Fondamenti di Controlli Automatici

A.A. 2008/09

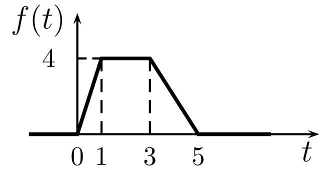
17 Marzo 2009 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

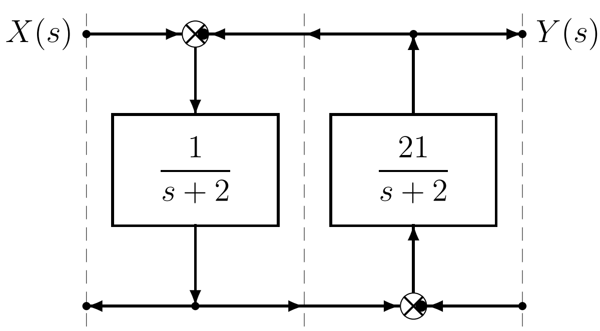
$$x_1(t) = 3\,t^4\,e^{-3\,t} + 4\,\cos(5\,\pi\,t), \qquad x_2(t) = 6\,\sin(3\,t - 12),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{s-3}{(s+1)\,(s-4)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{5}{(s+1)^4}, \qquad G_3(s) = \frac{s+4}{(s+1)\,(s-2)\,(s+3)}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

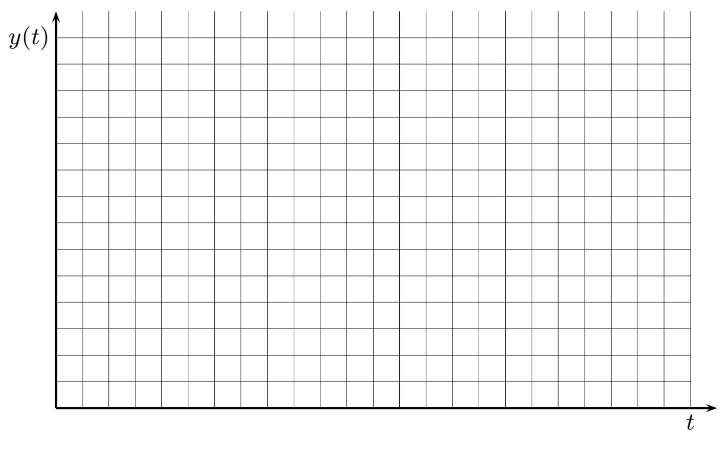
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

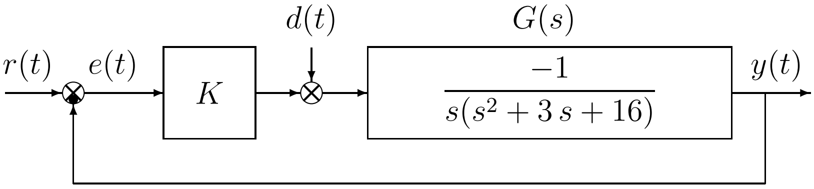
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 2$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



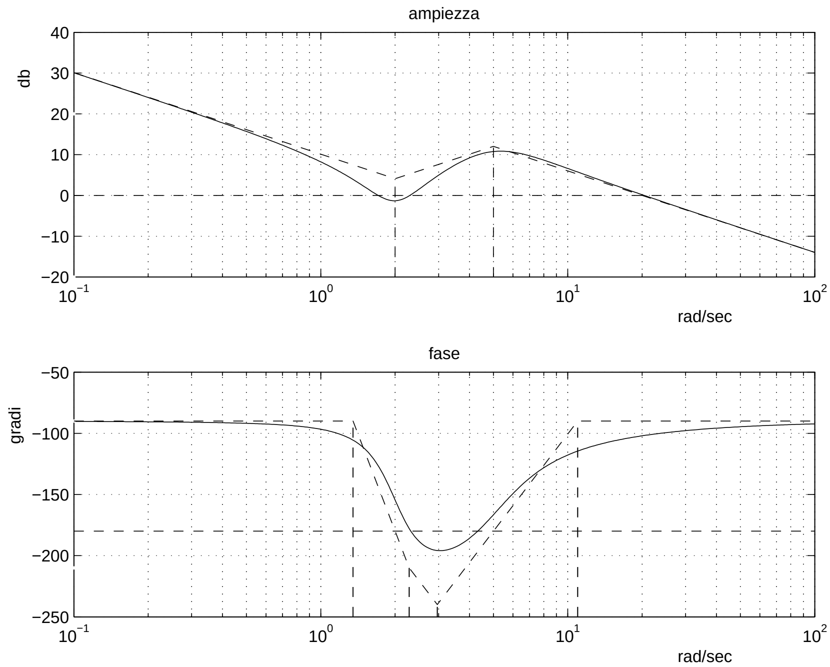
d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2\, d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\, t$.

d.4) Posto $K = -10$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\, G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:



e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:
$x(t) = 3\cos(0.3\, t + \pi/3)$;

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

$G(s) =$

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori sia positivi che negativi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo e le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario sia nel caso di K positivo che negativo.

Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2008/09
17 Marzo 2009 - Domande Teoriche
Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di "tipo 2" è caratterizzato da:
   - ◯ 2 poli nulli;
   - ◯ 2 poli complessi coniugati;
   - ◯ grado relativo $n - m = 2$.

2. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\dddot{y}(t)+3\,\ddot{y}(t)+4\,\dot{y}(t)+5\,y(t) = \dot{x}(t)+2\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

3. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all'infinito:
   - ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
   - ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   - ◯ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   - ◯ con una circonferenza percorsa in senso antiorario.

4. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:
   - ◯ ha almeno una radice a parte reale negativa
   - ◯ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
   - ◯ ha solo una radice a parte reale positiva
   - ◯ ha almeno una radice a parte reale positiva

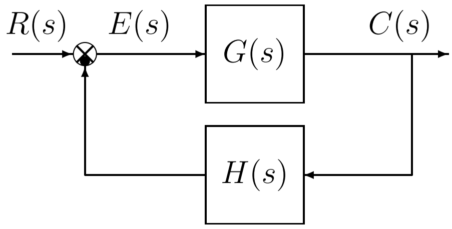
5. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $-1 < \delta < 0$ è caratterizzato da:
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale negativa;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva.

