 & 2K & \\ 1 & 9 - \frac{2}{3}K & & \\ 0 & 2K & & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \quad K < \frac{27}{2}$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = \frac{27}{2}$ è:

$$\omega^* = \sqrt{9} = 3$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.5 d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0) d_0}{1 + K G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.5 d_0$$

Il sistema $G(s)$ è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 2$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K , l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 4t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{4}{K_v}$ con $K_v = \frac{2K}{9}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{18}{K}$$

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” del guadagno d’anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell’asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l’asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α .

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

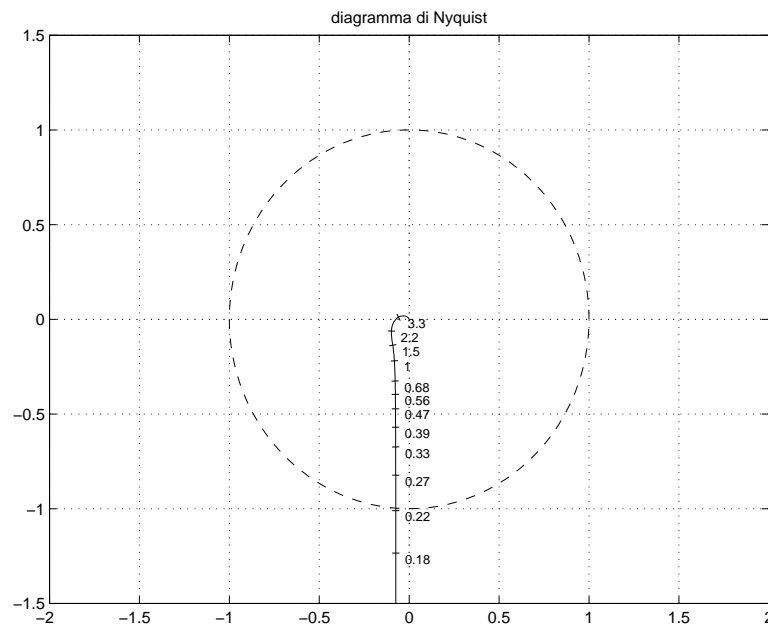


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau \Delta_a = -0.07407$.

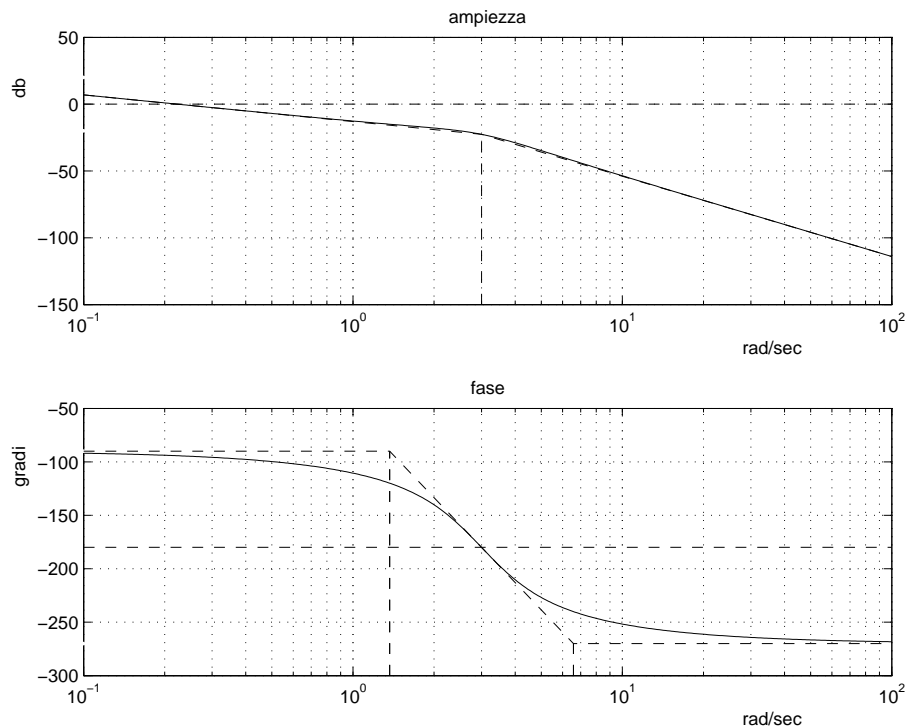
Esiste un’unica intersezione σ^* con l’asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall’analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.07407$$

Il corrispondente valore di ω^* è 3 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = \frac{27}{2}$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell’esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.24 \text{ rad/s}$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 3 + 4 \cos(0.02t)$.

