Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2008/09

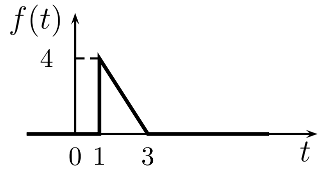
23 Febbraio 2009 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

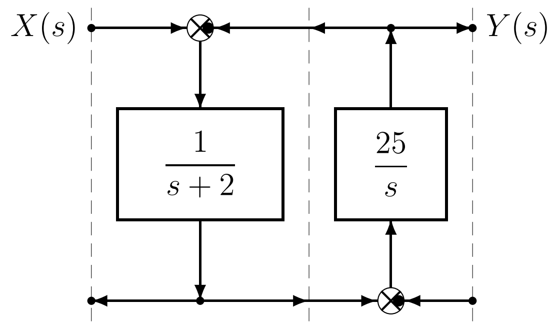
$$x_1(t) = \tfrac{t^4}{6}\, e^{-2\,t} + 2\,\cos(2\,\pi\, t), \qquad x_2(t) = 5\,\sin(2\,t - 6),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{-4}{(s+2)\,(s-5)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{6}{(s+1)^4}, \qquad G_3(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+5)\,(s-3)\,(s+4)}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

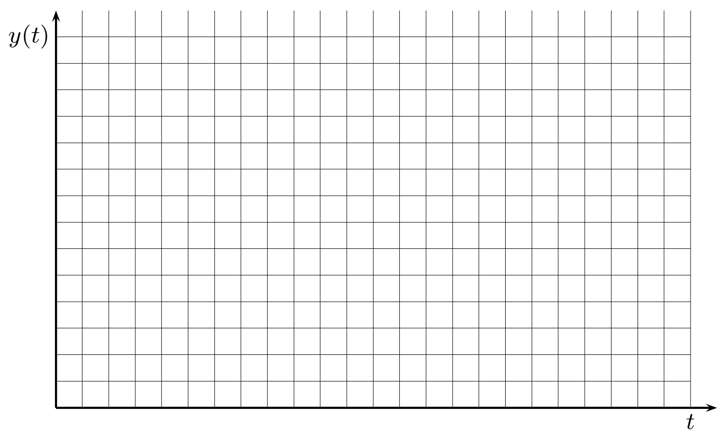
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

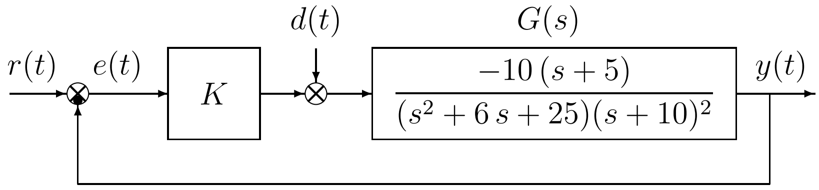
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 2$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



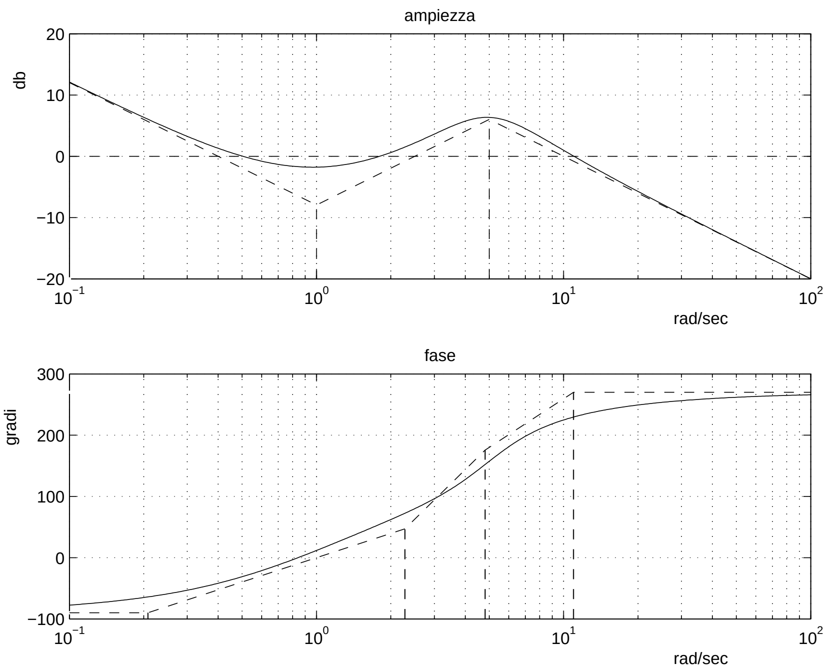
d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Determinare per quale valore positivo del parametro K si ha un errore a regime $|e_\infty(t)| < 1$ quando sul sistema agiscono contemporaneamente il disturbo costante $d(t) = 3$ e il riferimento costante $r(t) = 2$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione di trasferimento $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a degli eventuali asintoti, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

d.4) In base al criterio di Nyquist, dire se il sistema $G(s)$ posto in retroazione negativa unitaria è stabile o instabile e spiegarne la motivazione.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:



e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:
$x(t) = 2\cos(5\,t + \pi/3)$;

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

$G(s) =$

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente gli eventuali punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2008/09
23 Febbraio 2009 - Domande Teoriche
Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il picco di risonanza M_R per un sistema del 2 ordine è:
   - ◯ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$
   - ◯ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$
   - ◯ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-\delta^2}}$
   - ◯ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-2\delta^2}}$

2. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\dddot{y}(t)+4\,\ddot{y}(t)+2\,\dot{y}(t)+y(t) = 2\,\dot{x}(t)+3\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

3. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:
   - ◯ ha almeno una radice a parte reale negativa
   - ◯ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
   - ◯ ha solo una radice a parte reale positiva
   - ◯ ha almeno una radice a parte reale positiva

4. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = 2\,t^2$ è:
   - ◯ $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
   - ◯ $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
   - ◯ $X(s) = \frac{4}{s^3}$.

5. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $-1 < \delta < 0$ è caratterizzato da:
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale negativa;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva.

6. Un sistema di tipo 1
   - ◯ ha un polo nell'origine;
   - ◯ ha uno zero nell'origine;
   - ◯ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino;
   - ◯ ha un errore a regime nullo nella risposta alla rampa.

7. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati a coefficiente di smorzamento δ costante è formato da:
   - ◯ due semirette uscenti dall'origine;
   - ◯ una retta parallela all'asse immaginario;
   - ◯ due rette parallele all'asse reale.

8. Un sistema dinamico lineare è stabile se la sua funzione di trasferimento ha tutti i poli:
   - ◯ a parte reale negativa ed eventuali poli a parte reale nulla hanno molteplicità unitaria;
   - ◯ a parte reale strettamente negativa;
   - ◯ a parte reale positiva;
   - ◯ a parte reale strettamente positiva.
9. Sia $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s)$;
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\,F(s) - f(0-)$;
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s) - f(0-)$;
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s)$.
10. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4\,s+16)}$ per $\omega \in [0,\,\infty]$:
    - ◯ è una semicirconferenza;
    - ◯ presenta un asintoto verticale;
    - ◯ si evolve tutta nel semipiano positivo;
    - ◯ ha guadagno statico unitario.
11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle fasi:
    - ◯ una fase di $-\pi$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una fase di $-\frac{\pi}{2}$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una fase di $-\pi$ per $\omega \to \infty$;
    - ◯ una fase di $-\frac{3\pi}{2}$ per $\omega \to \infty$.
12. L'errore a regime di un sistema $G(s)$ con ingresso del tipo $u(t) = R_0\,t$ si può determinare come $e = \frac{R_0}{K_e}$, dove K_e vale:
    - ◯ $K_e = \lim_{s\to 0} G(s)$;
    - ◯ $K_e = \lim_{s\to 0} s\,G(s)$;
    - ◯ $K_e = \lim_{s\to 0} s^2\,G(s)$.

    Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.
13. Il luogo delle radici del sistema $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ per valori positivi del guadagno di retroazione:
    - ◯ ha due asintoti verticali;
    - ◯ ha un asintoto orizzontale corrispondente all'intervallo $[-2,\,\infty)$;
    - ◯ presenta una diramazione nel punto $-1.5 + j0$.
14. Un problema di contorno delle radici:
    - ◯ può sempre essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici;
    - ◯ si ha quando a variare non il guadagno di retroazione K ma un qualunque altro parametro del sistema;
    - ◯ può essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici tutte le volte che il parametro che varia entra linearmente nell'equazione caratteristica del sistema retroazionato.

Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2008/09

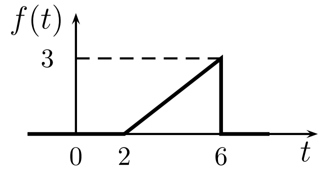
23 Febbraio 2009 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

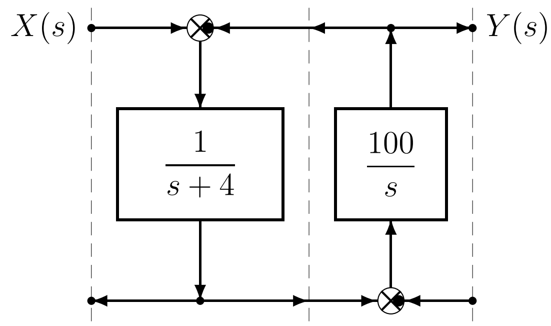
$$x_1(t) = 4\,\cos(5\,t - 10), \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{4}\,t^4\,e^{-t} + 2\,\sin(6\,\pi\,t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{5}{(s+4)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-4)\,(s-3)\,(s+5)}, \qquad G_3(s) = \frac{2}{(s-3)\,(s+4)^2}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

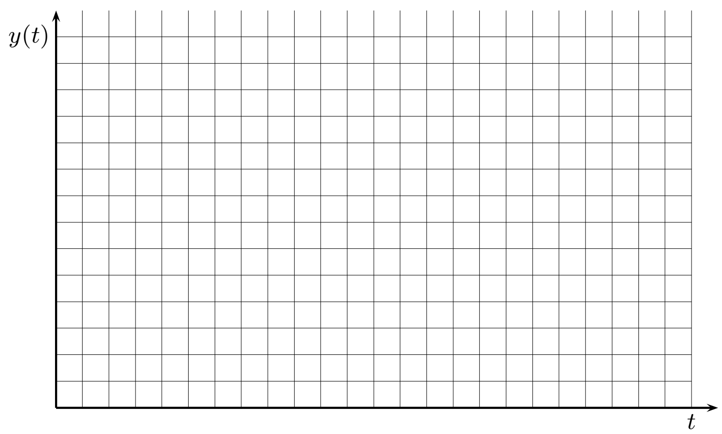
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

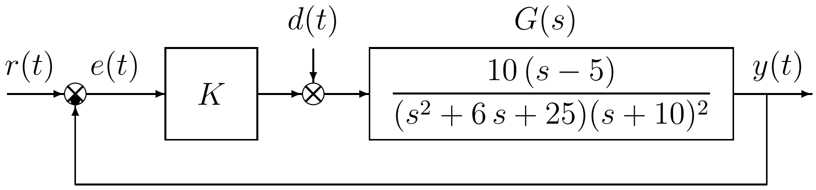
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 3$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



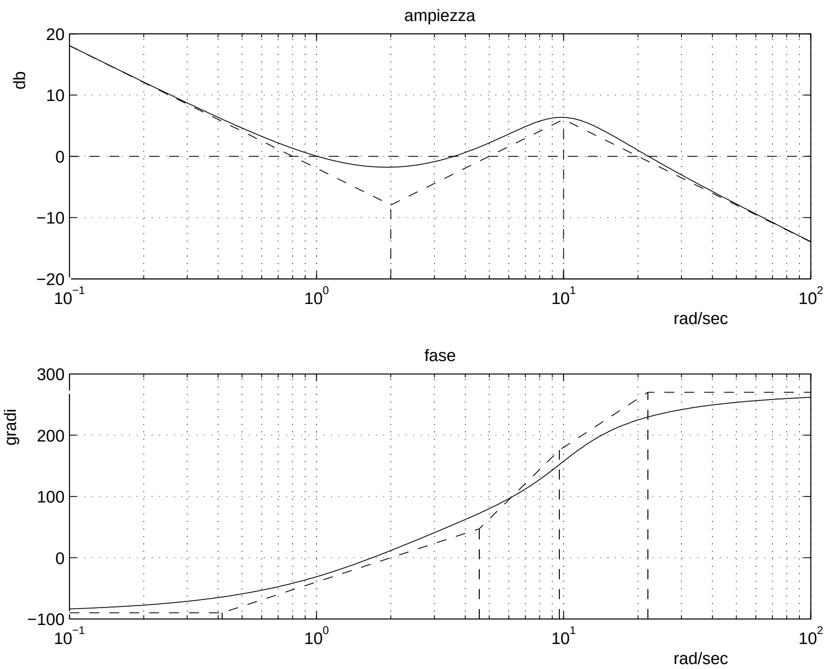
d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

