Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09

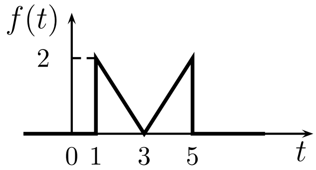
31 Marzo 2009 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

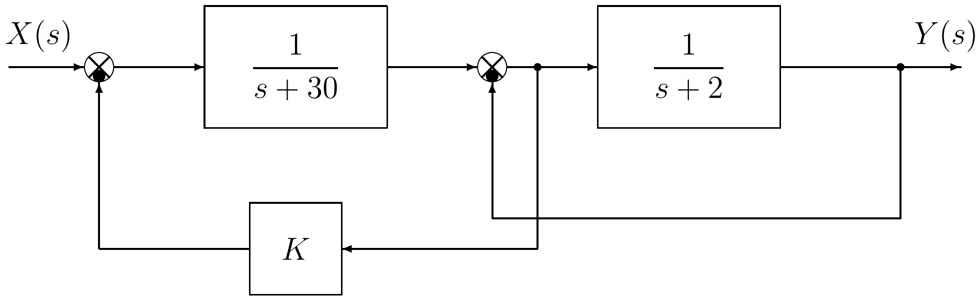
$$x_1(t) = \tfrac{1}{4}\, t^5\, e^{2\,t} + 2\cos(\pi\, t), \qquad x_2(t) = 4\,\sin(6\,t)\, e^{-2\,t},$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{(s+2)^2}{(s+1)\,(s-2)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{2}{(s-4)^4}, \qquad G_3(s) = \frac{s+1}{(s-2)\,(s+3)\,(s-4)}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -27$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

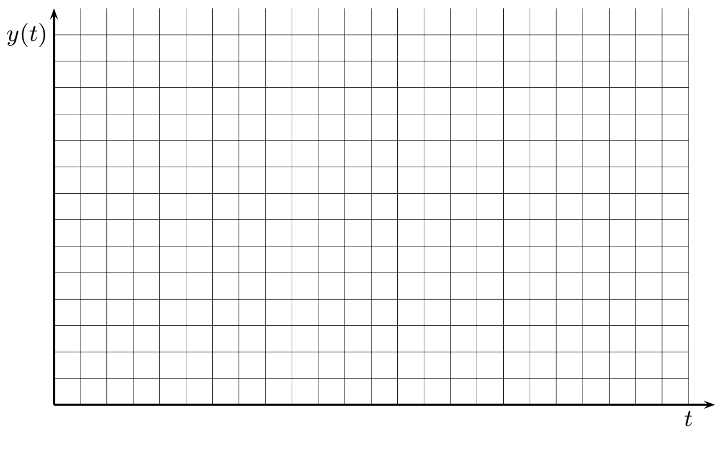
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

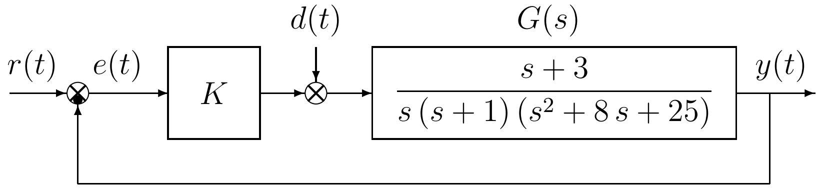
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 9$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

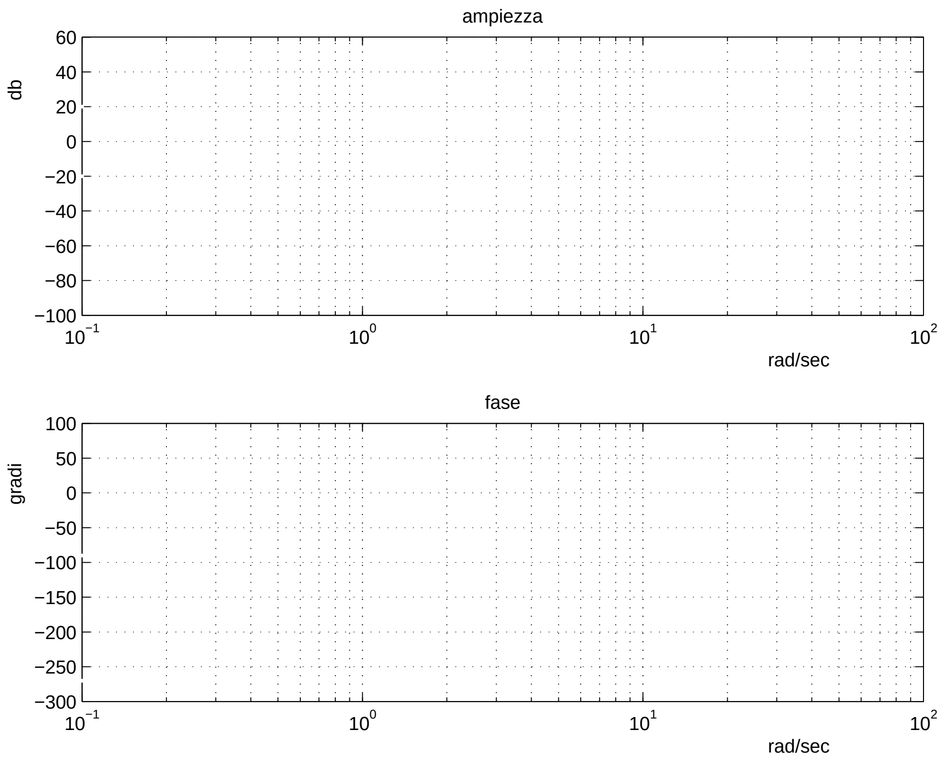
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.02\,d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

d.4) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 50$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4 + 3\,\cos(0.02\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09