Soluzione: Essendo il sistema retroazionato di tipo passa-basso ed essendo la pulsazione del segnale di ingresso $\omega_r \ll \omega_T$, con buona approssimazione l'uscita risulta uguale al segnale d'ingresso, per cui $y(t) = 3 + 4 \cos(0.02t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

Soluzione:

$$\begin{aligned} \sigma &= -1 \\ \phi &= 60, 180, 300 \\ s^* &= 3i \\ K^* &= \frac{27}{2} \end{aligned}$$

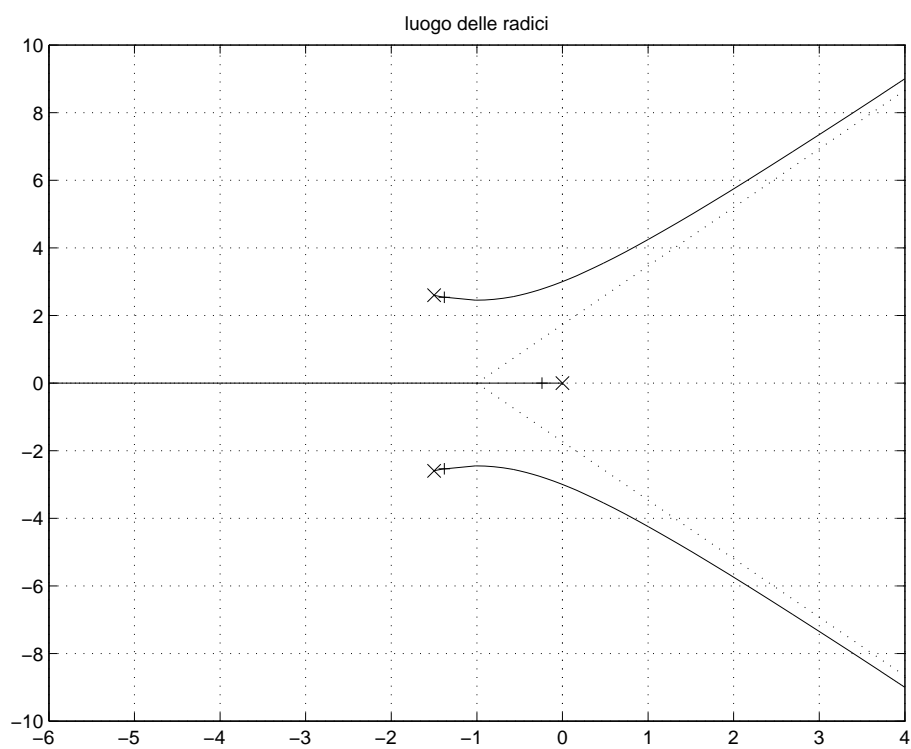


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2008/09

3 Settembre 2009 - Domande Teoriche

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di “tipo 2” è caratterizzato da:

- 2 poli nulli;
- 2 poli complessi coniugati;
- grado relativo $n - m = 2$.

2. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist “completo” di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all’infinito:

- con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
- con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
- con una circonferenza percorsa in senso orario;
- con una circonferenza percorsa in senso antiorario.

3. Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma delle fasi:

- solo se il diagramma di Bode presenta pendenze negative o nulle;
- solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
- solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa.

4. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = 2t$ è:

- $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
- $X(s) = \frac{2}{s^2}$;
- $X(s) = \frac{1}{s^3}$;
- $X(s) = \frac{2}{s^3}$.

5. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $0 < \delta < 1$ è caratterizzato da:

- due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
- due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
- due poli reali distinti a parte reale negativa;
- due poli reali distinti a parte reale positiva.

6. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa:

- ha guadagno statico minore di 1;
- ha guadagno statico maggiore di 1;
- ha guadagno statico unitario.

7. Nell’applicazione del criterio di Routh, le radici dell’equazione ausiliaria che si ottiene quando una riga intera della tabella di Routh si annulla:

- sono radici anche dell’equazione caratteristica di partenza;
- sono tutte radici a parte reale nulla;
- sono radici simmetriche rispetto all’origine del piano complesso.

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ è la trasformata di Laplace:

- di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \rightarrow \infty$;
- di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \rightarrow 0$;
- del segnale $x(t) = te^{-(t-3)}$;
- del segnale $x(t) = t^2e^{-3t}$.

9. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

- è una semicirconferenza;
- presenta un asintoto verticale;
- si evolve tutta nel semipiano positivo;
- ha guadagno statico unitario.

10. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s+4}$;

$$T_a = \frac{3}{4}$$

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 1 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

- una pendenza di -20 db/decade per $\omega \rightarrow 0$;
- una pendenza di -40 db/decade per $\omega \rightarrow 0$;
- una pendenza di -20 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$;
- una pendenza di -40 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$.

12. Il valore finale per $t \rightarrow \infty$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{4s+1}{s^2+2}$ vale:

- $g(\infty) = 0$;
- $g(\infty) = 1$;
- $g(\infty) = 2$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Un sistema dinamico $G(s)$ avente i poli e gli zeri posizionati in modo alterno (un polo, uno zero, un polo, uno zero ecc.) sull'asse reale presenta un luogo delle radici:

- che per $K < 0$ si evolve tutto sull'asse reale;
- che per $K > 0$ si evolve tutto sull'asse reale;
- che può evolvere anche al di fuori dell'asse reale.

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

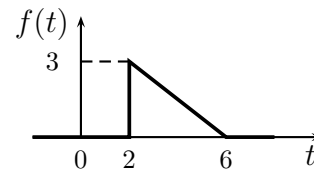
- di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
- di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
- delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.

Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2008/09
3 Settembre 2009 - Esercizi
Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{1}{2} t^3 e^{-t} + 2 \sin(7\pi t), \quad x_2(t) = 4 \cos(3t - 8),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{3}{(s+1)^4} + \frac{14\pi}{s^2 + 49\pi^2}, \quad X_2(s) = \frac{4s e^{-8s/3}}{s^2 + 9}, \quad X_3(s) = \frac{3}{s} \left[-\frac{e^{-2s}}{4s} + e^{-2s} + \frac{e^{-6s}}{4s} \right]$$

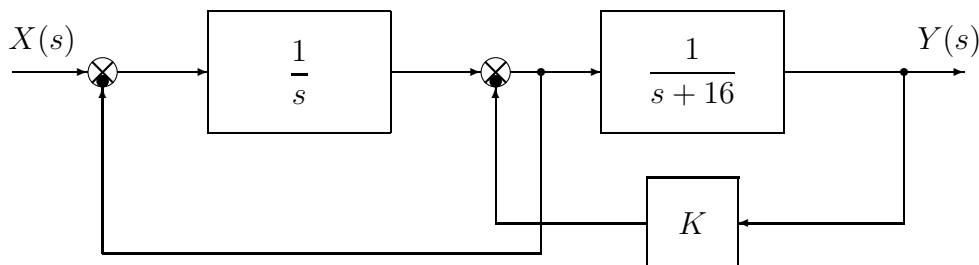
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{3}{(s-4)(s+5)^2}, \quad G_2(s) = -\frac{7}{(s+2)^3}, \quad G_3(s) = \frac{s+2}{(s-4)(s-2)(s+5)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{1}{27} e^{4t} - \frac{1}{27} e^{-5t} - \frac{1}{3} t e^{-5t}, \quad g_2(t) = -\frac{7}{2} t^2 e^{-2t}, \quad g_3(t) = \frac{1}{3} e^{4t} - \frac{4}{14} e^{2t} - \frac{1}{21} e^{-5t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -13$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