6. Il teorema del valore iniziale applicato alla funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ afferma che:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) =$$

7. Un sistema di tipo 1
   - ◯ ha un polo nell'origine;
   - ◯ ha uno zero nell'origine;
   - ◯ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino;
   - ◯ ha un errore a regime nullo nella risposta alla rampa.

8. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $H(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro β interno alla funzione di trasferimento $H(s)$:



$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \qquad\qquad\qquad \frac{\Delta H(s)}{H(s)}$$

9. Per $\omega > 0$, il diagramma di Bode reale delle fasi della funzione $G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$ coincide con il diagramma "asintotico" di Bode:

   ◯ in nessun punto al finito;
   ◯ in un solo punto al finito $\omega_n = 1/\tau$;
   ◯ nei tre punti al finito $\omega_n = 1/\tau$, $\omega_a = \omega_n/4.81$, $\omega_b = 4.81\,\omega_n$.

10. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il tempo di assestamento T_a rimane costante al variare della posizione dei poli:

   ◯ su di una retta parallela all'asse immaginario;
   ◯ su di una circonferenza con centro nell'origine;
   ◯ su due semirette uscenti dall'origine;
   ◯ su di un'ellisse con fuoco nell'origine.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

   ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
   ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
   ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
   ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Il valore finale per $t \to \infty$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2s+1}{s(s^2+4)}$ vale:

   ◯ $g(\infty) = 0$;
   ◯ $g(\infty) = 1/4$;
   ◯ $g(\infty) = 1$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Gli asintoti di un sistema con $K_\tau > 0$ e grado relativo pari a 3 formano, rispetto all'asse reale positivo e per valori del guadagno di retroazione $K > 0$, angoli di:

   ◯ 60, 180, 300 gradi;
   ◯ 0, 120, 240 gradi;
   ◯ 90, −90 gradi;
   ◯ 45, 135, 270, 315 gradi.

14. In un sistema con $K_\tau > 0$, per valori del guadagno di retroazione $K > 0$ un punto dell'asse reale appartiene al luogo delle radici se lascia alla sua destra:

   ◯ un numero totale dispari di poli;
   ◯ un numero totale pari di poli;
   ◯ un numero totale dispari di zeri e poli;
   ◯ un numero totale pari di zeri e poli.

Fondamenti di Controlli Automatici

A.A. 2008/09

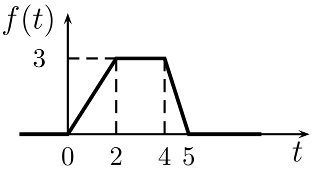
17 Marzo 2009 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

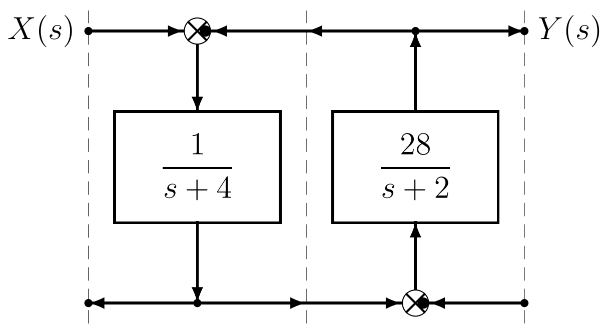
$$x_1(t) = 3\,\cos(6\,t - 12), \qquad x_2(t) = 5\,t^4\,e^{-2\,t} + 2\,\sin(4\,\pi\,t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{2}{(s+3)^4}, \qquad G_2(s) = \frac{s-4}{(s+4)\,(s+3)\,(s+2)}, \qquad G_3(s) = \frac{s+3}{(s-2)\,(s+5)^2}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

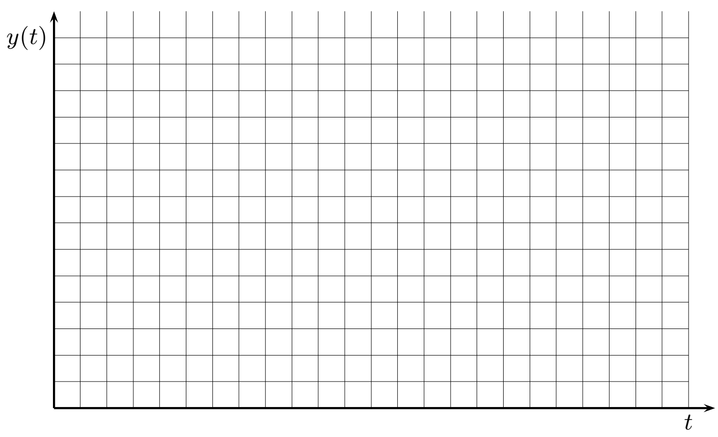
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

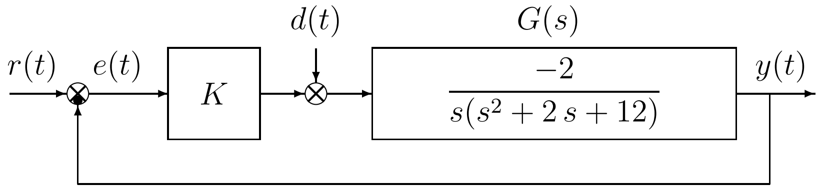
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 3$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



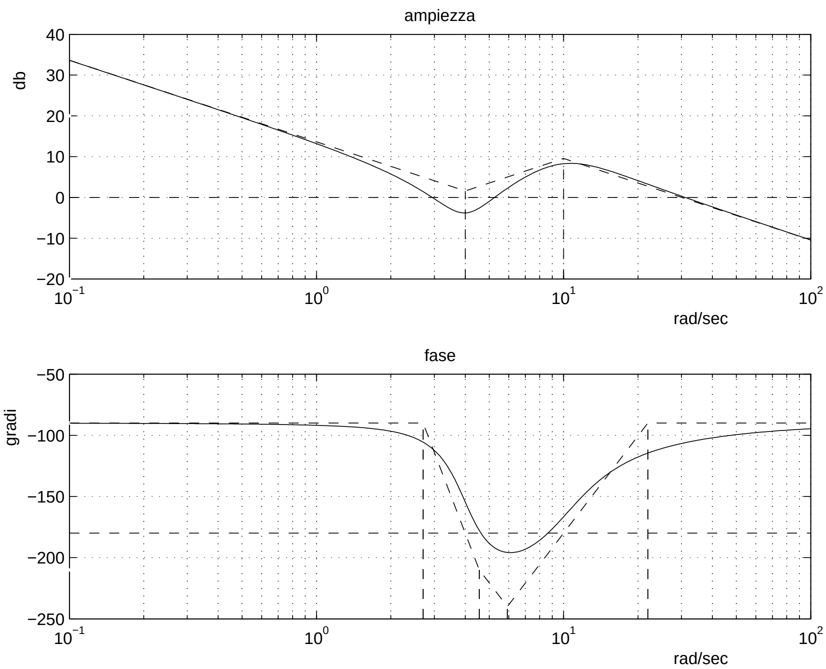
d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.1\, d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 4\,t$.