31 Marzo 2009 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

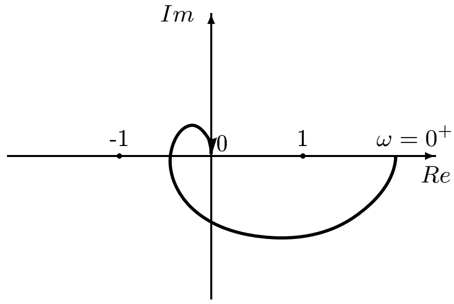
Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il margine di ampiezza M_A del sistema $G(s) = \frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}$ con $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_3 > 0$ è;
   - ◯ sempre maggiore di 1;
   - ◯ sempre minore di 1;
   - ◯ può essere unitario.
2. Il sistema dinamico $\ddot{y} = -y\,e^{-t} + t^2\,x$ (dove x è l'ingresso, y è l'uscita e t è la variabile "tempo"):
   - ◯ è lineare;
   - ◯ è non lineare;
   - ◯ è stazionario;
   - ◯ è non stazionario.
3. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con elevato guadagno statico d'anello;
   - ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$;
   - ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$;
   - ◯ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema;
   - ◯ presenta una forte attenuazione del segnale di riferimento.
4. Il guadagno d'anello $G_a(s)$ di un sistema dinamico lineare presenta un polo a parte reale positiva. Il sistema chiuso in retroazione risulta stabile se il diagramma di Nyquist completo di $G_a(s)$:
   - ◯ passa per il punto $-1 + j0$;
   - ◯ circonda una volta in senso orario il punto $-1 + j0$;
   - ◯ circonda una volta in senso antiorario il punto $-1 + j0$;
   - ◯ non circonda ne passa per il punto $-1 + j0$.
5. Nella costruzione della tabella di Routh, l'annullamento di tutti i coefficienti di una riga si può avere:
   - ◯ solo per righe dispari;
   - ◯ solo per righe pari;
   - ◯ sia per righe pari che per righe dispari;
6. La larghezza di banda ω_f del sistema $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\,\delta\,\omega_n+\omega_n^2}$:
   - ◯ è proporzionale a ω_n;
   - ◯ è proporzionale a δ;
   - ◯ è uguale a $\frac{3}{\delta\,\omega_n}$.
7. Il margine di ampiezza del sistema $G(s) = \frac{10}{s+1}$:
   - ◯ è 20 dB;
   - ◯ è -20 dB;
   - ◯ è nullo;
   - ◯ non è definibile.

8. Un sistema di tipo 2:

   ◯ ha errore a regime nullo con ingresso a gradino;
   ◯ ha errore a regime finito ma non nullo con ingresso a rampa;
   ◯ ha errore a regime nullo con ingresso a rampa;
   ◯ ha errore a regime finito ma non nullo con ingresso a parabola.

9. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con tutti i poli a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.

   Il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è asintoticamente stabile per i seguenti valori di K:

   ◯ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* > 1$;
   ◯ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* > 1$;
   ◯ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* < 1$;
   ◯ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* < 1$;

10. Il margine di fase del sistema $G(s) = 1/s$:

    ◯ è $-\frac{\pi}{2}$;
    ◯ è $\frac{\pi}{2}$;
    ◯ è nullo;
    ◯ non è definibile.

11. La costante di accelerazione K_a della funzione di trasferimento $G(s)$ è definita come:

    ◯ $K_a = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s}G(s)$;
    ◯ $K_a = \lim_{s\to 0} G(s)$;
    ◯ $K_a = \lim_{s\to 0} sG(s)$;
    ◯ $K_a = \lim_{s\to 0} s^2G(s)$.

12. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, la pulsazione naturale ω_n rimane costante al variare della posizione dei poli:

    ◯ su di una retta parallela all'asse immaginario;
    ◯ su di una circonferenza con centro nell'origine;
    ◯ su due semirette uscenti dall'origine;
    ◯ su di un'ellisse con fuoco nell'origine.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il numero di asintoti del luogo delle radici della funzione di trasferimento $G(s)$ è pari a:

    ◯ il numero dei poli di $G(s)$;
    ◯ il numero degli zeri di $G(s)$;
    ◯ il grado relativo di $G(s)$;
    ◯ il tipo del sistema.

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

    ◯ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
    ◯ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
    ◯ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09

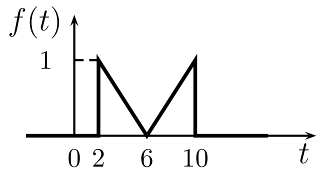
31 Marzo 2009 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

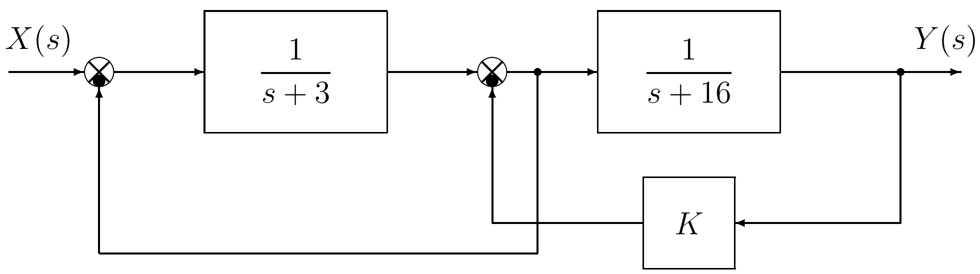
$$x_1(t) = 2\,\sin(5\,t)e^{-3\,t}, \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{3}\,t^5\,e^{4\,t} + \cos(2\,\pi\,t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{(s+2)^4}, \qquad G_2(s) = \frac{s-2}{(s+2)\,(s-3)\,(s-4)}, \qquad G_3(s) = \frac{(s-1)^2}{(s-2)\,(s+1)^2}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -16$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

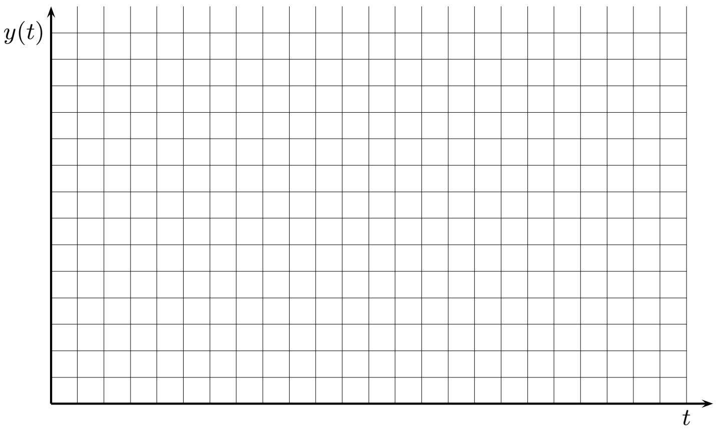
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

