Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09

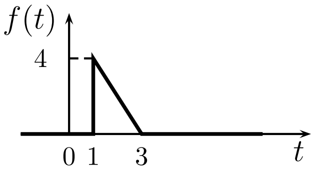
21 Luglio 2009 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

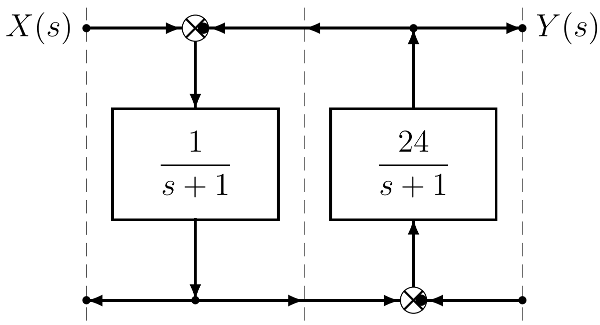
$$x_1(t) = t^3\, e^{-2\,t} + 4\,\cos(2\,\pi\, t), \qquad x_2(t) = 5\,\sin(2\,t-2),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{s-2}{(s+2)\,(s-5)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{6}{(s+1)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+2)\,(s-3)\,(s+4)}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

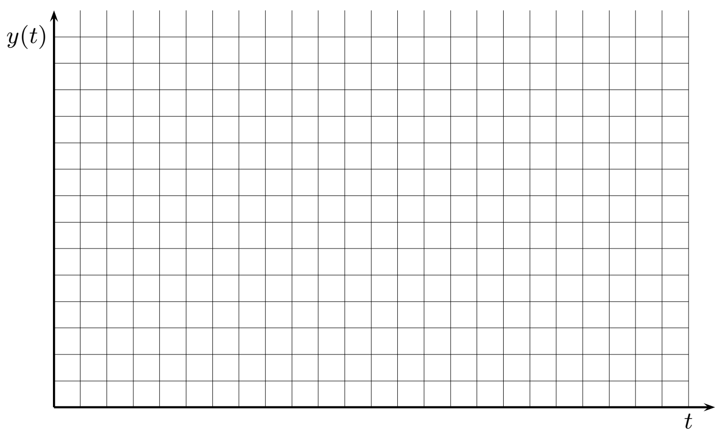
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

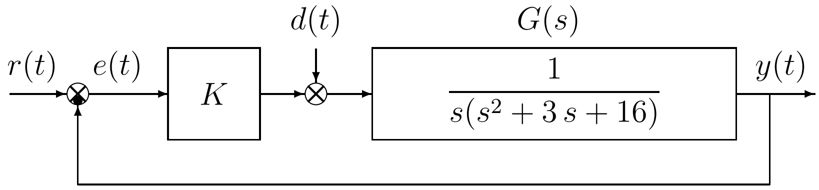
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 2$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



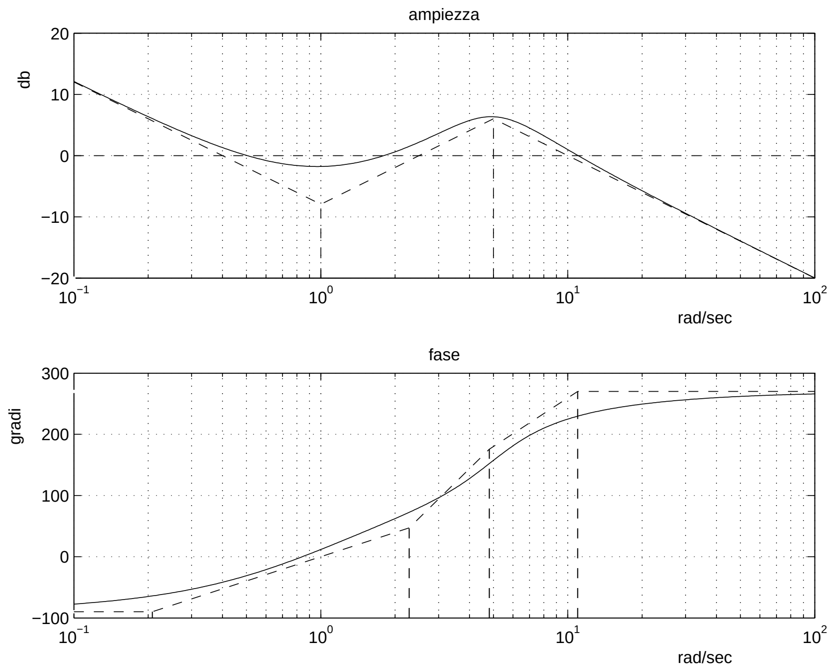
d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2\, d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

