Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09

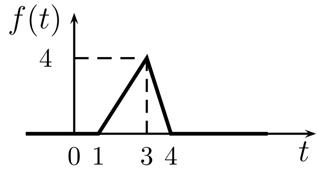
8 Gennaio 2009 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

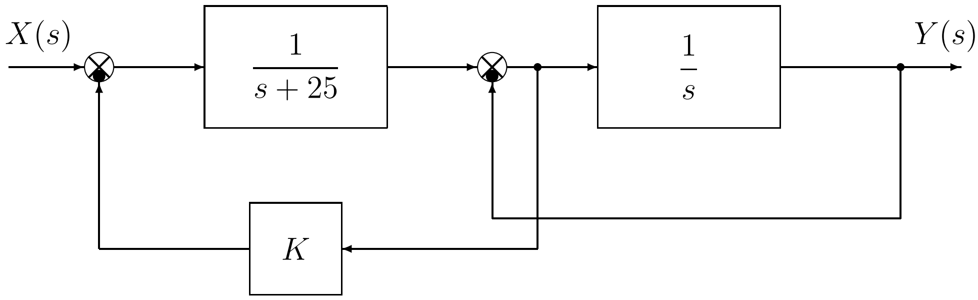
$$x_1(t) = 3\,t^5\,e^{-4\,t} + \cos(5\,\pi\,t), \qquad x_2(t) = 4\,\sin(3\,t - 12),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{s+1}{(s+4)\,(s-6)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{4}{(s+2)^4}, \qquad G_3(s) = \frac{(s+3)^2}{(s-2)\,(s+2)\,(s-4)}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto $K = -24$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

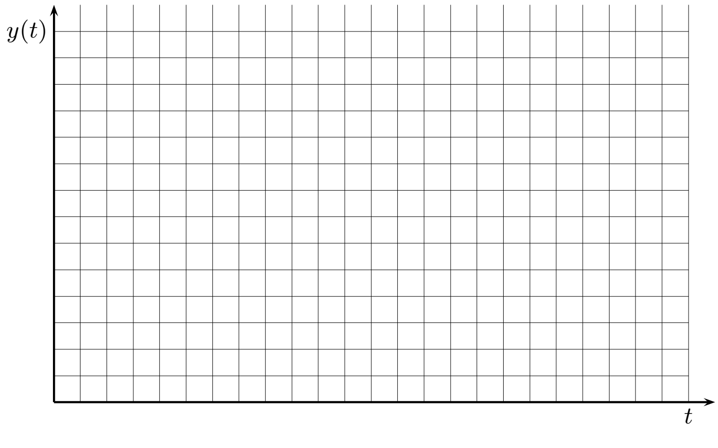
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

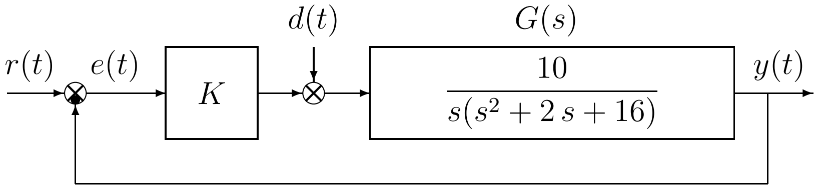
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 4$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

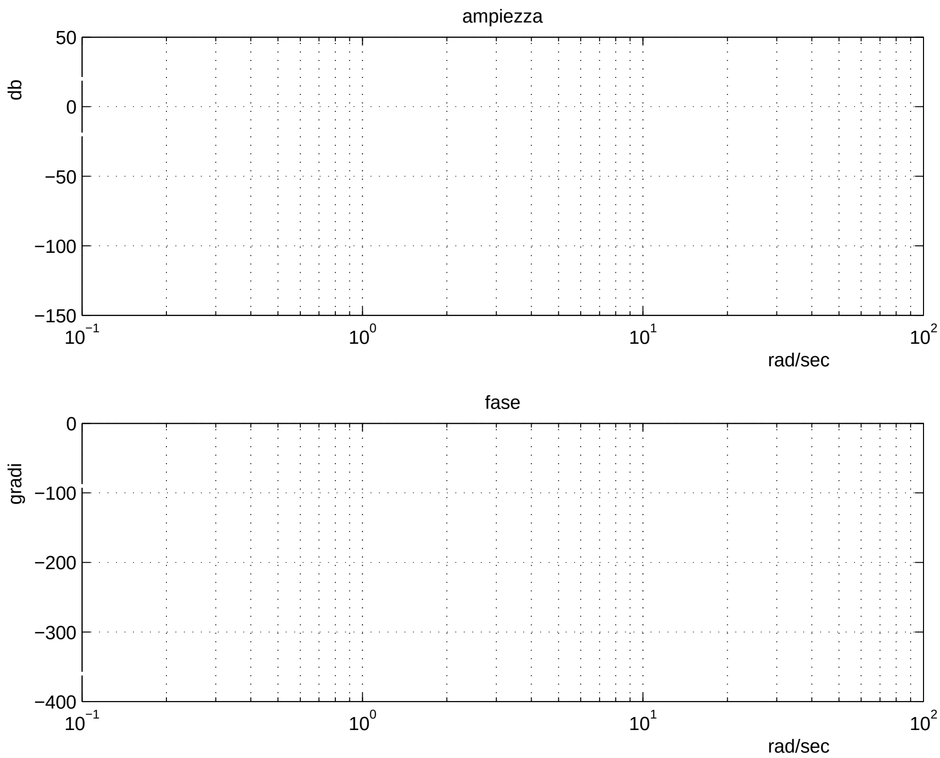
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2\,d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 4\,t$.