d.4) Posto $K = -10$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:



e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = 5\cos(0.5\,t + \pi/6)$;

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

$G(s) =$

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori sia positivi che negativi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo e le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario sia nel caso di K positivo che negativo.

Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2008/09
17 Marzo 2009 - Domande Teoriche
Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

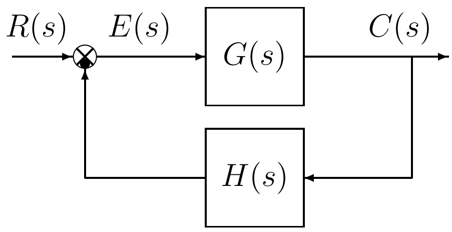
Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di "tipo 2" è caratterizzato da:
   - ◯ grado relativo $n - m = 2$;
   - ◯ 2 poli complessi coniugati;
   - ◯ 2 poli nulli.
2. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

   $$5\dddot{x}(t)+4\ddot{x}(t)+3\dot{x}(t)+2x(t) = \dot{u}(t)+2u(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} =$$
3. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all'infinito:
   - ◯ con una circonferenza percorsa in senso antiorario;
   - ◯ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   - ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   - ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso orario.
4. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:
   - ◯ ha solo una radice a parte reale positiva
   - ◯ ha almeno una radice a parte reale positiva
   - ◯ ha almeno una radice a parte reale negativa
   - ◯ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
5. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $-1 < \delta < 0$ è caratterizzato da:
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale negativa.
6. Il teorema del valore finale applicato alla funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ afferma che:

   $$\lim_{t\to\infty} f(t) =$$
7. Un sistema di tipo 1
   - ◯ ha uno zero nell'origine;
   - ◯ ha un polo nell'origine;
   - ◯ ha un errore a regime nullo nella risposta alla rampa;
   - ◯ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino.

8. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $G(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro α interno alla funzione di trasferimento $G(s)$:



$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \qquad\qquad\qquad\qquad \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

9. Per $\omega > 0$, il diagramma di Bode reale delle fasi della funzione $G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$ coincide con il diagramma "asintotico" di Bode:

   ◯ nei tre punti al finito $\omega_n = 1/\tau$, $\omega_a = \omega_n/4.81$, $\omega_b = 4.81\,\omega_n$;
   ◯ in nessun punto al finito;
   ◯ in un solo punto al finito $\omega_n = 1/\tau$.

10. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il tempo di assestamento T_a rimane costante al variare della posizione dei poli:

   ◯ su di una circonferenza con centro nell'origine;
   ◯ su due semirette uscenti dall'origine;
   ◯ su di una retta parallela all'asse immaginario;
   ◯ su di un'ellisse con fuoco nell'origine.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

   ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
   ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
   ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
   ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{4\,s+5}{2\,s^3+1}$ vale:

   ◯ $g(0^+) = 0$;
   ◯ $g(0^+) = 1/4$;
   ◯ $g(0^+) = 1$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Gli asintoti di un sistema con $K_\tau > 0$ e grado relativo pari a 3 formano, rispetto all'asse reale positivo e per valori del guadagno di retroazione $K > 0$, angoli di:

   ◯ 0, 120, 240 gradi;
   ◯ 60, 180, 300 gradi;
   ◯ 90, -90 gradi;
   ◯ 45, 135, 270, 315 gradi.

14. In un sistema con $K_\tau > 0$, per valori del guadagno di retroazione $K > 0$ un punto dell'asse reale appartiene al luogo delle radici se lascia alla sua destra:

   ◯ un numero totale dispari di zeri e poli;
   ◯ un numero totale pari di zeri e poli.
   ◯ un numero totale dispari di poli;
   ◯ un numero totale pari di poli;

Fondamenti di Controlli Automatici

A.A. 2008/09

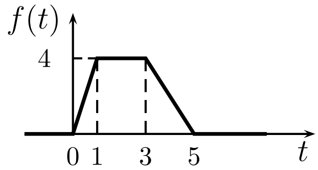
17 Marzo 2009 - Esercizi

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 3\,t^4\,e^{-3\,t} + 4\,\cos(5\,\pi\,t), \qquad x_2(t) = 6\,\sin(3\,t - 12),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{72}{(s+3)^5} + \frac{4\,s}{s^2 + 25\,\pi^2}, \qquad X_2(s) = \frac{18\,e^{-4\,s}}{s^2+9}, \qquad X_3(s) = \frac{4}{s^2} - \frac{4\,e^{-s}}{s^2} - \frac{2\,e^{-3\,s}}{s^2} + \frac{2\,e^{-5\,s}}{s^2}$$

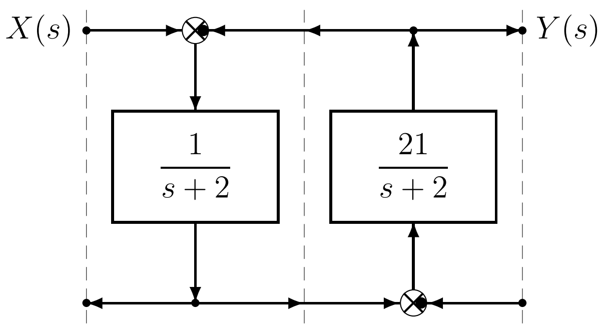
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{s-3}{(s+1)\,(s-4)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{5}{(s+1)^4}, \qquad G_3(s) = \frac{s+4}{(s+1)\,(s-2)\,(s+3)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{4}{25}\,e^{-t} + \frac{4}{25}\,e^{4\,t} + \frac{1}{5}\,t\,e^{4\,t}, \qquad g_2(t) = \frac{5}{6}\,t^3\,e^{-t}, \qquad g_3(t) = -\frac{1}{2}\,e^{-t} + \frac{6}{15}\,e^{2\,t} + \frac{1}{10}\,e^{-3\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