d.4) Posto $K = 10$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:



e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:
$x(t) = 2\cos(5\,t + \pi/3)$;

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

$G(s) =$

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09

21 Luglio 2009 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. La banda passante di un sistema in retroazione si può ricavare dallo studio del diagramma di Bode del sistema in catena aperta valutando la pulsazione alla quale:
   - ◯ la fase della risposta armonica del sistema è pari a $0\ rad$;
   - ◯ la fase della risposta armonica del sistema è pari a $\frac{\pi}{2}\ rad$;
   - ◯ il modulo della risposta armonica del sistema è pari a $0\ dB$;
   - ◯ il modulo della risposta armonica del sistema è pari a $-6\ dB$.
2. Ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima colonna della tabella di Routh corrisponde:
   - ◯ una radice a parte reale positiva;
   - ◯ una radice a parte reale negativa;
   - ◯ una coppia di radici complesse conuigate a parte reale positiva;
   - ◯ una coppia di radici complesse conuigate a parte reale negativa.
3. La formula di Mason permette di:
   - ◯ calcolare il coefficiente di trasmittanza di un grafo;
   - ◯ calcolare la funzione di trasferimento di uno schema a blocchi;
   - ◯ analizzare la stabilità di un sistema dinamico lineare stazionario;
   - ◯ analizzare la stabilità di un sistema chiuso in retroazione unitaria.
4. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $\delta < -1$ è caratterizzato da:
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale negativa;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva.
5. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

   $$5\,\dddot{y}(t)+2\,\ddot{y}(t)+3\,\dot{y}(t)+y(t) = 4\,\dot{x}(t)+3\,x(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

6. Un sistema strettamente proprio:
   - ◯ ha un polo nell'origine;
   - ◯ ha uno zero nell'origine;
   - ◯ ha grado relativo strettamente positivo;
   - ◯ può avere grado relativo nullo.
7. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = 2\,t^2$ è:
   - ◯ $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
   - ◯ $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
   - ◯ $X(s) = \frac{4}{s^3}$.

8. Determinare una stima del tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+27\,s+72}$;

$$T_a \simeq$$

9. I termini di una riga della tabella di Routh possono essere tutti nulli:

- ◯ in corrispondenza di una radice a parte reale positiva;
- ◯ in corrispondenza di una coppia di radici complesse coniugate;
- ◯ in corrispondenza di una riga dispari;
- ◯ in corrispondenza di una riga pari.

10. Il criterio di Nyquist afferma che condizione neccessaria e sufficiente affinchè un sistema con guadagno d'anello $G(s)$ sia stabile una volta chiuso in retroazione è che il diagramma polare completo di $G(j\omega)$:

- ◯ passi per il punto $-1 + j0$;
- ◯ non passi per il punto $-1 + j0$;
- ◯ circondi il punto $-1 + j0$ in senso antiorario tante volte quanti sono i poli di $G(s)$ a parte reale positiva ;
- ◯ circondi il punto $-1 + j0$ in senso orario tante volte quanti sono i poli di $G(s)$ a parte reale positiva .