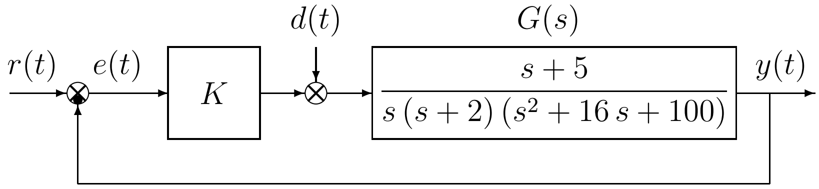
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 8$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

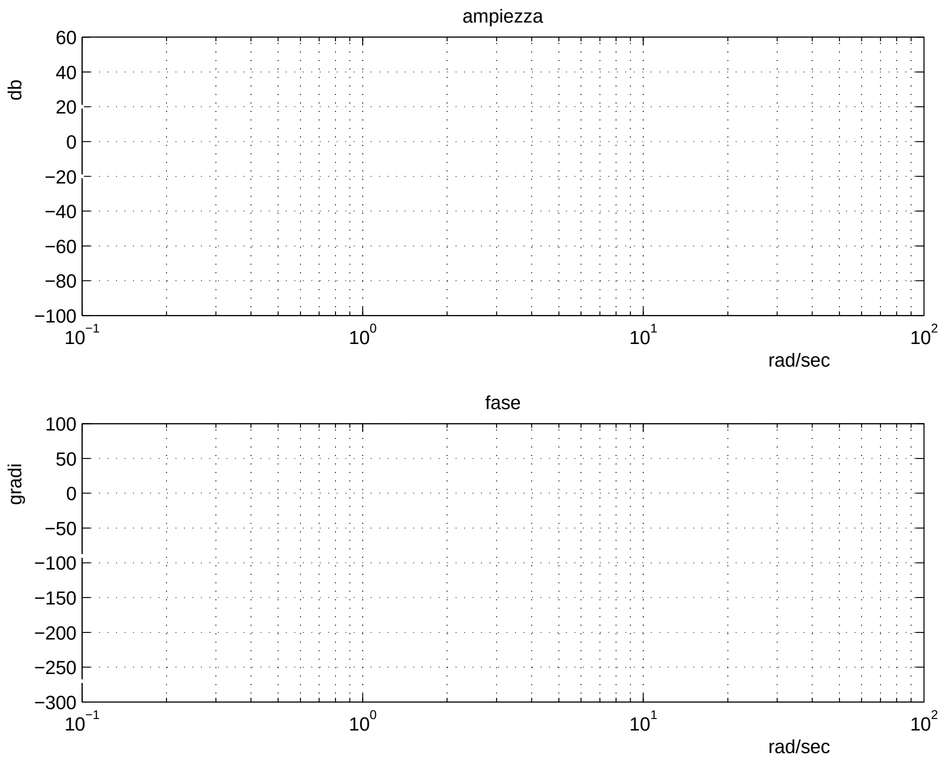
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.04\,d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2\,t$.

d.4) Posto $K = 100$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 100$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + \cos(0.01\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09

31 Marzo 2009 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il margine di ampiezza M_A del sistema $G(s) = \frac{1}{(1+\tau_1\, s)\,(1+\tau_2\, s)\,(1+\tau_3\, s)}$ con $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_3 > 0$ è;
   - ○ sempre minore di 1;
   - ○ sempre maggiore di 1;
   - ○ può essere unitario.
2. Il sistema dinamico $\ddot{y} = -y\, e^{-t} + t^2\, x$ (dove x è l'ingresso, y è l'uscita e t è la variabile "tempo"):
   - ○ è non lineare;
   - ○ è lineare;
   - ○ è non stazionario;
   - ○ è stazionario.
3. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con elevato guadagno statico d'anello;
   - ○ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$;
   - ○ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$;
   - ○ presenta una forte attenuazione del segnale di riferimento;
   - ○ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema.
4. Il guadagno d'anello $G_a(s)$ di un sistema dinamico lineare presenta un polo a parte reale positiva. Il sistema chiuso in retroazione risulta stabile se il diagramma di Nyquist completo di $G_a(s)$:
   - ○ passa per il punto $-1 + j0$;
   - ○ circonda una volta in senso antiorario il punto $-1 + j0$;
   - ○ circonda una volta in senso orario il punto $-1 + j0$;
   - ○ non circonda ne passa per il punto $-1 + j0$.
5. Nella costruzione della tabella di Routh, l'annullamento di tutti i coefficienti di una riga si può avere:
   - ○ solo per righe pari;
   - ○ solo per righe dispari;
   - ○ sia per righe pari che per righe dispari;
6. La larghezza di banda ω_f del sistema $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\,\delta\,\omega_n+\omega_n^2}$:
   - ○ è proporzionale a δ;
   - ○ è proporzionale a ω_n;
   - ○ è uguale a $\frac{3}{\delta\,\omega_n}$.
7. Il margine di ampiezza del sistema $G(s) = \frac{10}{s+1}$:
   - ○ non è definibile;
   - ○ è nullo;
   - ○ è -20 dB.
   - ○ è 20 dB.

8. Un sistema di tipo 2:

○ ha errore a regime finito ma non nullo con ingresso a rampa;

○ ha errore a regime nullo con ingresso a rampa;

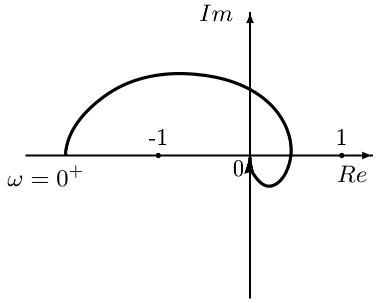
○ ha errore a regime finito ma non nullo con ingresso a parabola;

○ ha errore a regime nullo con ingresso a gradino.

9. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con tutti i poli a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.

Il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è asintoticamente stabile per i seguenti valori di K:

○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* > 1$;
○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* > 1$;
○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* < 1$;
○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* < 1$;



10. Il margine di fase del sistema $G(s) = 1/s$:

○ è nullo;
○ è $-\frac{\pi}{2}$;
○ è $\frac{\pi}{2}$;
○ non è definibile.

11. La costante di accelerazione K_a della funzione di trasferimento $G(s)$ è definita come:

○ $K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$;
○ $K_a = \lim_{s\to 0} sG(s)$;
○ $K_a = \lim_{s\to 0} G(s)$;
○ $K_a = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} G(s)$.

12. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, la pulsazione naturale ω_n rimane costante al variare della posizione dei poli:

○ su di una circonferenza con centro nell'origine;
○ su due semirette uscenti dall'origine;
○ su di una retta parallela all'asse immaginario;
○ su di un'ellisse con fuoco nell'origine.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il numero di asintoti del luogo delle radici della funzione di trasferimento $G(s)$ è pari a:

○ il tipo del sistema;
○ il grado relativo di $G(s)$;
○ il numero dei poli di $G(s)$;
○ il numero degli zeri di $G(s)$.

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

○ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
○ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
○ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09

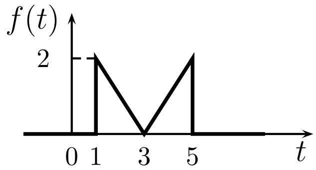
31 Marzo 2009 - Esercizi

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \tfrac{1}{4}\, t^5\, e^{2\,t} + 2\cos(\pi\, t), \qquad x_2(t) = 4\,\sin(6\,t)\, e^{-2\,t},$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{30}{(s-2)^6} + \frac{2\,s}{s^2+\pi^2}, \quad X_2(s) = \frac{24}{(s+2)^2+36}, \quad X_3(s) = \frac{2\,e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{2\,e^{-3\,s}}{s^2} - \frac{e^{-5\,s}}{s^2} - \frac{2\,e^{-5\,s}}{s}$$

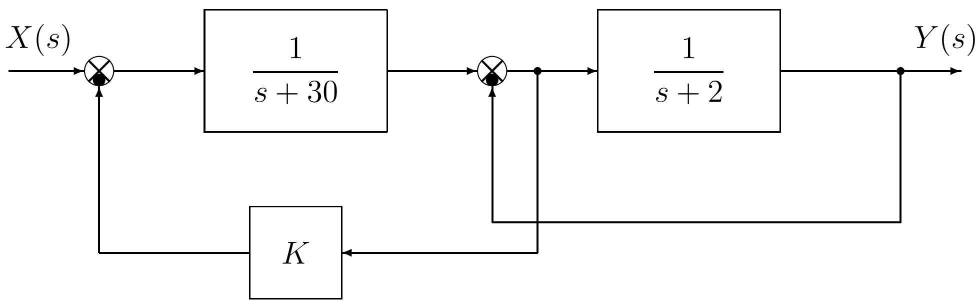
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{(s+2)^2}{(s+1)\,(s-2)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{2}{(s-4)^4}, \qquad G_3(s) = \frac{s+1}{(s-2)\,(s+3)\,(s-4)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{1}{9}\, e^{-t} + \frac{8}{9}\, t\, e^{2\,t} + \frac{16}{3}\, t\, e^{2\,t}, \qquad g_2(t) = \frac{1}{3}\, t^3\, e^{4\,t}, \qquad g_3(t) = -\frac{3}{10}\, e^{2\,t} - \frac{2}{35}\, e^{-3\,t} + \frac{5}{14}\, e^{4\,t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -27$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

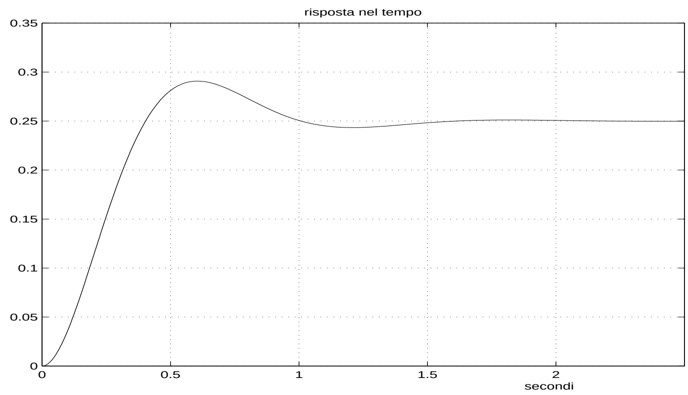
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 6\,s + 36}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

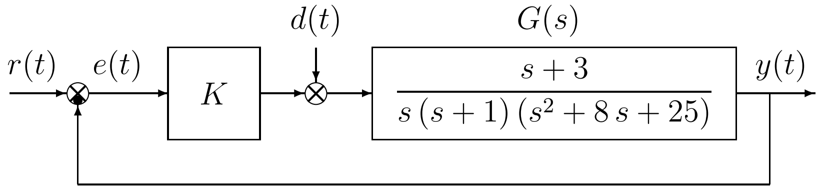
1) $\sigma = -3$ 3) $\omega_n = 6$ 5) $K_0 = \frac{1}{36}$

2) $\omega = 5.2$ 4) $\delta = 0.5$ 6) $T_a = 1$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 9$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K\,(s+3)}{s\,(s+1)\,(s^2+8\,s+25)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 9\,s^3 + 33\,s^2 + (25+K)\,s + 3\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 33 & 3\,K \\ 3 & 9 & 25+K & \\ 2 & 272-K & 27\,K & \\ 1 & (272-K)(25+K) - 243\,K & & \\ 0 & 27\,K & & \end{array}$$

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 84.49$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 84.49$ è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{25+K^*}{9}} = 3.49$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.02\,d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1 + K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.01\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico è infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 50$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{3}{K_v}$ con $K_v = \frac{3\,K}{25}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{25}{K}.$$

d.4) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

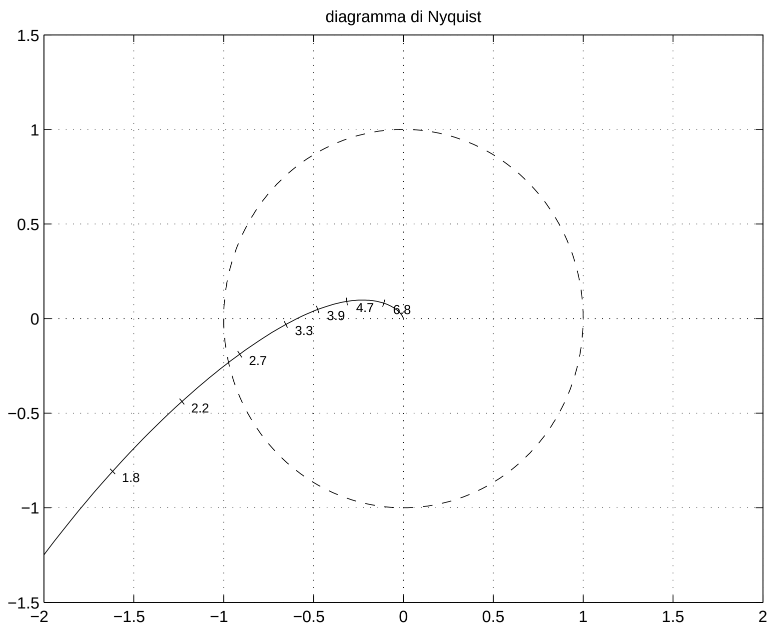


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = -5.92$.