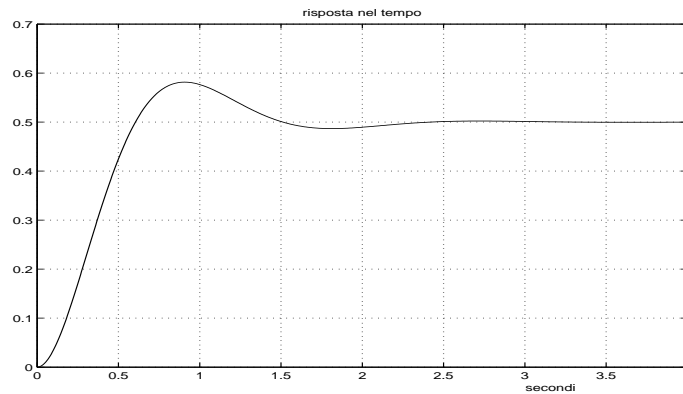
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s + 16}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0 ; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

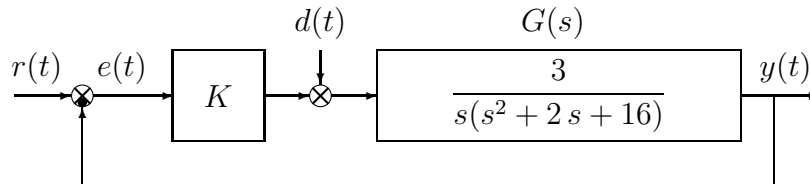
$$\begin{array}{lll} 1) \sigma = -2 & 3) \omega_n = 4 & 5) K_0 = \frac{1}{16} \\ 2) \omega = 3.5 & 4) \delta = 0.5 & 6) T_a = 1.5 \end{array}$$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 8$.

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{3K}{s(s^2 + 2s + 16)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + 2s^2 + 16s + 3K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 3 & 1 & 16 & \\ 2 & 2 & 3K & \\ 1 & 16 - \frac{3}{2}K & & \\ 0 & 3K & & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \quad K < \frac{32}{3}$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = \frac{32}{3}$ è:

$$\omega^* = \sqrt{16} = 4$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.4 d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0) d_0}{1 + K G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.4 d_0$$

Il sistema $G(s)$ è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 2.5$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K , l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{3}{K_v}$ con $K_v = \frac{3K}{16}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{16}{K}$$

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” del guadagno d’anello $K G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell’asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l’asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^* . Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α .

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

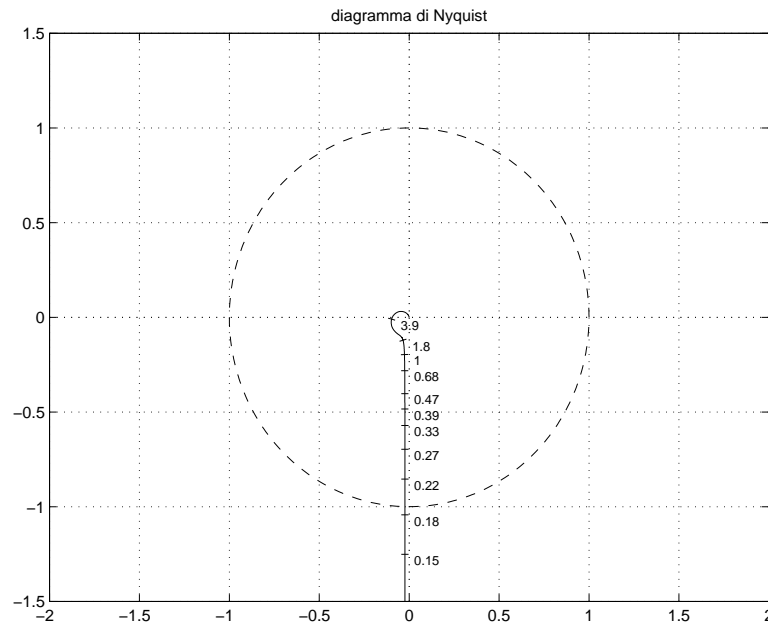


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_r \Delta_a = -0.02344$.