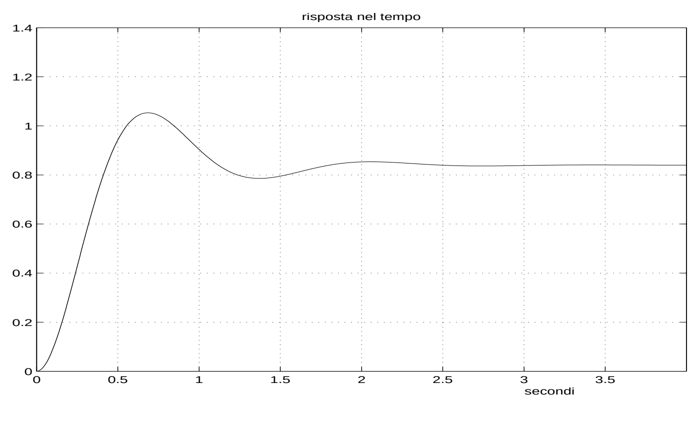
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{21}{s^2 + 4\,s + 25}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

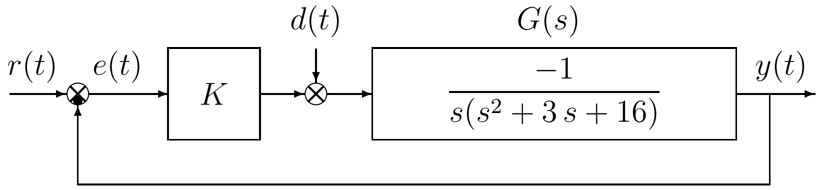
1) $\sigma = -2$ 3) $\omega_n = 5$ 5) $K_0 = 0.84$

2) $\omega = 4.58$ 4) $\delta = 0.4$ 6) $T_a = 1.5$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 2$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 - \frac{K}{s\,(s^2+3\,s+16)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 3\,s^2 + 16\,s - K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 16 \\ 2 & 3 & -K \\ 1 & 16+\frac{1}{3}K & \\ 0 & -K & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K < 0, \qquad\qquad K > -48$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 48$ è:

$$\omega^* = \sqrt{16} = 4$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2\,d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1+K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.2\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 5$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{3}{K_v}$ con $K_v = -\frac{K}{16}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = -\frac{48}{K}.$$

d.4) Posto $K = -10$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K\,K_\tau\,\Delta_a = -0.117$.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{K}{K^*} = -\frac{5}{24}$$

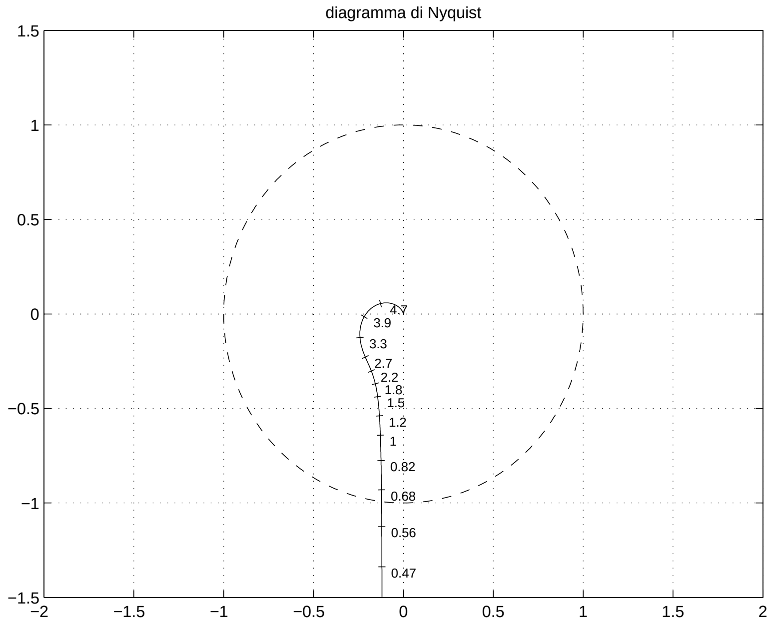
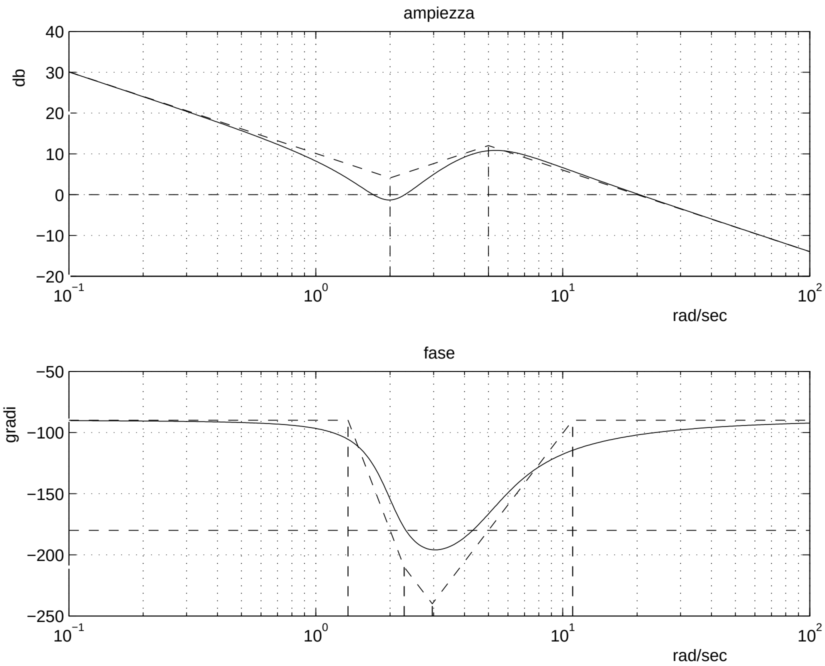


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il corrispondente valore di ω^* è 4 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 4.8$.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:



e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:
$x(t) = 3\cos(0.3\,t + \pi/3)$;

$y_\infty(t) = 30\cos(0.3\,t - \pi/6)$

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

$$G(s) = \frac{20\,(s^2 - s + 4)}{s\,(s^2 - 5\,s + 25)}$$

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori sia positivi che negativi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. <u>Soluzione</u>: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo e le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario sia nel caso di K positivo che negativo.