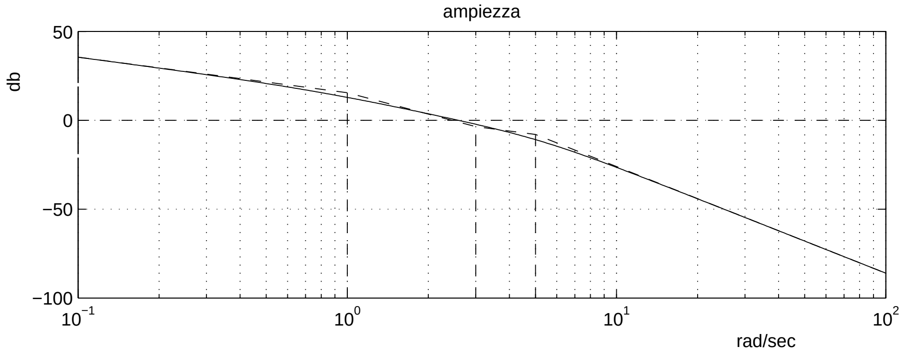
Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

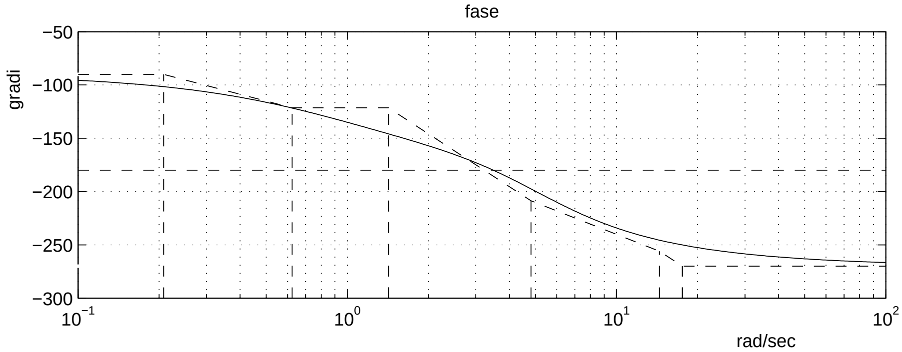
$$\sigma^* = -\frac{K}{K^*} = -0.592$$

Il corrispondente valore di ω^* è 3.49 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 1.689$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 50$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;





e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 2.5\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4 + 3\cos(0.02\, t)$.

Soluzione: Essendo il sistema retroazionato di tipo passa-basso ed essendo la pulsazione del segnale di ingresso $\omega_r << \omega_T$, l'uscita risulta uguale all'ingresso, percui $y(t) = 4 + 3\cos(0.02\, t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione:

$$\sigma = -2$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 3.488\, i$$
$$K^* = 84.49$$