d.2) Determinare per quale valore positivo del parametro K si ha un errore a regime $|e_\infty(t)| < 1$ quando sul sistema agiscono contemporaneamente il disturbo costante $d(t) = 2$ e il riferimento costante $r(t) = 1$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione di trasferimento $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a degli eventuali asintoti, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

d.4) In base al criterio di Nyquist, dire se il sistema $G(s)$ posto in retroazione negativa unitaria è stabile o instabile e spiegarne la motivazione.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:



e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = 4\cos(10\,t + \pi/6)$;

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

$G(s) =$

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente gli eventuali punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2008/09

23 Febbraio 2009 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il picco di risonanza M_R per un sistema del 2 ordine è:
   - ○ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-\delta^2}}$
   - ○ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$
   - ○ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$
   - ○ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-2\delta^2}}$

2. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$2\,\dddot{x}(t)+5\,\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+4\,x(t) = 4\,\dot{u}(t)+3\,u(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} =$$

3. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:
   - ○ ha solo una radice a parte reale positiva
   - ○ ha almeno una radice a parte reale positiva
   - ○ ha almeno una radice a parte reale negativa
   - ○ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva

4. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = 2\,t^2$ è:
   - ○ $X(s) = \frac{4}{s^3}$;
   - ○ $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
   - ○ $X(s) = \frac{1}{s^2}$.

5. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $-1 < \delta < 0$ è caratterizzato da:
   - ○ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ○ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ○ due poli reali distinti a parte reale positiva;
   - ○ due poli reali distinti a parte reale negativa.

6. Un sistema di tipo 1
   - ○ ha uno zero nell'origine;
   - ○ ha un polo nell'origine;
   - ○ ha un errore a regime nullo nella risposta alla rampa;
   - ○ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino.

7. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati a coefficiente di smorzamento δ costante è formato da:
   - ○ una retta parallela all'asse immaginario;
   - ○ due rette parallele all'asse reale.
   - ○ due semirette uscenti dall'origine;

8. Un sistema dinamico lineare è stabile se la sua funzione di trasferimento ha tutti i poli:
   - ◯ a parte reale positiva ed eventuali poli a parte reale nulla hanno molteplicità unitaria;
   - ◯ a parte reale strettamente positiva.
   - ◯ a parte reale negativa ed eventuali poli a parte reale nulla hanno molteplicità unitaria;
   - ◯ a parte reale strettamente negativa.
9. Sia $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s) - f(0-)$;
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s)$;
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\,F(s) - f(0-)$;
   - ◯ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s)$.
10. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4\,s+16)}$ per $\omega \in [0,\,\infty]$:
    - ◯ ha guadagno statico unitario;
    - ◯ si evolve tutta nel semipiano positivo;
    - ◯ presenta un asintoto verticale;
    - ◯ è chiuso all'infinito da una semicirconferenza percorsa in senso orario.
11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle fasi:
    - ◯ una fase di $-\frac{\pi}{2}$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una fase di $-\pi$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una fase di $-\frac{3\pi}{2}$ per $\omega \to \infty$;
    - ◯ una fase di $-\pi$ per $\omega \to \infty$.
12. L'errore a regime di un sistema $G(s)$ con ingresso del tipo $u(t) = R_0\,t$ si può determinare come $e = \frac{R_0}{K_e}$, dove K_e vale:
    - ◯ $K_e = \lim_{s\to 0} s^2\,G(s)$;
    - ◯ $K_e = \lim_{s\to 0} s\,G(s)$;
    - ◯ $K_e = \lim_{s\to 0} G(s)$.

    Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.
13. Il luogo delle radici del sistema $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ per valori positivi del guadagno di retroazione:
    - ◯ ha un asintoto orizzontale corrispondente all'intervallo $(-\infty,\,-2]$;
    - ◯ ha due asintoti verticali;
    - ◯ presenta una diramazione nel punto $-1.5 + j0$.
14. Un problema di contorno delle radici:
    - ◯ si ha quando a variare non è il guadagno di retroazione K ma un qualunque altro parametro del sistema;
    - ◯ può sempre essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici;
    - ◯ può essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici tutte le volte che il parametro che varia entra linearmente nell'equazione caratteristica del sistema retroazionato.

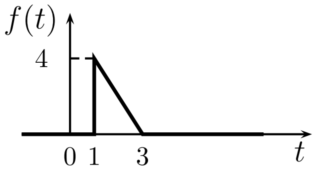
Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2008/09

23 Febbraio 2009 - Esercizi
Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = \frac{t^4}{6}\, e^{-2\,t} + 2\,\cos(2\,\pi\,t), \qquad x_2(t) = 5\,\sin(2\,t - 6),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{4}{(s+2)^5} + \frac{2\,s}{s^2 + 4\,\pi^2}, \qquad X_2(s) = \frac{10\,e^{-3s}}{s^2+4}, \qquad X_3(s) = \frac{2}{s}\left[-\frac{e^{-s}}{s} + 2\,e^{-s} + \frac{e^{-3\,s}}{s}\right]$$