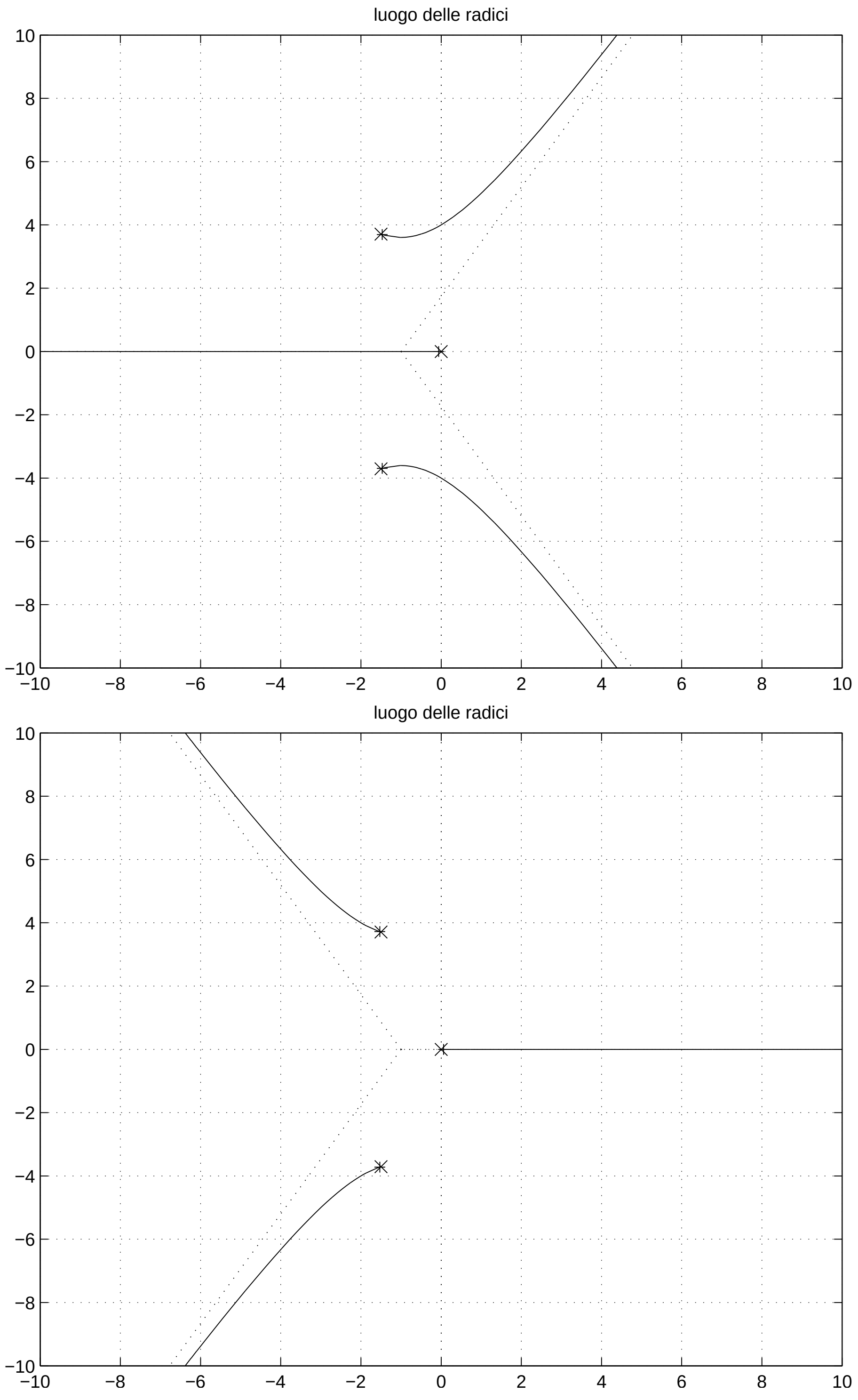


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

Soluzione:

$$\sigma = -1$$

- Per $K < 0$:

$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 4\,i$$
$$K^* = 48$$

- Per $K > 0$:

$$\phi = 0,\ 120,\ 240$$

Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2008/09
17 Marzo 2009 - Domande Teoriche
Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di "tipo 2" è caratterizzato da:
   - ⊗ 2 poli nulli;
   - ○ 2 poli complessi coniugati;
   - ○ grado relativo $n - m = 2$.

2. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\dddot{y}(t) + 3\,\ddot{y}(t) + 4\,\dot{y}(t) + 5\,y(t) = \dot{x}(t) + 2\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1\,s + 2}{s^3 + 3\,s^2 + 4\,s + 5}$$

3. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all'infinito:
   - ○ con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
   - ○ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   - ⊗ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   - ○ con una circonferenza percorsa in senso antiorario.

4. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:
   - ⊗ ha almeno una radice a parte reale negativa
   - ⊗ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
   - ○ ha solo una radice a parte reale positiva
   - ⊗ ha almeno una radice a parte reale positiva

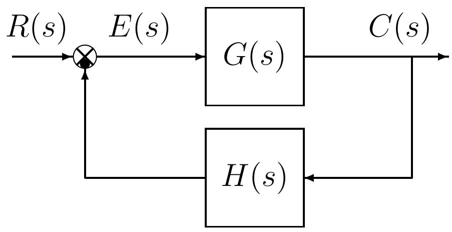
5. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $-1 < \delta < 0$ è caratterizzato da:
   - ○ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ⊗ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ○ due poli reali distinti a parte reale negativa;
   - ○ due poli reali distinti a parte reale positiva.

6. Il teorema del valore iniziale applicato alla funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ afferma che:

$$\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} s\,F(s)$$

7. Un sistema di tipo 1
   - ⊗ ha un polo nell'origine;
   - ○ ha uno zero nell'origine;
   - ⊗ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino;
   - ○ ha un errore a regime nullo nella risposta alla rampa.

8. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $H(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro β interno alla funzione di trasferimento $H(s)$:



$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{-G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} \frac{\Delta H(s)}{H(s)}$$

9. Per $\omega > 0$, il diagramma di Bode reale delle fasi della funzione $G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$ coincide con il diagramma "asintotico" di Bode:

   ○ in nessun punto al finito;
   ⊗ in un solo punto al finito $\omega_n = 1/\tau$;
   ○ nei tre punti al finito $\omega_n = 1/\tau$, $\omega_a = \omega_n/4.81$, $\omega_b = 4.81\,\omega_n$.

10. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il tempo di assestamento T_a rimane costante al variare della posizione dei poli:

    ⊗ su di una retta parallela all'asse immaginario;
    ○ su di una circonferenza con centro nell'origine;
    ○ su due semirette uscenti dall'origine;
    ○ su di un'ellisse con fuoco nell'origine.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    ⊗ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ○ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ○ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    ⊗ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Il valore finale per $t \to \infty$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2\,s+1}{s\,(s^2+4)}$ vale:

    ○ $g(\infty) = 0$;
    ⊗ $g(\infty) = 1/4$;
    ○ $g(\infty) = 1$.

    Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Gli asintoti di un sistema con $K_\tau > 0$ e grado relativo pari a 3 formano, rispetto all'asse reale positivo e per valori del guadagno di retroazione $K > 0$, angoli di:

    ⊗ 60, 180, 300 gradi;
    ○ 0, 120, 240 gradi;
    ○ 90, −90 gradi;
    ○ 45, 135, 270, 315 gradi.

14. In un sistema con $K_\tau > 0$, per valori del guadagno di retroazione $K > 0$ un punto dell'asse reale appartiene al luogo delle radici se lascia alla sua destra:

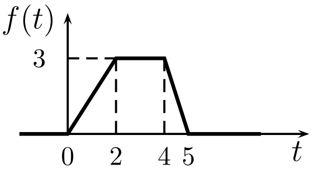
    ○ un numero totale dispari di poli;
    ○ un numero totale pari di poli;
    ⊗ un numero totale dispari di zeri e poli;
    ○ un numero totale pari di zeri e poli.

Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2008/09
17 Marzo 2009 - Esercizi
Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 3\,\cos(6\,t - 12), \qquad x_2(t) = 5\,t^4\,e^{-2\,t} + 2\,\sin(4\,\pi\,t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{3\,s\,e^{-2s}}{s^2+36}, \qquad X_2(s) = \frac{120}{(s+2)^5} + \frac{8\,\pi}{s^2+16\,\pi^2}, \qquad X_3(s) = \frac{3}{2\,s^2} - \frac{3\,e^{-2\,s}}{2\,s^2} - \frac{3\,e^{-4\,s}}{s^2} + \frac{3\,e^{-5\,s}}{s^2}$$

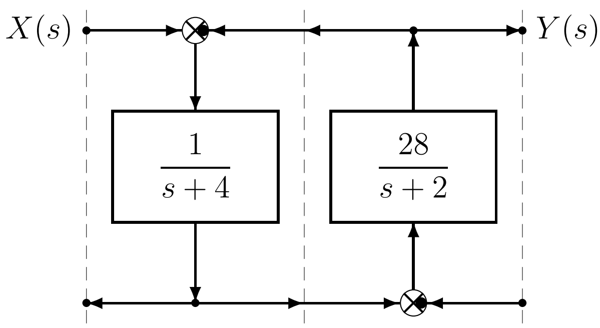
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{2}{(s+3)^4}, \qquad G_2(s) = \frac{s-4}{(s+4)\,(s+3)\,(s+2)}, \qquad G_3(s) = \frac{s+3}{(s-2)\,(s+5)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{1}{3} t^3\,e^{-3\,t}, \qquad g_2(t) = -4\,e^{-4\,t} + 7\,e^{-3\,t} - 3\,e^{-2\,t}, \qquad g_3(t) = \frac{5}{49}\,e^{2\,t} - \frac{5}{49}\,e^{-5\,t} + \frac{2}{7}\,t\,e^{-5\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

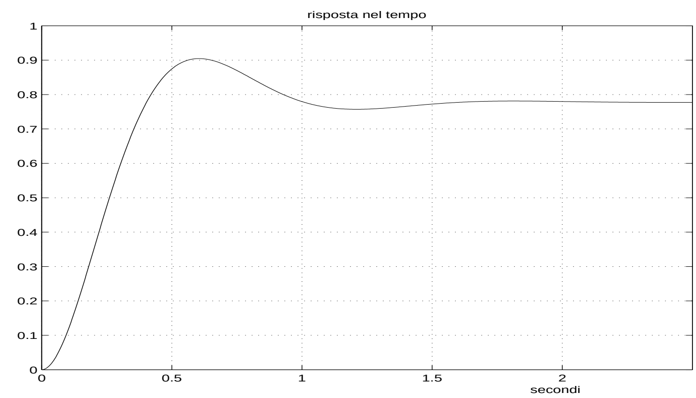
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{28}{s^2 + 6\,s + 36}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

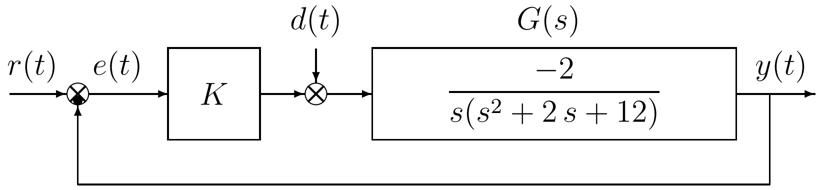
1) $\sigma = -3$ 3) $\omega_n = 6$ 5) $K_0 = 0.78$

2) $\omega = 5.19$ 4) $\delta = 0.5$ 6) $T_a = 1$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 3$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 - \frac{2\,K}{s\,(s^2 + 2\,s + 12)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 2\,s^2 + 12\,s - 2\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 12 \\ 2 & 2 & -2\,K \\ 1 & 12 + K & \\ 0 & -2\,K & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K < 0, \qquad\qquad K > -12$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 12$ è:

$$\omega^* = \sqrt{12} = 2\,\sqrt{3}$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.1\,d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1 + K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.1\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 10$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 4\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{4}{K_v}$ con $K_v = -\frac{2\,K}{12}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = -\frac{24}{K}.$$

d.4) Posto $K = -10$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K\,K_\tau\,\Delta_a = -0.278$.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{K}{K^*} = -\frac{5}{6}$$