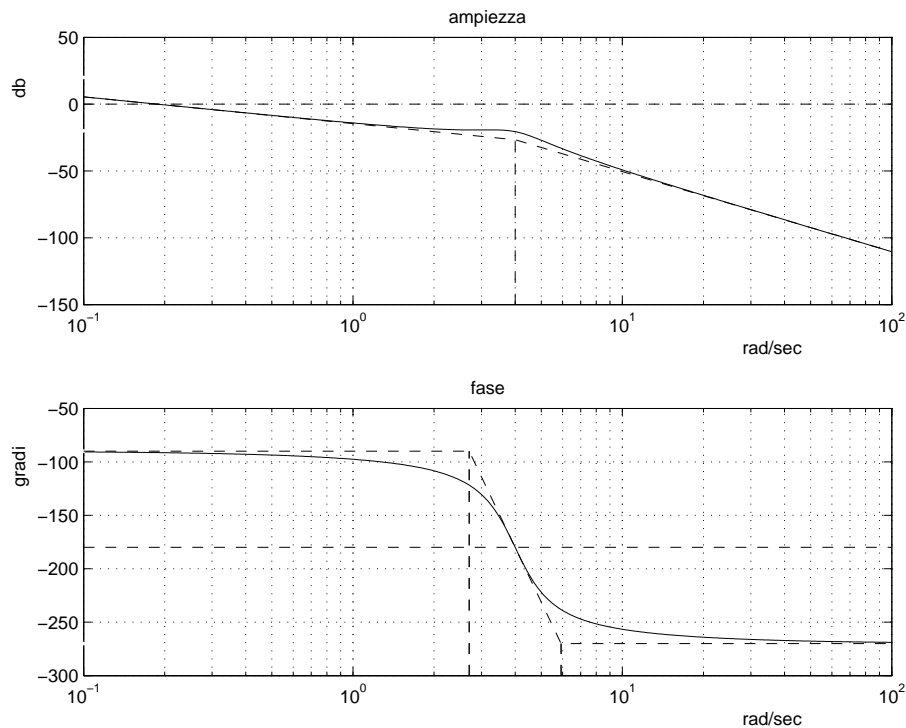
Esiste un’unica intersezione σ^* con l’asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall’analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.09375$$

Il corrispondente valore di ω^* è 4 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = \frac{32}{3}$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell’esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.2 \text{ rad/s}$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 2 + 5 \cos(0.01 t)$.

Soluzione: Essendo il sistema retroazionato di tipo passa-basso ed essendo la pulsazione del segnale di ingresso $\omega_r \ll \omega_T$, con buona approssimazione l'uscita risulta uguale al segnale d'ingresso, per cui $y(t) = 2 + 5 \cos(0.01 t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K . Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K .

Soluzione:

$$\begin{aligned} \sigma &= -0.667 \\ \phi &= 60, 180, 300 \\ s^* &= 4i \\ K^* &= \frac{32}{3} \end{aligned}$$

