Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09

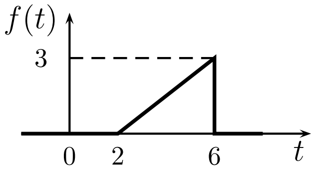
18 Giugno 2009 - Esercizi

Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 2\cos(5t - 15), \qquad x_2(t) = 4t^3 e^{-t} + 2\sin(3\pi t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{2s\,e^{-3s}}{s^2+25}, \qquad X_2(s) = \frac{24}{(s+1)^4} + \frac{6\pi}{s^2+9\pi^2}, \qquad X_3(s) = \frac{3}{s}\left[\frac{e^{-2s}}{4s} - e^{-6s} - \frac{e^{-6s}}{4s}\right]$$

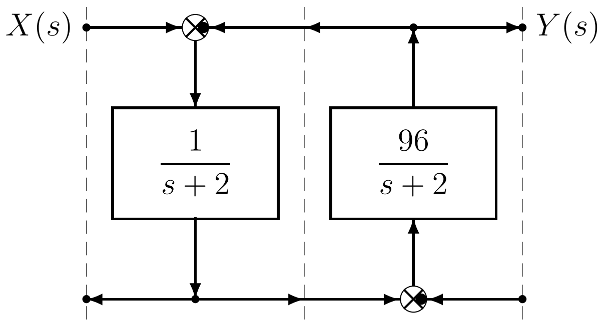
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{2}{(s+4)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{s-5}{(s-4)(s+3)(s+2)}, \qquad G_3(s) = \frac{s+2}{(s-3)(s+4)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -t^2 e^{-4t}, \qquad g_2(t) = -\frac{1}{42}e^{4t} - \frac{8}{7}e^{-3t} + \frac{7}{6}e^{-2t}, \qquad g_3(t) = \frac{5}{49}e^{3t} - \frac{5}{49}e^{-4t} + \frac{2}{7}t\,e^{-4t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

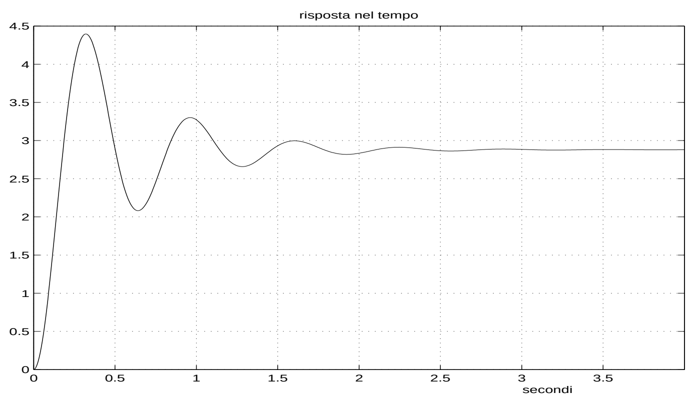
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{96}{s^2 + 4s + 100}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

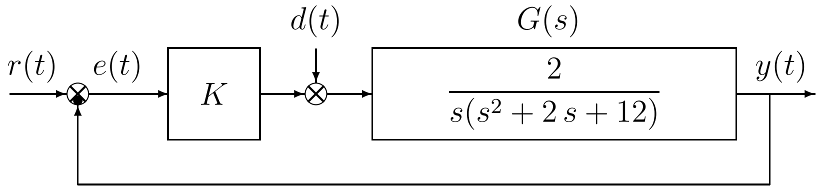
1) $\sigma = -2$ 3) $\omega_n = 10$ 5) $K_0 = 0.96$

2) $\omega = 9.8$ 4) $\delta = 0.2$ 6) $T_a = 1.5$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 3$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{2\,K}{s\,(s^2 + 2\,s + 12)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 2\,s^2 + 12\,s + 2\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & 2\,K \\ 1 & 12 - K & \\ 0 & 2\,K & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 12$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 16$ è:

$$\omega^* = \sqrt{12} = 2\,\sqrt{3}$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.1\,d_0$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1 + K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.1\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico è infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 10$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 4\,t$.