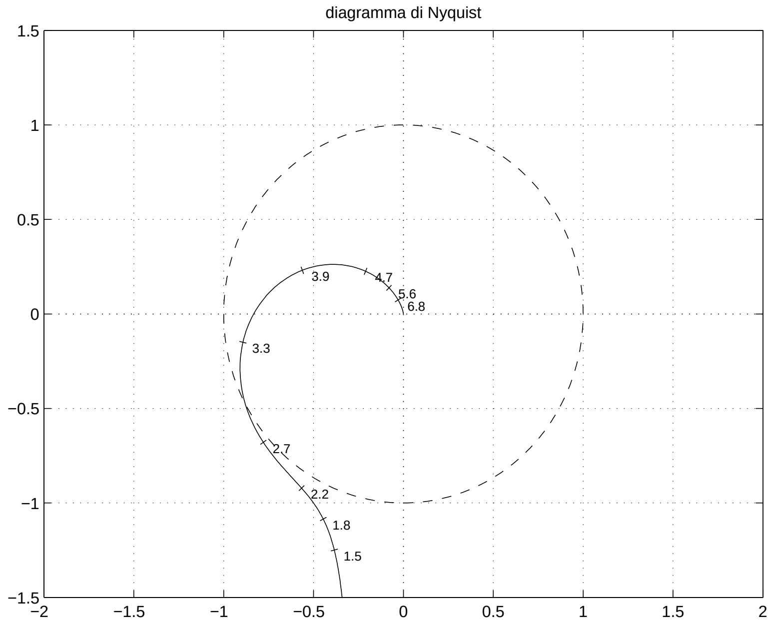
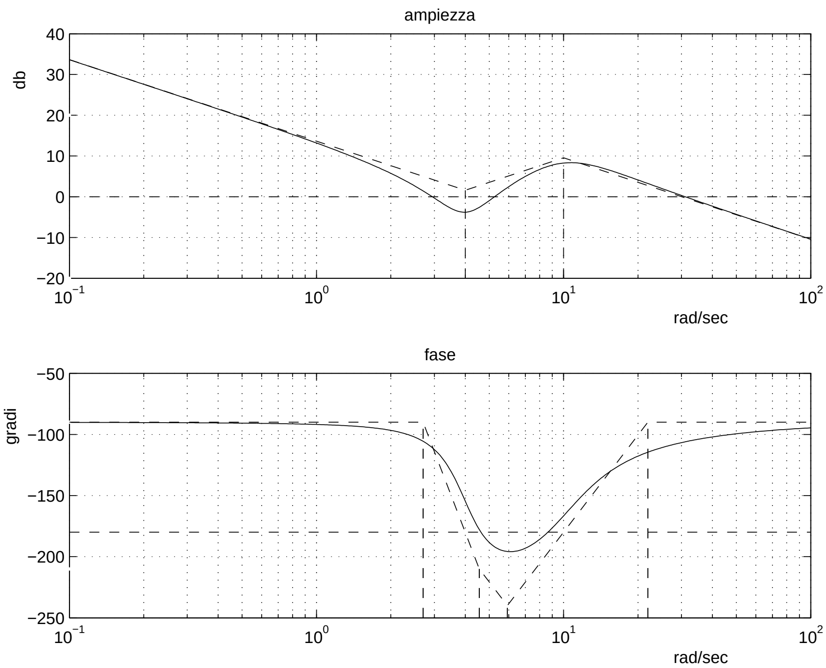


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il corrispondente valore di ω^* è $2\sqrt{3}$ mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 1.2$.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:



e.1) calcolare la risposta “a regime” $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:
$x(t) = 5\cos(0.5\,t + \pi/6)$;

$y_\infty(t) = 50\cos(10\,t - \pi/3)$

e.2) ricavare l’espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

$$G(s) = \frac{30\,(s^2 - 2\,s + 16)}{s\,(s^2 - 10\,s + 100)}$$

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell’esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori sia positivi che negativi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. <u>Soluzione</u>: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all’asse reale positivo e le intersezioni del luogo delle radici con l’asse immaginario sia nel caso di K positivo che negativo.