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

- ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
- ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
- ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
- ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati a modulo costante costante è formato da:

- ◯ una circonferenza centrata nell'origine;
- ◯ due semirette uscenti dall'origine;
- ◯ una retta parallela all'asse immaginario;
- ◯ due rette parallele all'asse reale.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. In corrispondenza di un punto di diramazione nel luogo delle radici di un sistema dinamico $G(s)$:

- ◯ vi sono radici complesse coniugate nell'equazione caratteristica del sistema;
- ◯ hanno origine rami che dividono il piano complesso in parti uguali;
- ◯ i rami del luogo delle radici sono costituiti da semirette;
- ◯ i rami del luogo delle radici sono perpendicolari fra di loro.

14. Il teorema del baricentro si applica:

- ◯ a sistemi strettamente propri;
- ◯ a sistemi con grado relativo maggiore di 1;
- ◯ anche a sistemi impropri;
- ◯ anche se il grado relativo è nullo.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09

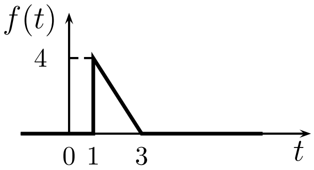
21 Luglio 2009 - Esercizi

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = t^3\, e^{-2\,t} + 4\,\cos(2\,\pi\,t), \qquad x_2(t) = 5\,\sin(2\,t-2),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{6}{(s+2)^4} + \frac{4\,s}{s^2+4\,\pi^2}, \qquad X_2(s) = \frac{10\,e^{-s}}{s^2+4}, \qquad X_3(s) = \frac{2}{s}\left[-\frac{e^{-s}}{s} + 2\,e^{-s} + \frac{e^{-3\,s}}{s}\right]$$

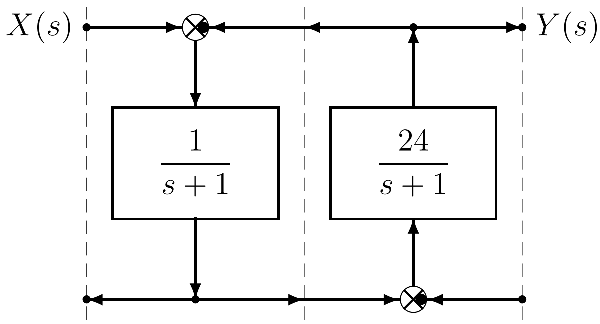
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{s-2}{(s+2)\,(s-5)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{6}{(s+1)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+2)\,(s-3)\,(s+4)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{4}{49}\,e^{-2\,t} + \frac{4}{49}\,e^{5\,t} + \frac{3}{7}\,t\,e^{5\,t}, \qquad g_2(t) = 3\,t^2\,e^{-t}, \qquad g_3(t) = \frac{1}{10}\,e^{-2\,t} + \frac{4}{35}\,e^{3\,t} - \frac{3}{14}\,e^{-4\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

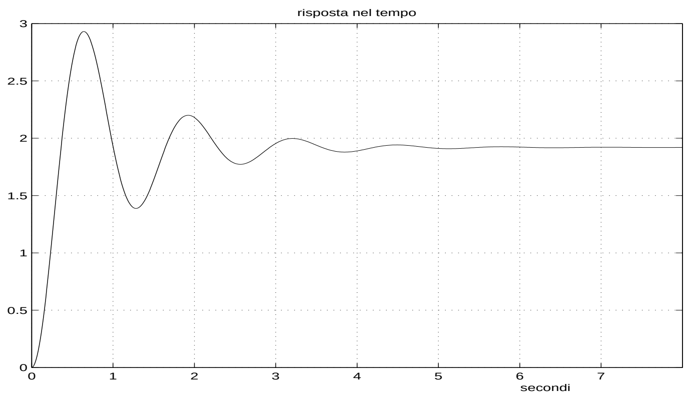
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{24}{s^2+2\,s+25}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