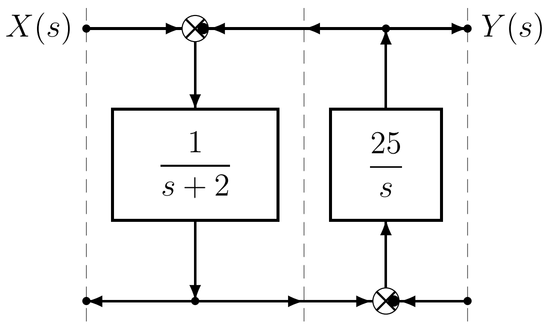
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{-4}{(s+2)\,(s-5)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{6}{(s+1)^4}, \qquad G_3(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+5)\,(s-3)\,(s+4)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{4}{49}\,e^{-2\,t} + \frac{4}{49}\,e^{5\,t} - \frac{4}{7}\,t\,e^{5\,t}, \qquad g_2(t) = t^3\,e^{-t}, \qquad g_3(t) = \frac{49}{8}\,e^{-5\,t} + \frac{1}{56}\,e^{3\,t} - \frac{36}{7}\,e^{-4\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

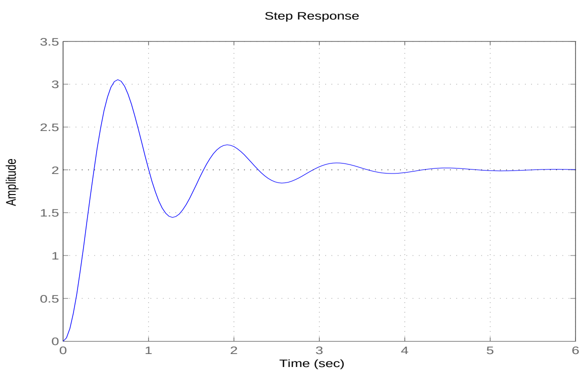
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{25}{s^2 + 2\,s + 25}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

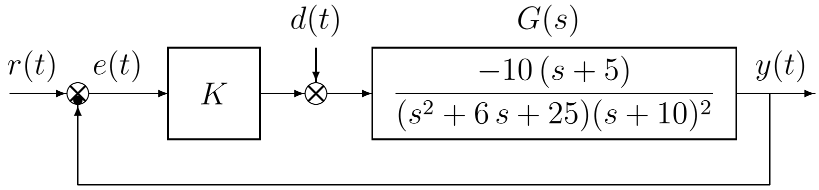
1) $\sigma = -1$ 3) $\omega_n = 5$ 5) $K_0 = 1$

2) $\omega = 4.9$ 4) $\delta = 0.2$ 6) $T_a = 3$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 2$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+\frac{-10\,K\,(s+5)}{(s^2+6\,s+25)(s+10)^2}=0 \qquad \rightarrow \qquad s^4+26\,s^3+245\,s^2+(1100-10K)\,s-50\,K+2500=0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 245 & 2500-50\,K \\
3 & 26 & 1100-10\,K & \\
2 & 5270+10K & 65000-1300\,K & \\
1 & -100K^2-7900\,K+4107000 & & \\
0 & 65000-1300\,K & &
\end{array}$$

Dalla riga 2 si ricava $K > -527$ mentre dalla riga 0 si ricava $K < 50$.

Dalla riga 1 si ottiene $-246 < K < 167$.

Considerando i valori ammissibili di K ricavati dalle righe 0, 1 e 2, si ottiene che il sistema risulta asintoticamente stabile per:

$$-246 = K_1^* < K < K_2^* = 50$$

d.2) Determinare per quale valore positivo del parametro K si ha un errore a regime $|e_\infty(t)| < 1$ quando sul sistema agiscono contemporaneamente il disturbo costante $d(t) = 3$ e il riferimento costante $r(t) = 2$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'errore è:

$$e_\infty = \frac{r + G(0)d}{1 + K\,G(0)} < 1$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 0, ed il suo guadagno statico vale $G(0) = -\frac{1}{50}$. Sostituendo i valori numerici si ottengono le condizioni sul valore di K che garantiscono l'errore a regime richiesto, ovvero $K \leq -47$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione di trasferimento $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a degli eventuali asintoti, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

<u>Soluzione</u>: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

Il sistema é di tipo 0, percui non esiste nessun asintoto verticale.

Esistono due intersezioni con l'asse reale. Tali intersezioni e i corrispondenti valori di pulsazione ω si determinano facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma_1^* = -\frac{1}{K_1^*} = -0.02, \quad \omega = 0$$

$$\sigma_2^* = -\frac{1}{K_2^*} = 0.004, \quad \omega = 11.7$$

Il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma_1^*|} = 50$.

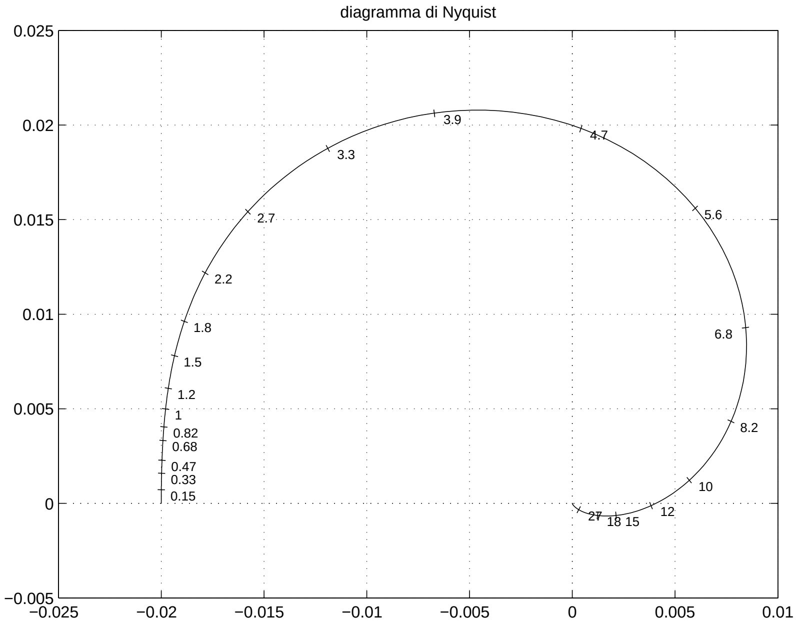
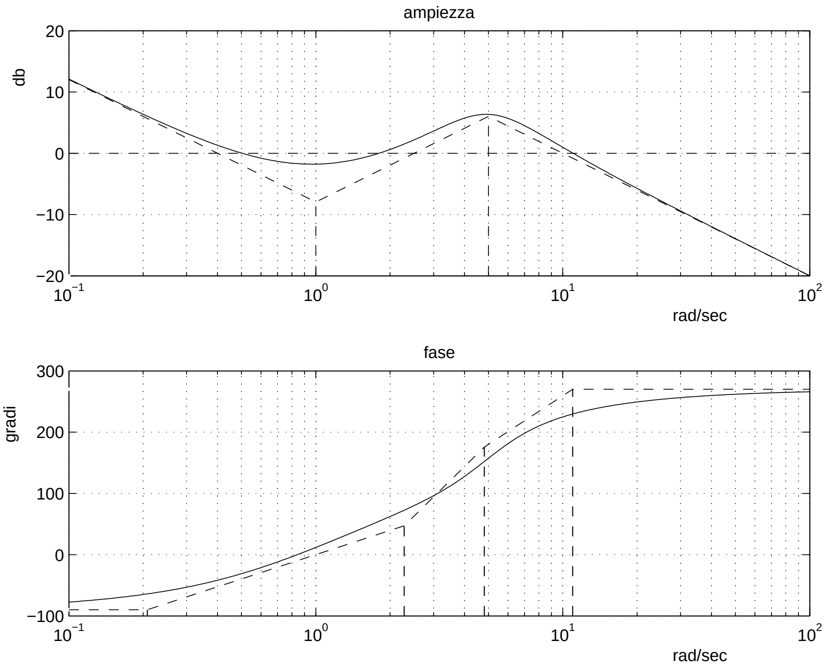