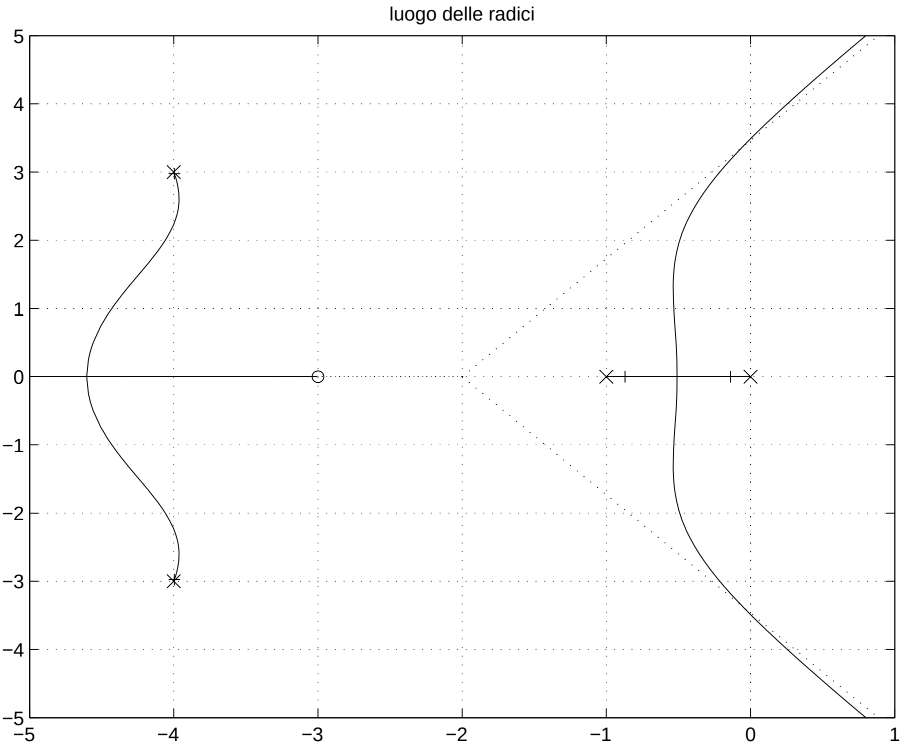


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09

31 Marzo 2009 - Domande Teoriche

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

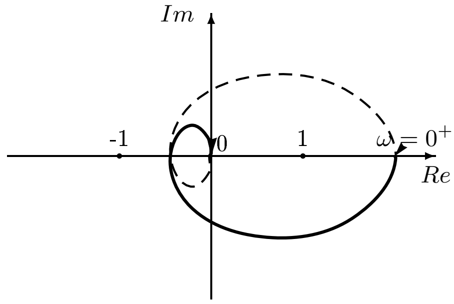
Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il margine di ampiezza M_A del sistema $G(s) = \frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}$ con $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_3 > 0$ è;
   - ⊗ sempre maggiore di 1;
   - ○ sempre minore di 1;
   - ○ può essere unitario.
2. Il sistema dinamico $\ddot{y} = -y\,e^{-t} + t^2\,x$ (dove x è l'ingresso, y è l'uscita e t è la variabile "tempo"):
   - ⊗ è lineare;
   - ○ è non lineare;
   - ○ è stazionario;
   - ⊗ è non stazionario.
3. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con elevato guadagno statico d'anello;
   - ⊗ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$;
   - ○ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$;
   - ⊗ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema;
   - ○ presenta una forte attenuazione del segnale di riferimento.
4. Il guadagno d'anello $G_a(s)$ di un sistema dinamico lineare presenta un polo a parte reale positiva. Il sistema chiuso in retroazione risulta stabile se il diagramma di Nyquist completo di $G_a(s)$:
   - ○ passa per il punto $-1 + j0$;
   - ○ circonda una volta in senso orario il punto $-1 + j0$;
   - ⊗ circonda una volta in senso antiorario il punto $-1 + j0$;
   - ○ non circonda ne passa per il punto $-1 + j0$.
5. Nella costruzione della tabella di Routh, l'annullamento di tutti i coefficienti di una riga si può avere:
   - ⊗ solo per righe dispari;
   - ○ solo per righe pari;
   - ○ sia per righe pari che per righe dispari;
6. La larghezza di banda ω_f del sistema $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\,\delta\,\omega_n+\omega_n^2}$:
   - ⊗ è proporzionale a ω_n;
   - ○ è proporzionale a δ;
   - ○ è uguale a $\frac{3}{\delta\,\omega_n}$.
7. Il margine di ampiezza del sistema $G(s) = \frac{10}{s+1}$:
   - ○ è 20 dB;
   - ○ è -20 dB;
   - ○ è nullo;
   - ⊗ non è definibile.

8. Un sistema di tipo 2:

⊗ ha errore a regime nullo con ingresso a gradino;
○ ha errore a regime finito ma non nullo con ingresso a rampa;
⊗ ha errore a regime nullo con ingresso a rampa;
⊗ ha errore a regime finito ma non nullo con ingresso a parabola.

9. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con tutti i poli a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.



Il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è asintoticamente stabile per i seguenti valori di K:

⊗ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* > 1$;
○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* > 1$;
○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* < 1$;
○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* < 1$;

10. Il margine di fase del sistema $G(s) = 1/s$:

○ è $-\frac{\pi}{2}$;
⊗ è $\frac{\pi}{2}$;
○ è nullo;
○ non è definibile.

11. La costante di accelerazione K_a della funzione di trasferimento $G(s)$ è definita come:

○ $K_a = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} G(s)$;
○ $K_a = \lim_{s\to 0} G(s)$;
○ $K_a = \lim_{s\to 0} sG(s)$;
⊗ $K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$.

12. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, la pulsazione naturale ω_n rimane costante al variare della posizione dei poli:

○ su di una retta parallela all'asse immaginario;
⊗ su di una circonferenza con centro nell'origine;
○ su due semirette uscenti dall'origine;
○ su di un'ellisse con fuoco nell'origine.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il numero di asintoti del luogo delle radici della funzione di trasferimento $G(s)$ è pari a:

○ il numero dei poli di $G(s)$;
○ il numero degli zeri di $G(s)$;
⊗ il grado relativo di $G(s)$;
○ il tipo del sistema.

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

○ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
⊗ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
○ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09

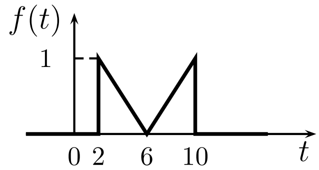
31 Marzo 2009 - Esercizi

Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 2\,\sin(5\,t)e^{-3\,t}, \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{3}\,t^5\,e^{4\,t} + \cos(2\,\pi\,t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{10}{(s+3)^2+25}, \quad X_2(s) = \frac{40}{(s-4)^6} + \frac{s}{s^2+4\,\pi^2}, \quad X_3(s) = \frac{e^{-2\,s}}{s} - \frac{e^{-2\,s}}{4\,s^2} + \frac{e^{-6\,s}}{2\,s^2} - \frac{e^{-10\,s}}{4\,s^2} - \frac{e^{-10\,s}}{s}$$

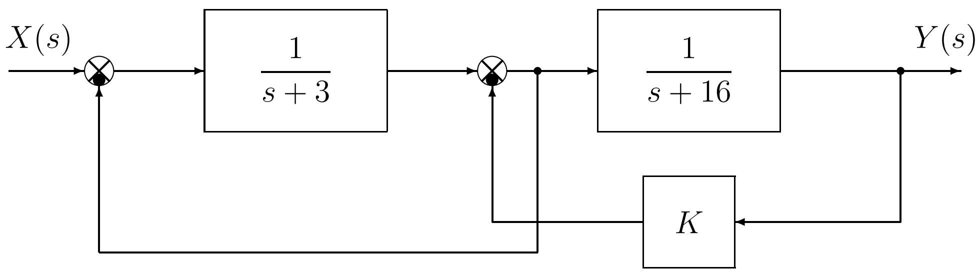
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{(s+2)^4}, \qquad G_2(s) = \frac{s-2}{(s+2)\,(s-3)\,(s-4)}, \qquad G_3(s) = \frac{(s-1)^2}{(s-2)\,(s+1)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{1}{2}\,t^3\,e^{-2\,t}, \qquad g_2(t) = -\frac{2}{15}\,e^{-2\,t} - \frac{1}{5}\,e^{3\,t} + \frac{1}{3}\,e^{4\,t}, \qquad g_3(t) = \frac{1}{9}\,e^{2\,t} + \frac{8}{9}\,e^{-t} - \frac{4}{3}\,t\,e^{-t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -16$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

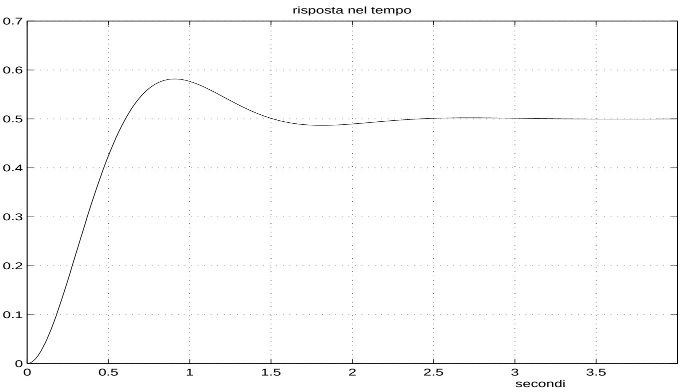
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2+4\,s+16}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