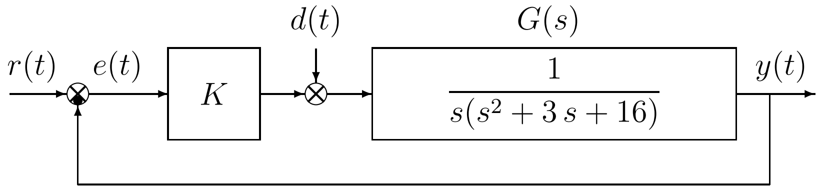
1) $\sigma = -1$ 3) $\omega_n = 5$ 5) $K_0 = 0.96$

2) $\omega = 4.89$ 4) $\delta = 0.2$ 6) $T_a = 3$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 2$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+\frac{K}{s\,(s^2+3\,s+16)}=0 \qquad \rightarrow \qquad s^3+3\,s^2+16\,s+K=0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 16 \\ 2 & 3 & K \\ 1 & 16-\frac{1}{3}K & \\ 0 & K & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K>0, \qquad\qquad K<48$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^*=48$ è:

$$\omega^*=\sqrt{16}=4$$

d.2) Posto $r(t)=0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t)=d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty=0.2\,d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t)=d_0$ è

$$y_\infty=\frac{G(0)\,d_0}{1+K\,G(0)}=\frac{d_0}{K}=0.2\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico è infinito $G(0)=\infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K=5$.

d.3) Posto $d(t)=0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t)=3\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty=\frac{3}{K_v}$ con $K_v=\frac{K}{16}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty=\frac{48}{K}.$$

d.4) Posto $K=10$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega\in[0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a=-0.117$.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^*=-\frac{1}{K^*}=-\frac{5}{24}$$

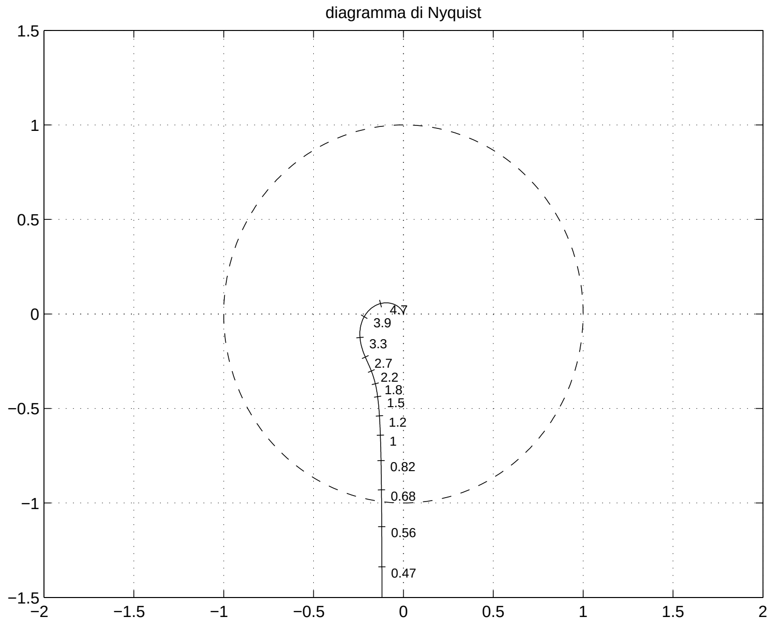
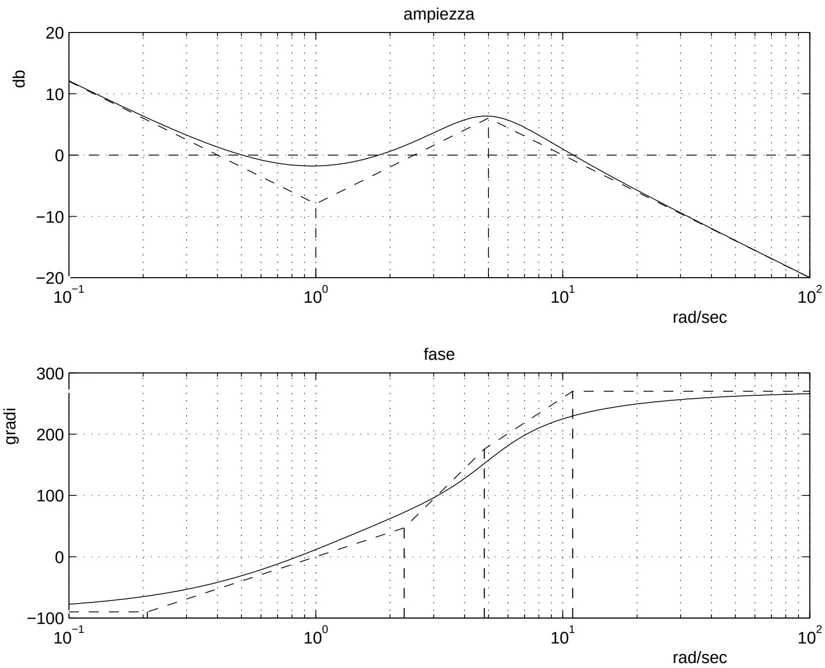