<u>Soluzione</u>: L'errore a regime $e_\infty = \frac{4}{K_v}$ con $K_v = \frac{2\,K}{12}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{24}{K}.$$

d.4) Posto $K = 10$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

<u>Soluzione</u>: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = -0.278$.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{5}{6}$$

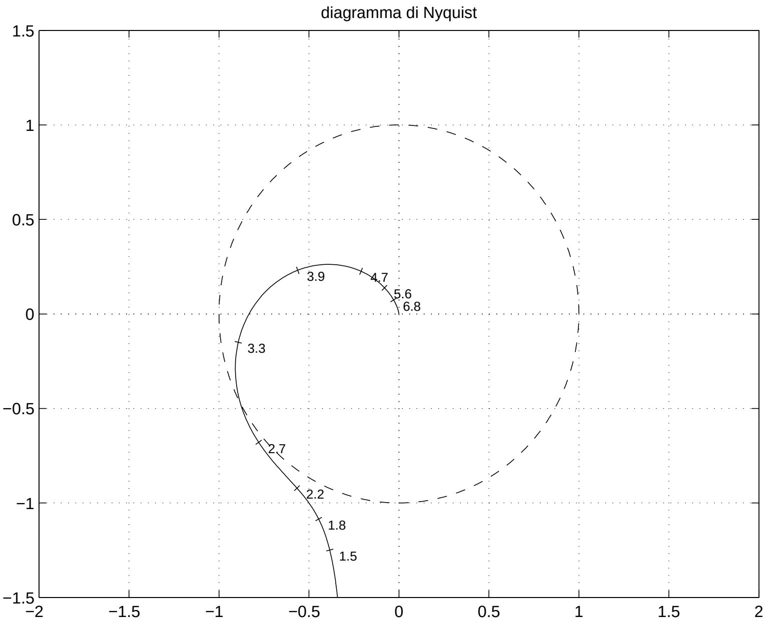
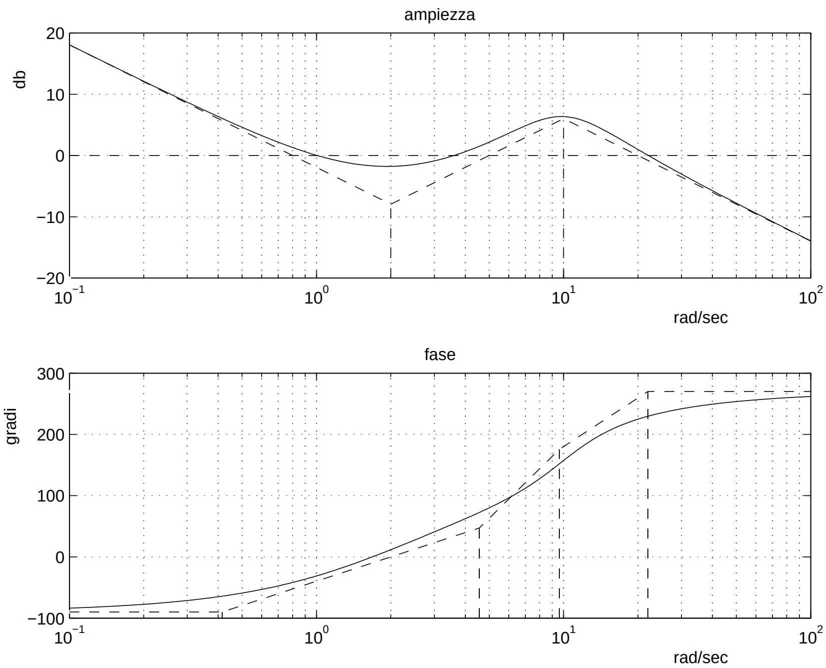


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il corrispondente valore di ω^* è $2\sqrt{3}$ mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 1.2$.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:



e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:
$x(t) = 4\cos(10\,t + \pi/6)$;