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

d.4) In base al criterio di Nyquist, dire se il sistema $G(s)$ posto in retroazione negativa unitaria è stabile o instabile e spiegarne la motivazione.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist non circonda il punto -1. L'assenza di poli a parte reale positiva rende il sistema in retroazione unitaria stabile.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:



e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale: $x(t) = 2\cos(5\,t + \pi/3)$;

$y_\infty(t) = 4\cos(5\,t + 4\,\pi/3)$

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

$$G(s) = \frac{10\,(s+1)^2}{s\,(s^2 - 5\,s + 25)}$$

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente gli eventuali punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 2.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale

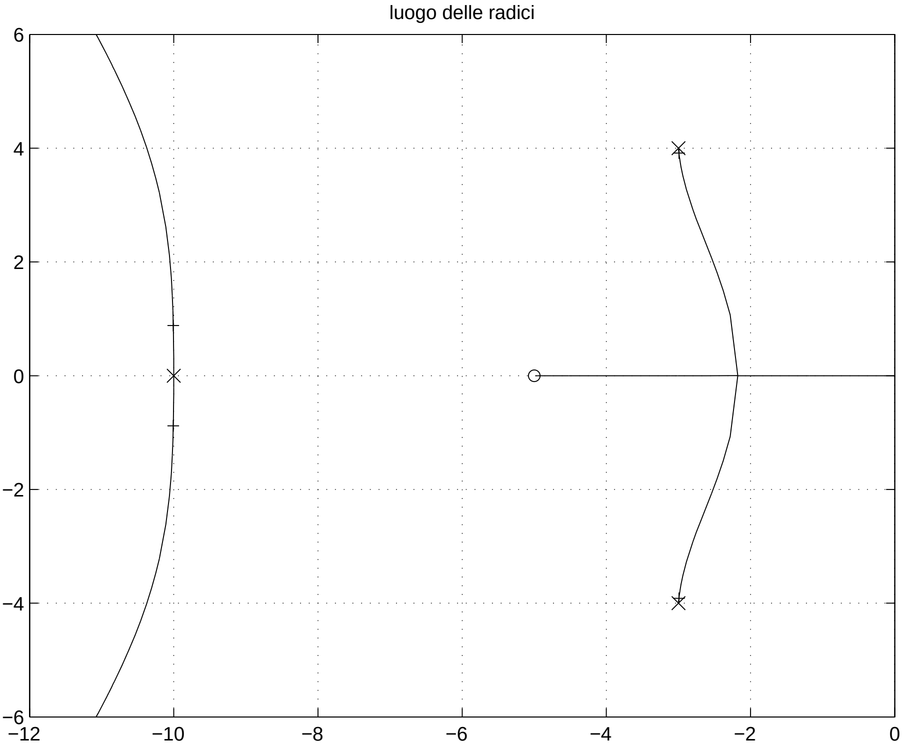


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$ per $K > 0$.

positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

<u>Soluzione</u>:

$$\sigma = -7$$
$$\phi = 0,\ 120,\ 240$$
$$s^* = 0$$
$$K^* = 50$$

Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2008/09
23 Febbraio 2009 - Domande Teoriche
Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il picco di risonanza M_R per un sistema del 2 ordine è:

   ⊗ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$
   ○ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$
   ○ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-\delta^2}}$
   ○ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-2\delta^2}}$

2. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\dddot{y}(t) + 4\,\ddot{y}(t) + 2\,\dot{y}(t) + y(t) = 2\,\dot{x}(t) + 3\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2\,s+3}{s^3+4\,s^2+2\,s+1}$$

3. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:

   ⊗ ha almeno una radice a parte reale negativa
   ⊗ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
   ○ ha solo una radice a parte reale positiva
   ⊗ ha almeno una radice a parte reale positiva

4. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = 2\,t^2$ è:

   ○ $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
   ○ $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
   ⊗ $X(s) = \frac{4}{s^3}$.

5. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $-1 < \delta < 0$ è caratterizzato da:

   ○ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   ⊗ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   ○ due poli reali distinti a parte reale negativa;
   ○ due poli reali distinti a parte reale positiva.

6. Un sistema di tipo 1

   ⊗ ha un polo nell'origine;
   ○ ha uno zero nell'origine;
   ⊗ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino;
   ○ ha un errore a regime nullo nella risposta alla rampa.

7. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati a coefficiente di smorzamento δ costante è formato da:

   ⊗ due semirette uscenti dall'origine;
   ○ una retta parallela all'asse immaginario;
   ○ due rette parallele all'asse reale.