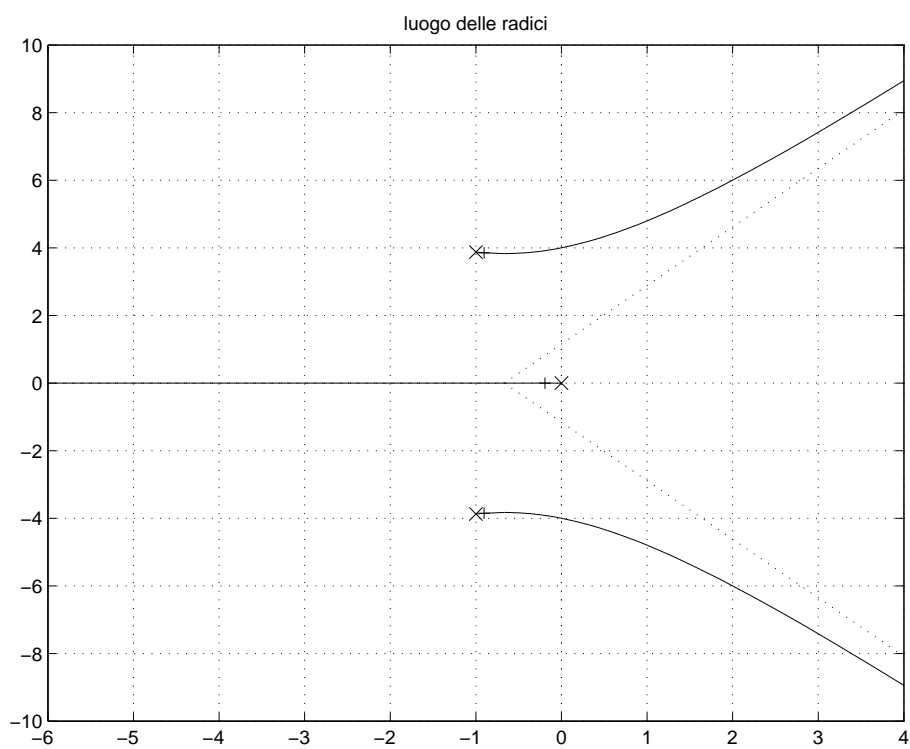


Figura 4: Luogo delle radici di $G(s)$.

**Fondamenti di Controlli Automatici -
A.A. 2008/09
3 Settembre 2009 - Domande Teoriche
Compito B Nr.**

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

- Un sistema di “tipo 2” è caratterizzato da:
 - grado relativo $n - m = 2$;
 - 2 poli complessi coniugati;
 - 2 poli nulli.
- Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist “completo” di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all’infinito:
 - con una circonferenza percorsa in senso antiorario;
 - con una circonferenza percorsa in senso orario;
 - con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
 - con una semicirconferenza percorsa in senso orario.
- Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di $G(j\omega)$, da esso si può dedurre il diagramma delle fasi:
 - solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
 - solo se il sistema $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale negativa;
 - solo se il diagramma di Bode presenta pendenze negative o nulle.
- La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = 2t$ è:
 - $X(s) = \frac{1}{s^3}$;
 - $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
 - $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
 - $X(s) = \frac{2}{s^2}$.
- Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $0 < \delta < 1$ è caratterizzato da:
 - due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
 - due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
 - due poli reali distinti a parte reale positiva;
 - due poli reali distinti a parte reale negativa.
- Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa:
 - ha guadagno statico unitario;
 - ha guadagno statico minore di 1;
 - ha guadagno statico maggiore di 1.
- Nell’applicazione del criterio di Routh, le radici dell’equazione ausiliaria che si ottiene quando una riga intera della tabella di Routh si annulla:
 - sono tutte radici a parte reale nulla;
 - sono radici simmetriche rispetto all’origine del piano complesso;
 - sono radici anche dell’equazione caratteristica di partenza.

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ è la trasformata di Laplace:

- del segnale $x(t) = t^2 e^{-3t}$;
- del segnale $x(t) = t e^{-(t-3)}$;
- di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \rightarrow 0$;
- di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \rightarrow \infty$.

9. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

- ha guadagno statico unitario;
- si evolve tutta nel semipiano positivo;
- presenta un asintoto verticale;
- è una semicirconferenza.

10. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s+8}$;

$$T_a = \frac{3}{8}$$

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 1 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

- una pendenza di -40 db/decade per $\omega \rightarrow 0$;
- una pendenza di -20 db/decade per $\omega \rightarrow 0$;
- una pendenza di -40 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$;
- una pendenza di -20 db/decade per $\omega \rightarrow \infty$.

12. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2s+3}{s^2+1}$ vale:

- $g(0^+) = 0$;
- $g(0^+) = 1$;
- $g(0^+) = 2$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Un sistema dinamico $G(s)$ avente i poli e gli zeri posizionati in modo alterno (un polo, uno zero, un polo, uno zero ecc.) sull'asse reale presenta un luogo delle radici:

- che può evolvere anche al di fuori dell'asse reale;
- che per $K > 0$ si evolve tutto sull'asse reale;
- che per $K < 0$ si evolve tutto sull'asse reale.

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

- di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
- di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
- delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.