$y_\infty(t) = 8\cos(10\,t + 7\,\pi/6)$

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

$$G(s) = \frac{20\,(s+2)^2}{s\,(s^2 - 10\,s + 100)}$$

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

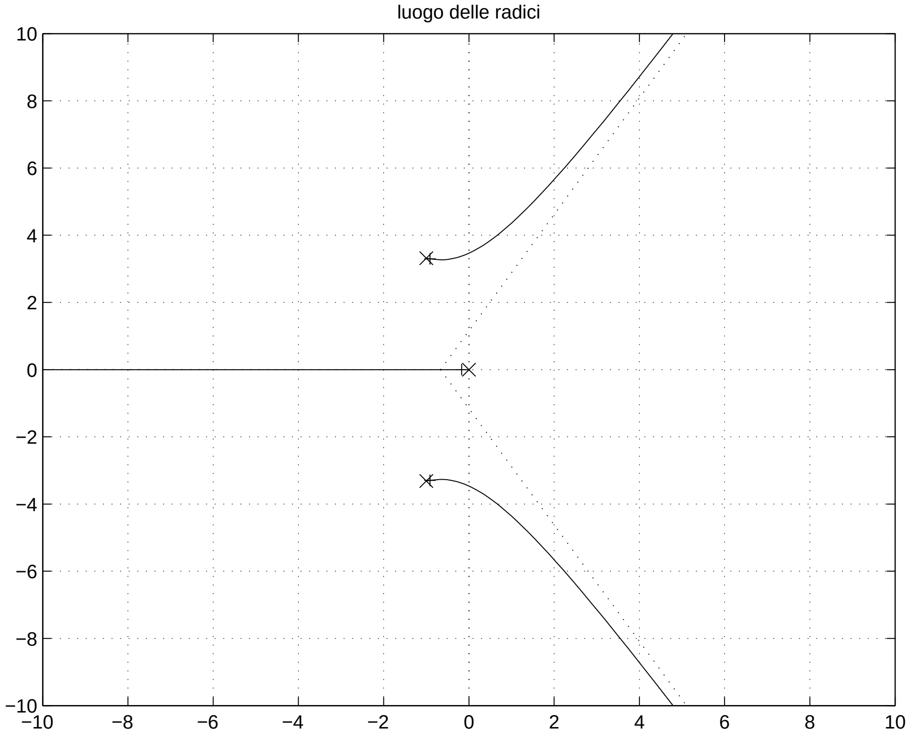


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$.

Soluzione:

$$
\begin{gathered}
\sigma = -0.667 \\
\phi = 60,\ 180,\ 300 \\
s^* = 2\sqrt{3}\, i \\
K^* = 12
\end{gathered}
$$

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09
18 Giugno 2009 - Domande Teoriche
Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = t^2$ è:

   ○ $X(s) = \frac{1}{s^3}$;
   ⊗ $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
   ○ $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
   ○ $X(s) = \frac{2}{s^2}$.

2. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s+2}$ per $\omega \in [0, \infty]$:

   ○ ha guadagno statico unitario;
   ⊗ si evolve tutta nel semipiano positivo;
   ○ presenta un asintoto verticale;
   ⊗ è una semicirconferenza.

3. In base al principio del modello interno, affinchè un sistema retroazionato abbia errore a regime nullo quando in ingresso vi è un segnale la cui trasformata di Laplace ha 2 poli nell'origine, è necessario che nel guadagno d'anello:

   ○ sia presente almeno un polo nell'origine;
   ○ siano presenti almeno tre poli nell'origine;
   ⊗ siano presenti almeno due poli nell'origine.

4. Il sistema dinamico $\ddot{y} = -y\, e^{-t} + t^2\, x$ (dove x è l'ingresso, y è l'uscita e t è la variabile "tempo") è:

   ○ non lineare;
   ⊗ lineare;
   ⊗ non stazionario;
   ○ stazionario.

5. Due sistemi di tipo 0 asintoticamente stabili, aventi la stessa costante di posizione K_p, se vengono posti in retroazione negativa unitaria:

   ○ generano sistemi in retroazione stabili;
   ○ presentano un errore a regime nullo con ingresso a rampa;
   ○ presentano un errore a regime nullo con ingresso a gradino;
   ⊗ presentano lo stesso errore a regime con ingresso a gradino.

6. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s+10}$;

$$T_a = \frac{3}{10}$$

7. Un sistema $G(s)$ asintoticamente stabile e a fase non minima:

   ○ può avere sia poli che zeri a parte reale positiva;
   ○ ha almeno un polo a parte reale positiva;
   ⊗ ha almeno uno zero a parte reale positiva.

8. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con elevato guadagno statico d'anello;

   - ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$;
   - ⊗ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$;
   - ⊗ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema.

9. Nella costruzione della tabella di Routh, l'annullamento di tutti i coefficienti di una riga si può avere:

   - ◯ solo per righe pari;
   - ⊗ solo per righe dispari;
   - ◯ sia per righe pari che per righe dispari;

10. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    - ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ⊗ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ⊗ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    - ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

11. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{4\,s+1}{s^2+2}$ vale:

    - ◯ $g(0^+) = 0$;
    - ◯ $g(0^+) = 1$;
    - ⊗ $g(0^+) = 2$.

12. La larghezza di banda ω_f del sistema $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\,\delta\,\omega_n+\omega_n^2}$:

    - ◯ è proporzionale a δ;
    - ⊗ è proporzionale a ω_n;
    - ◯ è uguale a $\frac{3}{\delta\,\omega_n}$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Sia $1 + K\,G(s) = 0$ l'equazione caratteristica di un sistema retroazionato. Le radici triple del corrispondente luogo delle radici al variare del parametro K sono tutte e sole le soluzioni:

    - ⊗ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d\,G(s)}{d\,s} = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
    - ◯ del sistema di equazioni $1 + K\,G(s) = 0$, $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$;
    - ◯ dell'equazione $\frac{d^2\,G(s)}{d\,s^2} = 0$.

14. Il luogo delle radici presenta almeno un asintoto verticale ($r = n - m > 0$ è il grado relativo):

    - ◯ quando $r = 2$ e K è negativa;
    - ⊗ quando $r = 2$ e K è positiva;
    - ⊗ quando $r = 4$ e K è negativa;
    - ◯ quando $r = 4$ e K è positiva.