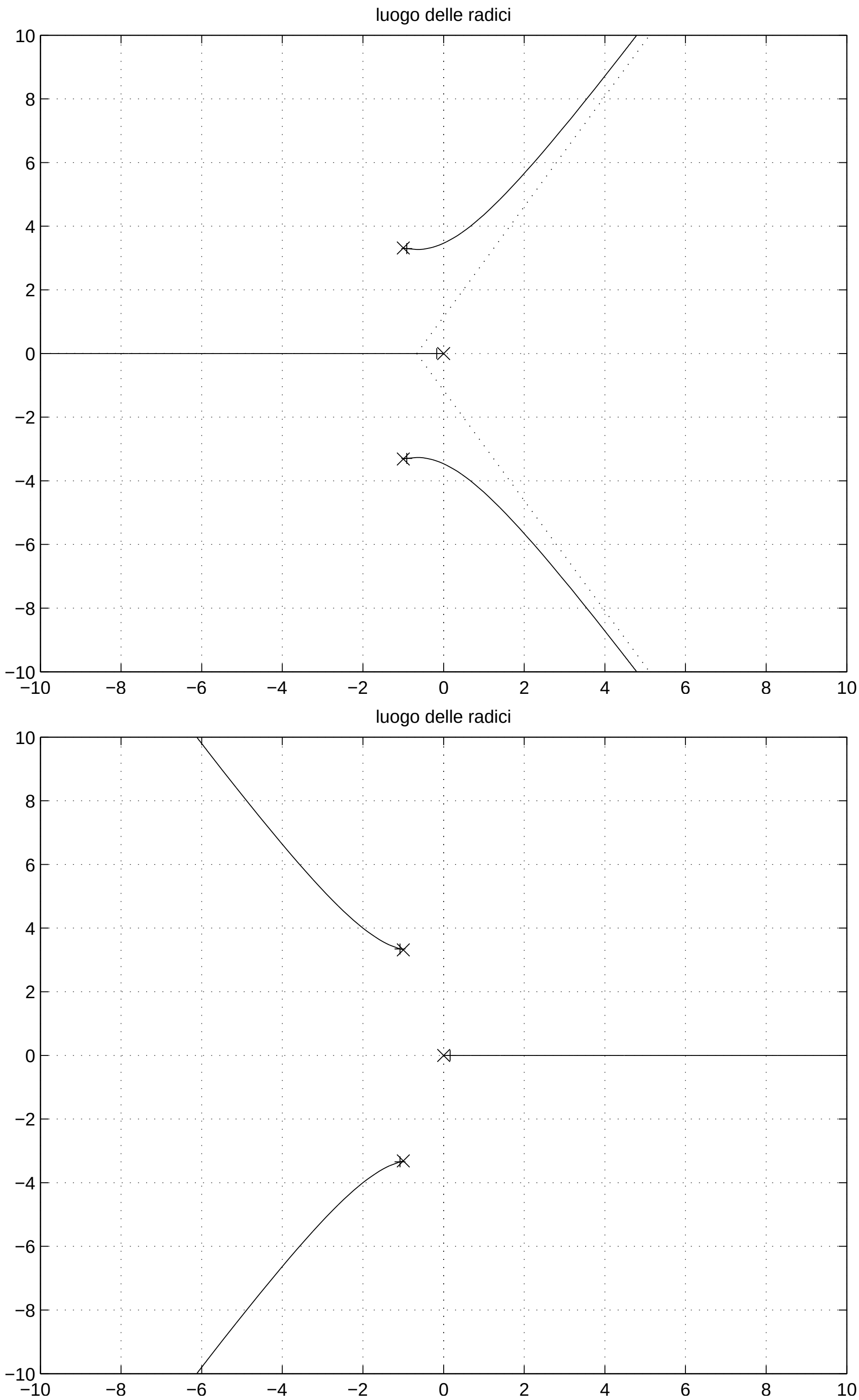


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$.

Soluzione:

$$\sigma = -0.667$$

- Per $K < 0$:

$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 2\sqrt{3}\,i$$
$$K^* = 12$$

- Per $K > 0$:

$$\phi = 0,\ 120,\ 240$$

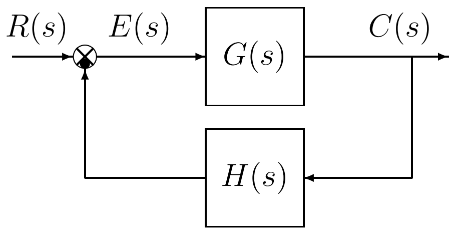
Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2008/09
17 Marzo 2009 - Domande Teoriche
Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di “tipo 2” è caratterizzato da:
   - ○ grado relativo $n - m = 2$;
   - ○ 2 poli complessi coniugati;
   - ⊗ 2 poli nulli.
2. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:
$$5\,\dddot{x}(t) + 4\,\ddot{x}(t) + 3\,\dot{x}(t) + 2\,x(t) = \dot{u}(t) + 2\,u(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{5\,s^3 + 4\,s^2 + 3\,s + 2}$$
3. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist “completo” di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all’infinito:
   - ○ con una circonferenza percorsa in senso antiorario;
   - ⊗ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   - ○ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   - ○ con una semicirconferenza percorsa in senso orario.
4. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l’equazione caratteristica:
   - ○ ha solo una radice a parte reale positiva
   - ⊗ ha almeno una radice a parte reale positiva
   - ⊗ ha almeno una radice a parte reale negativa
   - ⊗ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
5. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $-1 < \delta < 0$ è caratterizzato da:
   - ⊗ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ○ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ○ due poli reali distinti a parte reale positiva;
   - ○ due poli reali distinti a parte reale negativa.
6. Il teorema del valore finale applicato alla funzione $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ afferma che:
$$\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0^+} s\,F(s)$$
7. Un sistema di tipo 1
   - ○ ha uno zero nell’origine;
   - ⊗ ha un polo nell’origine;
   - ○ ha un errore a regime nullo nella risposta alla rampa;
   - ⊗ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino.

8. Si consideri il sistema retroazionato riportato di fianco. Scrivere il legame che lega la variazione relativa del sistema $G(s)$ alla variazione relativa del sistema retroazionato $G_0(s)$ quando varia un parametro α interno alla funzione di trasferimento $G(s)$:



$$\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1+G(s)H(s)} \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

9. Per $\omega > 0$, il diagramma di Bode reale delle fasi della funzione $G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$ coincide con il diagramma "asintotico" di Bode:

   ○ nei tre punti al finito $\omega_n = 1/\tau$, $\omega_a = \omega_n/4.81$, $\omega_b = 4.81\,\omega_n$;
   ○ in nessun punto al finito;
   ⊗ in un solo punto al finito $\omega_n = 1/\tau$.

10. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il tempo di assestamento T_a rimane costante al variare della posizione dei poli:

   ○ su di una circonferenza con centro nell'origine;
   ○ su due semirette uscenti dall'origine;
   ⊗ su di una retta parallela all'asse immaginario;
   ○ su di un'ellisse con fuoco nell'origine.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

   ○ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
   ⊗ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
   ⊗ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
   ○ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{4s+5}{2s^3+1}$ vale:

   ⊗ $g(0^+) = 0$;
   ○ $g(0^+) = 1/4$;
   ○ $g(0^+) = 1$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Gli asintoti di un sistema con $K_\tau > 0$ e grado relativo pari a 3 formano, rispetto all'asse reale positivo e per valori del guadagno di retroazione $K > 0$, angoli di:

   ○ 0, 120, 240 gradi;
   ⊗ 60, 180, 300 gradi;
   ○ 90, −90 gradi;
   ○ 45, 135, 270, 315 gradi.

14. In un sistema con $K_\tau > 0$, per valori del guadagno di retroazione $K > 0$ un punto dell'asse reale appartiene al luogo delle radici se lascia alla sua destra:

   ⊗ un numero totale dispari di zeri e poli;
   ○ un numero totale pari di zeri e poli.
   ○ un numero totale dispari di poli;
   ○ un numero totale pari di poli;