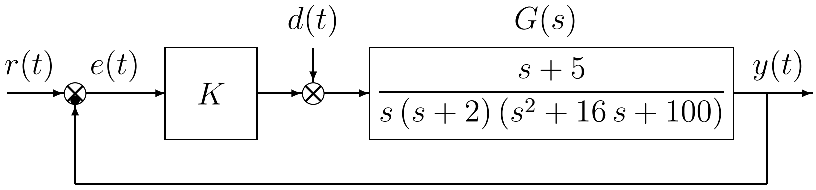
1) $\sigma = -2$ 3) $\omega_n = 4$ 5) $K_0 = \frac{1}{16}$

2) $\omega = 3.5$ 4) $\delta = 0.5$ 6) $T_a = 1.5$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 8$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K\,(s+5)}{s\,(s+2)\,(s^2+16\,s+100)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 17\,s^3 + 116\,s^2 + (100+K)\,s + 5\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 132 & 5\,K \\
3 & 18 & 200+K & \\
2 & 2176-K & 90\,K & \\
1 & (2176-K)(200+K) - 1620\,K & & \\
0 & 90\,K & &
\end{array}$$

Dalla riga 2 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 861.3$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 861.3$ è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{200+K^*}{18}} = 7.679$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.04\,d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1 + K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.02\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico è infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 25$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{2}{K_v}$ con $K_v = \frac{K}{40}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{80}{K}.$$

d.4) Posto $K = 100$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

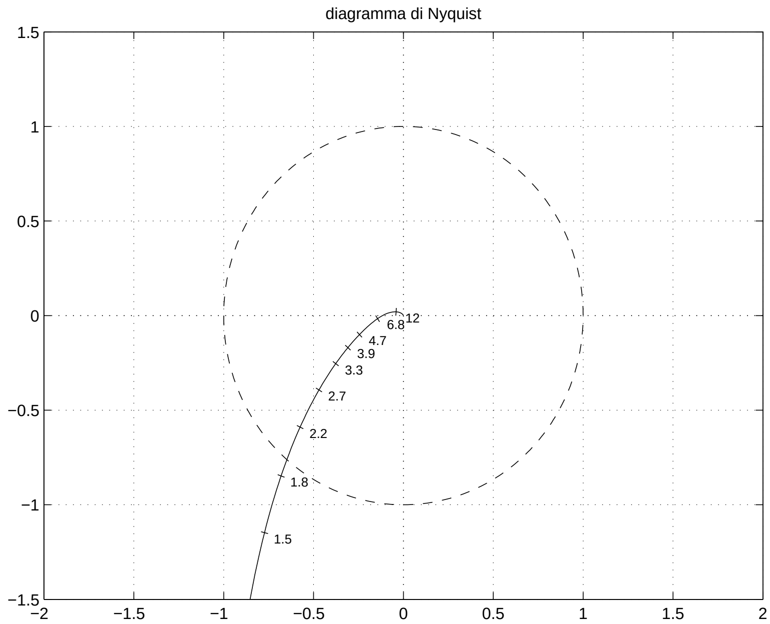


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = -1.15$.

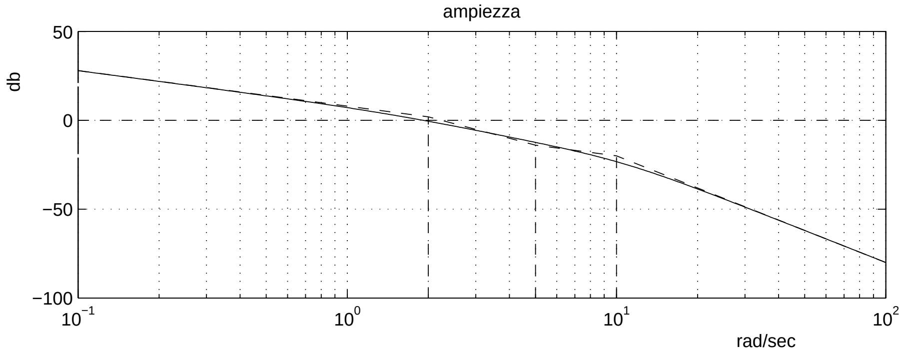
Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

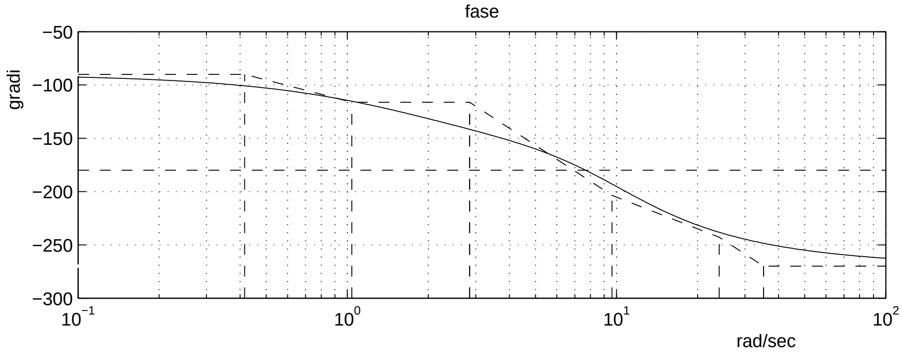
$$\sigma^* = -\frac{K}{K^*} = -0.116$$

Il corrispondente valore di ω^* è 7.679 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 8.611$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 100$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;





e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 1.9\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5 + \cos(0.01\, t)$.