8. Un sistema dinamico lineare è stabile se la sua funzione di trasferimento ha tutti i poli:

   ⊗ a parte reale negativa ed eventuali poli a parte reale nulla hanno molteplicità unitaria;
   ⊗ a parte reale strettamente negativa;
   ○ a parte reale positiva;
   ○ a parte reale strettamente positiva.

9. Sia $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:

   ○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s)$;
   ⊗ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\,F(s) - f(0-)$;
   ○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s) - f(0-)$;
   ○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s)$.

10. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4\,s+16)}$ per $\omega \in [0,\, \infty]$:

   ○ è una semicirconferenza;
   ⊗ presenta un asintoto verticale;
   ○ si evolve tutta nel semipiano positivo;
   ○ ha guadagno statico unitario.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle fasi:

   ⊗ una fase di $-\pi$ per $\omega \to 0$;
   ○ una fase di $-\frac{\pi}{2}$ per $\omega \to 0$;
   ○ una fase di $-\pi$ per $\omega \to \infty$;
   ⊗ una fase di $-\frac{3\pi}{2}$ per $\omega \to \infty$.

12. L'errore a regime di un sistema $G(s)$ con ingresso del tipo $u(t) = R_0\,t$ si può determinare come $e = \frac{R_0}{K_e}$, dove K_e vale:

   ○ $K_e = \lim_{s\to 0} G(s)$;
   ⊗ $K_e = \lim_{s\to 0} s\,G(s)$;
   ○ $K_e = \lim_{s\to 0} s^2\,G(s)$.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il luogo delle radici del sistema $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ per valori positivi del guadagno di retroazione:

   ⊗ ha due asintoti verticali;
   ○ ha un asintoto orizzontale corrispondente all'intervallo $[-2,\, \infty)$;
   ⊗ presenta una diramazione nel punto $-1.5 + j0$.

14. Un problema di contorno delle radici:

   ○ può sempre essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici;
   ⊗ si ha quando a variare non il guadagno di retroazione K ma un qualunque altro parametro del sistema;
   ⊗ può essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici tutte le volte che il parametro che varia entra linearmente nell'equazione caratteristica del sistema retroazionato.

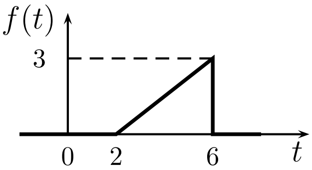
Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2008/09

23 Febbraio 2009 - Esercizi
Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 4\,\cos(5\,t - 10), \qquad x_2(t) = \tfrac{1}{4}\,t^4\,e^{-t} + 2\,\sin(6\,\pi\,t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{4\,s\,e^{-2s}}{s^2+25}, \qquad X_2(s) = \frac{6}{(s+1)^5} + \frac{12\,\pi}{s^2+36\,\pi^2}, \qquad X_3(s) = \frac{3}{s}\left[\frac{e^{-2s}}{4\,s} - e^{-6\,s} - \frac{e^{-6\,s}}{4\,s}\right]$$

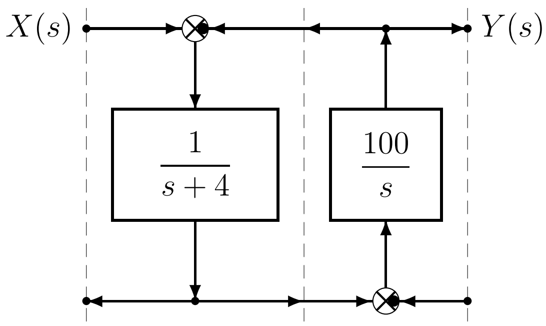
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{5}{(s+4)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-4)\,(s-3)\,(s+5)}, \qquad G_3(s) = \frac{2}{(s-3)\,(s+4)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{5}{2}\,t^2\,e^{-4\,t}, \qquad g_2(t) = 4\,e^{4\,t} - \frac{25}{8}\,e^{3\,t} + \frac{9}{72}\,e^{-5\,t}, \qquad g_3(t) = \frac{2}{49}\,e^{3\,t} - \frac{2}{49}\,e^{-4\,t} - \frac{2}{7}\,t\,e^{-4\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

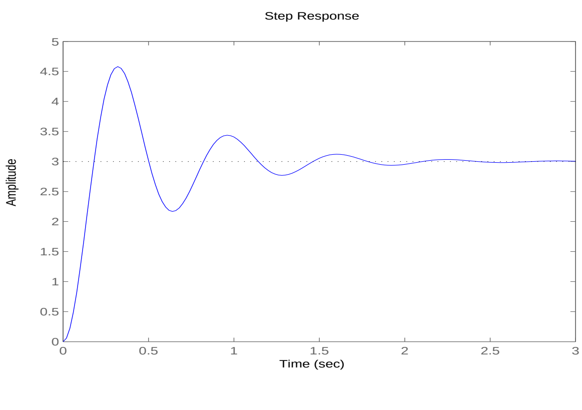
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{100}{s^2+4\,s+100}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

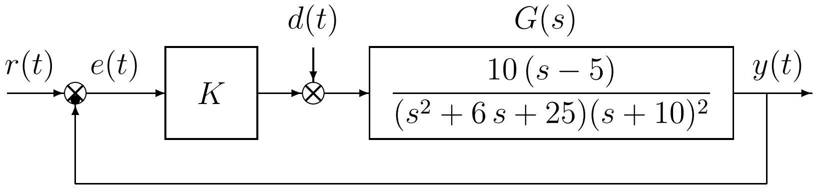
1) $\sigma = -2$ 3) $\omega_n = 10$ 5) $K_0 = 1$

2) $\omega = 9.8$ 4) $\delta = 0.2$ 6) $T_a = 1.5$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 3$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+\frac{10K\,(s-5)}{(s^2+6\,s+25)(s+10)^2}=0 \qquad \rightarrow \qquad s^4+26\,s^3+245\,s^2+(1100+10K)\,s+2500-50K=0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 245 & 2500-50K \\ 3 & 26 & (1100+10K) & \\ 2 & 5270-10K & 65000-1300K & \\ 1 & -100K^2+75500\,K+4107000 & & \\ 0 & 65000-1300K & & \end{array}$$

Dalla riga 2 si ricava $K<527$ mentre dalla riga 0 si ricava $K<50$.