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0, \infty]$.

Il corrispondente valore di ω^* è 4 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 4.8$.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:



e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:
$x(t) = 2\cos(5\,t + \pi/3)$;

$y_\infty(t) = 4\cos(5\,t + 4\,\pi/3)$

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

$$G(s) = \frac{10\,(s+1)^2}{s\,(s^2 - 5\,s + 25)}$$

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 2.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

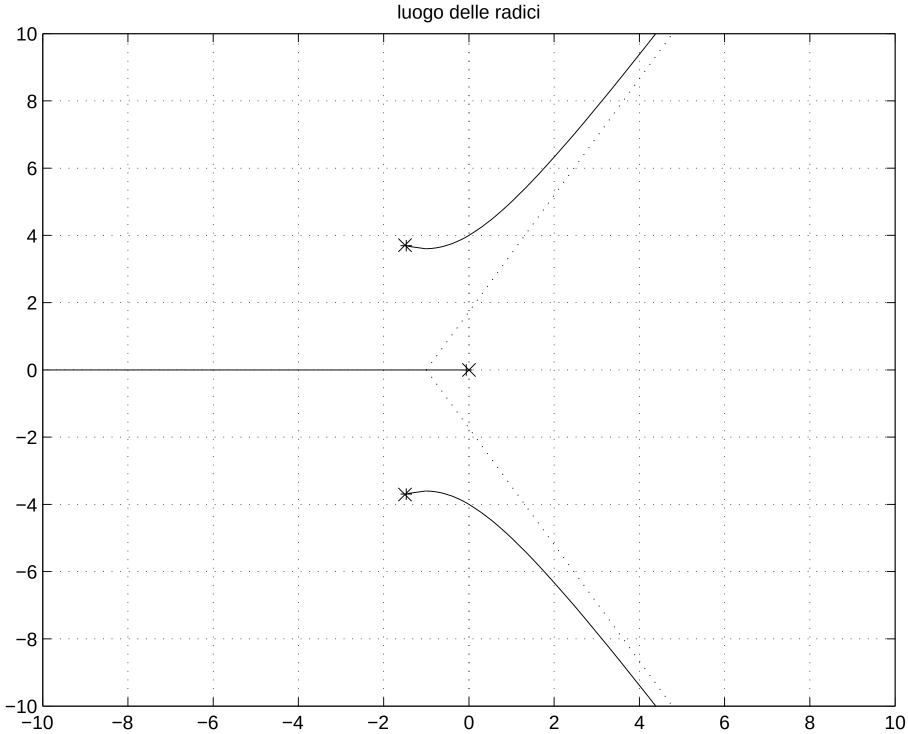


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

Soluzione:

$$\sigma = -1$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 4\,i$$
$$K^* = 48$$