Soluzione: Essendo il sistema retroazionato di tipo passa-basso ed essendo la pulsazione del segnale di ingresso $\omega_r << \omega_T$, l'uscita risulta uguale all'ingresso, percui $y(t) = 5 + \cos(0.01\, t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione:

$$\sigma = -4.33$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 7.679\, i$$
$$K^* = 861.3$$

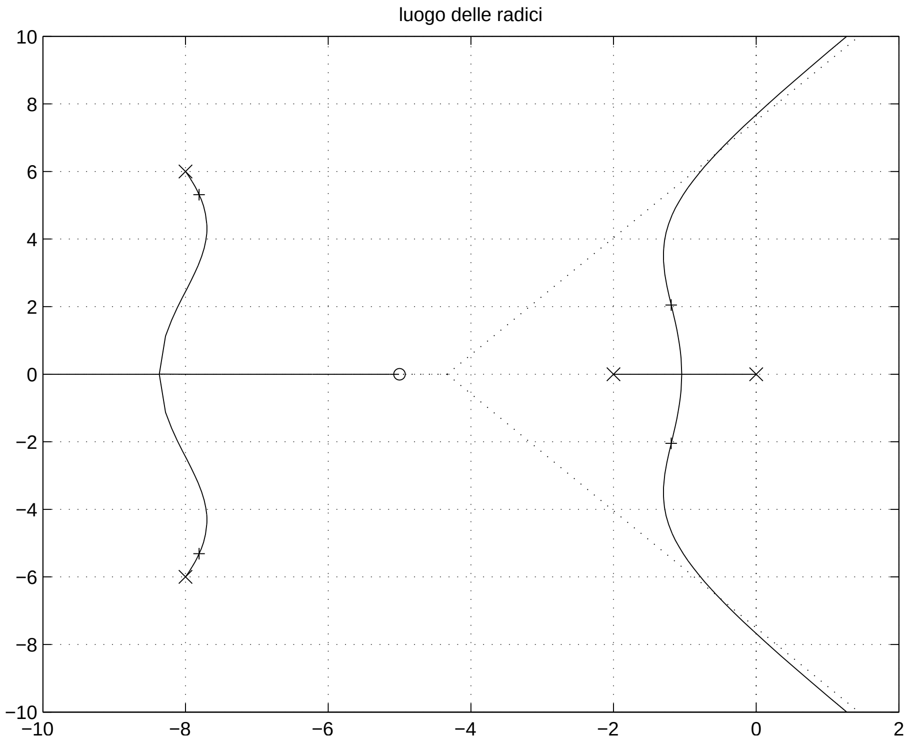


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09
31 Marzo 2009 - Domande Teoriche
Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il margine di ampiezza M_A del sistema $G(s) = \frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}$ con $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_3 > 0$ è;
   - ○ sempre minore di 1;
   - ⊗ sempre maggiore di 1;
   - ○ può essere unitario.
2. Il sistema dinamico $\ddot{y} = -y\,e^{-t} + t^2\,x$ (dove x è l'ingresso, y è l'uscita e t è la variabile "tempo"):
   - ○ è non lineare;
   - ⊗ è lineare;
   - ⊗ è non stazionario;
   - ○ è stazionario.
3. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con elevato guadagno statico d'anello;
   - ○ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$;
   - ⊗ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$;
   - ○ presenta una forte attenuazione del segnale di riferimento;
   - ⊗ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema.
4. Il guadagno d'anello $G_a(s)$ di un sistema dinamico lineare presenta un polo a parte reale positiva. Il sistema chiuso in retroazione risulta stabile se il diagramma di Nyquist completo di $G_a(s)$:
   - ○ passa per il punto $-1 + j0$;
   - ⊗ circonda una volta in senso antiorario il punto $-1 + j0$;
   - ○ circonda una volta in senso orario il punto $-1 + j0$;
   - ○ non circonda ne passa per il punto $-1 + j0$.
5. Nella costruzione della tabella di Routh, l'annullamento di tutti i coefficienti di una riga si può avere:
   - ○ solo per righe pari;
   - ⊗ solo per righe dispari;
   - ○ sia per righe pari che per righe dispari;
6. La larghezza di banda ω_f del sistema $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\,\delta\,\omega_n+\omega_n^2}$:
   - ○ è proporzionale a δ;
   - ⊗ è proporzionale a ω_n;
   - ○ è uguale a $\frac{3}{\delta\,\omega_n}$.
7. Il margine di ampiezza del sistema $G(s) = \frac{10}{s+1}$:
   - ⊗ non è definibile;
   - ○ è nullo;
   - ○ è -20 dB.
   - ○ è 20 dB.

8. Un sistema di tipo 2:

○ ha errore a regime finito ma non nullo con ingresso a rampa;

⊗ ha errore a regime nullo con ingresso a rampa;

⊗ ha errore a regime finito ma non nullo con ingresso a parabola;

⊗ ha errore a regime nullo con ingresso a gradino.

9. Dato il seguente diagramma di Nyquist di una funzione $G(s)$ con tutti i poli a parte reale negativa, disegnate il diagramma polare completo.

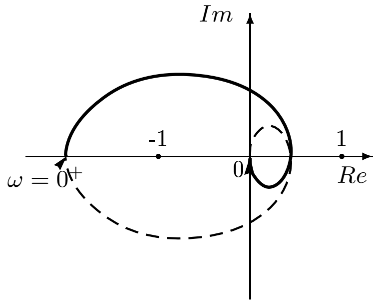
Il sistema retroazionato $K\,G(s)$ è asintoticamente stabile per i seguenti valori di K:

○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* > 1$;

○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* > 1$;

○ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* > -1$, $K_2^* < 1$;

⊗ $K_1^* < K < K_2^*$, $K_1^* < -1$, $K_2^* < 1$;



10. Il margine di fase del sistema $G(s) = 1/s$:

○ è nullo;

○ è $-\frac{\pi}{2}$;

⊗ è $\frac{\pi}{2}$;

○ non è definibile.

11. La costante di accelerazione K_a della funzione di trasferimento $G(s)$ è definita come:

⊗ $K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$;

○ $K_a = \lim_{s\to 0} sG(s)$;

○ $K_a = \lim_{s\to 0} G(s)$;

○ $K_a = \lim_{s\to 0} \frac{1}{s} G(s)$.

12. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, la pulsazione naturale ω_n rimane costante al variare della posizione dei poli:

⊗ su di una circonferenza con centro nell'origine;

○ su due semirette uscenti dall'origine;

○ su di una retta parallela all'asse immaginario;

○ su di un'ellisse con fuoco nell'origine.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il numero di asintoti del luogo delle radici della funzione di trasferimento $G(s)$ è pari a:

○ il tipo del sistema;

⊗ il grado relativo di $G(s)$;

○ il numero dei poli di $G(s)$;

○ il numero degli zeri di $G(s)$.

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

⊗ di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;

○ di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;

○ delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.