Dalla riga 1 si ottiene $-50.96<K<805.96$.

Considerando i valori ammissibili di K ricavati dalle righe 0, 1 e 2, si ottiene che il sistema risulta asintoticamente stabile per:

$$-50.962=K_1^*<K<K_2^*=50$$

d.2) Determinare per quale valore positivo del parametro K si ha un errore a regime $|e_\infty(t)|<1$ quando sul sistema agiscono contemporaneamente il disturbo costante $d(t)=2$ e il riferimento costante $r(t)=1$.

Soluzione: Il valore a regime dell'errore è:

$$e_\infty=\frac{r+G(0)d}{1+K\,G(0)}<1$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 0, ed il suo guadagno statico vale $G(0)=-\frac{1}{50}$. Sostituendo i valori numerici si ottengono le condizioni sul valore di K che garantiscono l'errore a regime richiesto, ovvero $K\leq 2$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione di trasferimento $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a degli eventuali asintoti, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega\in[0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

Il sistema é di tipo 0, percui non esiste nessun asintoto verticale.

Esistono tre intersezioni con l'asse reale. Tali intersezioni e i corrispondenti valori di pulsazione ω si determinano facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma_1^*=-\frac{1}{K_1^*}=-0.02, \quad \omega=0$$

$$\sigma_2^*=-\frac{1}{K_2^*}=0.0196, \quad \omega=4.77$$

$$\sigma_3^*=-\frac{1}{K_2}=-0.0012, \quad \omega=18.77$$

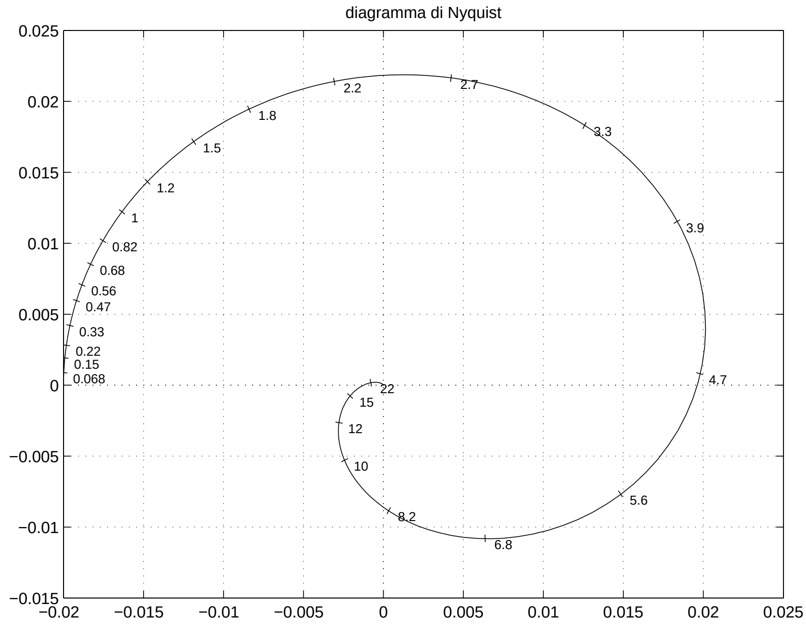


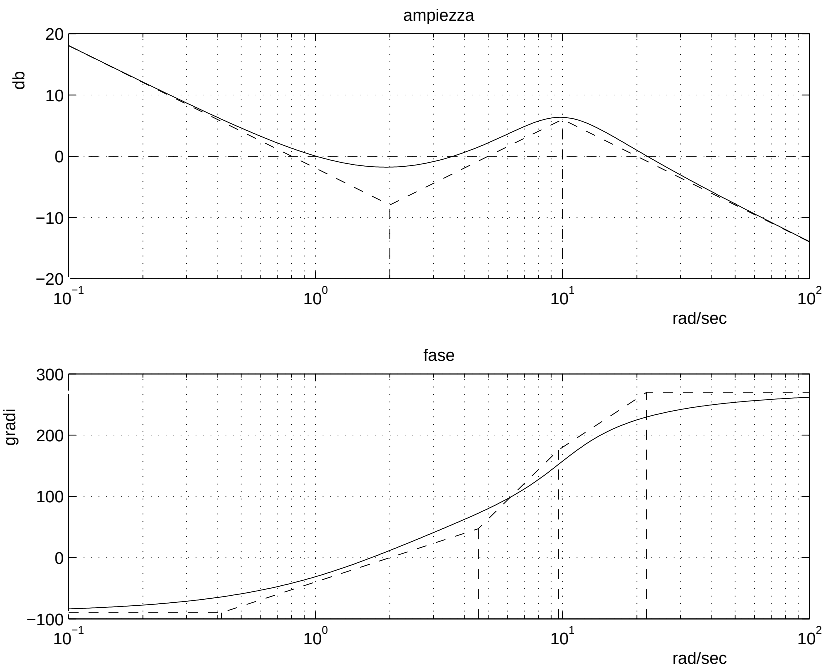
Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma_1^*|} = 50$.

d.4) In base al criterio di Nyquist, dire se il sistema $G(s)$ posto in retroazione negativa unitaria è stabile o instabile e spiegarne la motivazione.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist non circonda il punto -1. L'assenza di poli a parte reale positiva rende il sistema in retroazione unitaria stabile.

e) Si faccia riferimento ad un sistema $G(s)$ i cui diagrammi di Bode sono mostrati in figura. Nei limiti della precisione consentita dal grafico si risponda alle seguenti domande:



e.1) calcolare la risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema $G(s)$ quando in ingresso è presente il segnale:
$x(t) = 4\cos(10\,t + \pi/6)$;

$y_\infty(t) = 8\cos(10\,t + 7\,\pi/6)$

e.2) ricavare l'espressione analitica della funzione di trasferimento $G(s)$. Giustificare brevemente la soluzione trovata.

$$G(s) = \frac{20\,(s+2)^2}{s\,(s^2 - 10\,s + 100)}$$

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente gli eventuali punti di diramazione.
Soluzione: vedi figura 4.