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09

21 Luglio 2009 - Domande Teoriche

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. La banda passante di un sistema in retroazione si può ricavare dallo studio del diagramma di Bode del sistema in catena aperta valutando la pulsazione alla quale:
   - ◯ la fase della risposta armonica del sistema è pari a 0 rad;
   - ◯ la fase della risposta armonica del sistema è pari a $\frac{\pi}{2}$ rad;
   - ⊗ il modulo della risposta armonica del sistema è pari a 0 dB;
   - ◯ il modulo della risposta armonica del sistema è pari a -6 dB.
2. Ad ogni variazione di segno che presentano i termini della prima colonna della tabella di Routh corrisponde:
   - ⊗ una radice a parte reale positiva;
   - ◯ una radice a parte reale negativa;
   - ◯ una coppia di radici complesse conuigate a parte reale positiva;
   - ◯ una coppia di radici complesse conuigate a parte reale negativa.
3. La formula di Mason permette di:
   - ⊗ calcolare il coefficiente di trasmittanza di un grafo;
   - ⊗ calcolare la funzione di trasferimento di uno schema a blocchi;
   - ◯ analizzare la stabilità di un sistema dinamico lineare stazionario;
   - ◯ analizzare la stabilità di un sistema chiuso in retroazione unitaria.
4. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $\delta < -1$ è caratterizzato da:
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale negativa;
   - ⊗ due poli reali distinti a parte reale positiva.
5. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$5\,\dddot{y}(t) + 2\,\ddot{y}(t) + 3\,\dot{y}(t) + y(t) = 4\,\dot{x}(t) + 3\,x(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{4\,s + 3}{5\,s^3 + 2\,s^2 + 3\,s + 1}$$

6. Un sistema strettamente proprio:
   - ◯ ha un polo nell'origine;
   - ◯ ha uno zero nell'origine;
   - ⊗ ha grado relativo strettamente positivo;
   - ◯ può avere grado relativo nullo.
7. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = 2\,t^2$ è:
   - ◯ $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
   - ◯ $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
   - ⊗ $X(s) = \frac{4}{s^3}$.

8. Determinare una stima del tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+27\,s+72}$;

$$T_a \simeq \frac{3}{2}$$

9. I termini di una riga della tabella di Routh possono essere tutti nulli:

   ◯ in corrispondenza di una radice a parte reale positiva;
   ⊗ in corrispondenza di una coppia di radici complesse coniugate;
   ⊗ in corrispondenza di una riga dispari;
   ◯ in corrispondenza di una riga pari.

10. Il criterio di Nyquist afferma che condizione neccessaria e sufficiente affinchè un sistema con guadagno d'anello $G(s)$ sia stabile una volta chiuso in retroazione è che il diagramma polare completo di $G(j\omega)$:

   ◯ passi per il punto $-1 + j0$;
   ⊗ non passi per il punto $-1 + j0$;
   ⊗ circondi il punto $-1 + j0$ in senso antiorario tante volte quanti sono i poli di $G(s)$ a parte reale positiva ;
   ◯ circondi il punto $-1 + j0$ in senso orario tante volte quanti sono i poli di $G(s)$ a parte reale positiva .

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

   ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
   ⊗ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
   ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
   ⊗ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati a modulo costante costante è formato da:

   ⊗ una circonferenza centrata nell'origine;
   ◯ due semirette uscenti dall'origine;
   ◯ una retta parallela all'asse immaginario;
   ◯ due rette parallele all'asse reale.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. In corrispondenza di un punto di diramazione nel luogo delle radici di un sistema dinamico $G(s)$:

   ◯ vi sono radici complesse coniugate nell'equazione caratteristica del sistema;
   ⊗ hanno origine rami che dividono il piano complesso in parti uguali;
   ◯ i rami del luogo delle radici sono costituiti da semirette;
   ◯ i rami del luogo delle radici sono perpendicolari fra di loro.

14. Il teorema del baricentro si applica:

   ◯ a sistemi strettamente propri;
   ⊗ a sistemi con grado relativo maggiore di 1;
   ◯ anche a sistemi impropri;
   ◯ anche se il grado relativo è nullo.