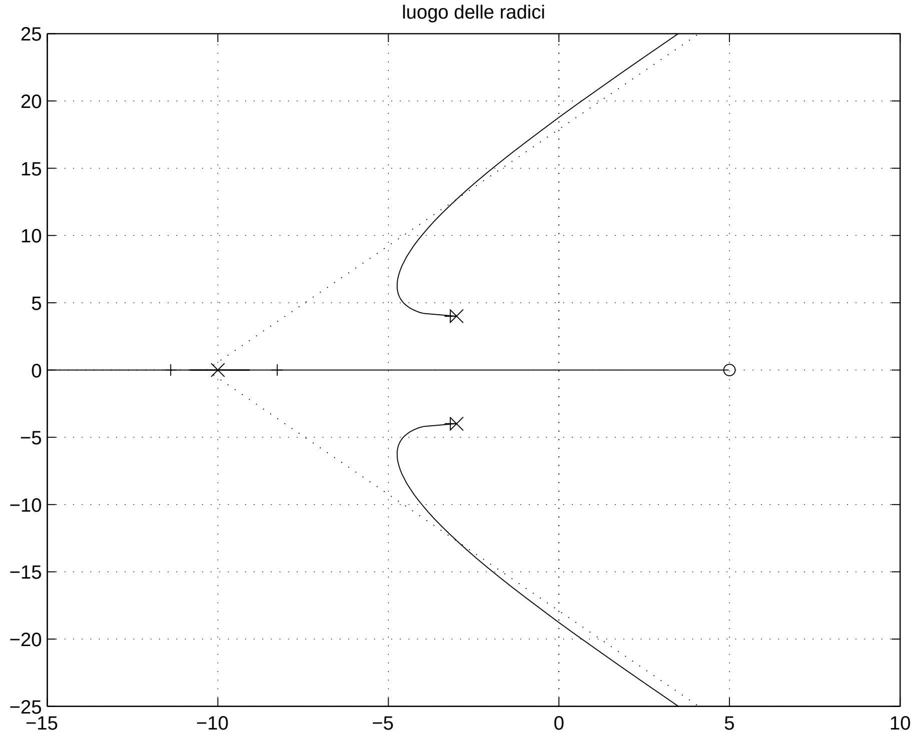


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$ per $K > 0$.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

<u>Soluzione</u>:

$$\sigma = -10.33$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = \pm 18.77\, i$$
$$K^* = 805.96$$

Fondamenti di Controlli Automatici
A.A. 2008/09
23 Febbraio 2009 - Domande Teoriche
Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il picco di risonanza M_R per un sistema del 2 ordine è:
   - ○ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-\delta^2}}$
   - ○ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$
   - ⊗ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$
   - ○ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-2\delta^2}}$

2. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$2\dddot{x}(t) + 5\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 4x(t) = 4\dot{u}(t) + 3u(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{4s+3}{2s^3+5s^2+s+4}$$

3. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:
   - ○ ha solo una radice a parte reale positiva
   - ⊗ ha almeno una radice a parte reale positiva
   - ⊗ ha almeno una radice a parte reale negativa
   - ⊗ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva

4. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = 2t^2$ è:
   - ⊗ $X(s) = \frac{4}{s^3}$;
   - ○ $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
   - ○ $X(s) = \frac{1}{s^2}$.

5. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $-1 < \delta < 0$ è caratterizzato da:
   - ⊗ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ○ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ○ due poli reali distinti a parte reale positiva;
   - ○ due poli reali distinti a parte reale negativa.

6. Un sistema di tipo 1
   - ○ ha uno zero nell'origine;
   - ⊗ ha un polo nell'origine;
   - ○ ha un errore a regime nullo nella risposta alla rampa;
   - ⊗ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino.

7. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati a coefficiente di smorzamento δ costante è formato da:
   - ○ una retta parallela all'asse immaginario;
   - ○ due rette parallele all'asse reale.
   - ⊗ due semirette uscenti dall'origine;

8. Un sistema dinamico lineare è stabile se la sua funzione di trasferimento ha tutti i poli:
   - ○ a parte reale positiva ed eventuali poli a parte reale nulla hanno molteplicità unitaria;
   - ○ a parte reale strettamente positiva.
   - ⊗ a parte reale negativa ed eventuali poli a parte reale nulla hanno molteplicità unitaria;
   - ⊗ a parte reale strettamente negativa.
9. Sia $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:
   - ○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s) - f(0-)$;
   - ○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = \frac{1}{s}F(s)$;
   - ⊗ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\,F(s) - f(0-)$;
   - ○ $\mathcal{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = sF(s)$.
10. Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s) = \frac{s+1}{s(s^2+4\,s+16)}$ per $\omega \in [0,\,\infty]$:
    - ○ ha guadagno statico unitario;
    - ○ si evolve tutta nel semipiano positivo;
    - ⊗ presenta un asintoto verticale;
    - ○ è chiuso all'infinito da una semicirconferenza percorsa in senso orario.
11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle fasi:
    - ○ una fase di $-\frac{\pi}{2}$ per $\omega \to 0$;
    - ⊗ una fase di $-\pi$ per $\omega \to 0$;
    - ⊗ una fase di $-\frac{3\pi}{2}$ per $\omega \to \infty$;
    - ○ una fase di $-\pi$ per $\omega \to \infty$.
12. L'errore a regime di un sistema $G(s)$ con ingresso del tipo $u(t) = R_0\,t$ si può determinare come $e = \frac{R_0}{K_e}$, dove K_e vale:
    - ○ $K_e = \lim_{s\to 0} s^2\,G(s)$;
    - ⊗ $K_e = \lim_{s\to 0} s\,G(s)$;
    - ○ $K_e = \lim_{s\to 0} G(s)$.

    Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il luogo delle radici del sistema $\frac{1}{(s+1)(s+2)}$ per valori positivi del guadagno di retroazione:
    - ○ ha un asintoto orizzontale corrispondente all'intervallo $(-\infty,\,-2]$;
    - ⊗ ha due asintoti verticali;
    - ⊗ presenta una diramazione nel punto $-1.5 + j0$.
14. Un problema di contorno delle radici:
    - ⊗ si ha quando a variare non è il guadagno di retroazione K ma un qualunque altro parametro del sistema;
    - ○ può sempre essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici;
    - ⊗ può essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici tutte le volte che il parametro che varia entra linearmente nell'equazione caratteristica del sistema retroazionato.