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima del modulo della risposta "a regime" $|y_\infty(t)|$ del sistema in catena aperta quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4\,\cos(0.64\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09

8 Gennaio 2009 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Per $\omega > 0$, il diagramma di Bode reale delle fasi della funzione $G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$ coincide con il diagramma "asintotico" di Bode:

   ◯ in nessun punto al finito;

   ◯ in un solo punto al finito $\omega_n = 1/\tau$;

   ◯ nei tre punti al finito $\omega_n = 1/\tau$, $\omega_a = \omega_n/4.81$, $\omega_b = 4.81\,\omega_n$.

2. Il margine di ampiezza M_A del sistema $G(s) = \frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}$ con $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_3 > 0$ è;

   ◯ sempre maggiore di 1;

   ◯ sempre minore di 1;

   ◯ può essere unitario.

3. Il grado relativo di una funzione di trasferimento è definito come:

   ◯ il grado del numeratore meno quello del denominatore;

   ◯ il grado del denominatore meno quello del numeratore;

   ◯ il numero di poli complessi coniugati;

   ◯ il numero di poli nulli.

4. Un sistema del secondo ordine con coefficiente di smorzamento $\delta < 1$ è caratterizzato da:

   ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;

   ◯ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;

   ◯ due poli reali distinti a parte reale negativa;

   ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva.

5. Il margine di fase del sistema $G(s) = 1/s$:

   ◯ è $-\frac{\pi}{2}$;

   ◯ è $\frac{\pi}{2}$;

   ◯ è nullo;

   ◯ non è definibile.

6. Nell'appicazione del criterio di Routh, le radici dell'equazione ausiliaria che si ottiene quando una riga intera della tabella di Routh si annulla:

   ◯ sono radici anche dell'equazione caratteristica di partenza;

   ◯ sono tutte radici a parte reale nulla;

   ◯ sono radici simmetriche rispetto all'origine del piano complesso.

7. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to \infty$;

   ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to 0$;

   ◯ del segnale $x(t) = te^{-(t-3)}$;

   ◯ del segnale $x(t) = t^2 e^{-3t}$.

8. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 4 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:
   - ◯ una pendenza di $-20\,dB/decade$ per $\omega \to 0$;
   - ◯ una pendenza di $-40\,dB/decade$ per $\omega \to 0$;
   - ◯ una pendenza di $-60\,dB/decade$ per $\omega \to \infty$;
   - ◯ una pendenza di $-80\,dB/decade$ per $\omega \to \infty$.

9. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa:
   - ◯ ha guadagno statico minore di 1;
   - ◯ ha guadagno statico maggiore di 1;
   - ◯ ha guadagno statico unitario.

10. Un sistema dinamico lineare è semplicemente stabile se i poli della funzione di trasferimento sono:
    - ◯ tutti a parte reale negativa;
    - ◯ tutti a parte reale negativa tranne uno uguale a zero;
    - ◯ tutti a parte reale positiva.

11. Data la funzione di risposta armonica $G(j\,\omega)$, il suo margine di fase è definito come:
    - ◯ $\left.\dfrac{1}{|G(j\omega)|}\right|_{\omega\,:\,\angle G(j\omega)=-\pi}$;
    - ◯ $\left.\angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=0}$;
    - ◯ $\left.\pi + \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$;
    - ◯ $\left.\pi - \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$.

12. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il tempo di assestamento T_a rimane costante al variare della posizione dei poli:
    - ◯ su di una retta parallela all'asse immaginario;
    - ◯ su di una circonferenza con centro nell'origine;
    - ◯ su due semirette uscenti dall'origine;
    - ◯ su di un'ellisse con fuoco nell'origine.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Gli asintoti del luogo delle radici di un sistema avente 3 poli e guadagno statico negativo formano, nel caso di guadagno di retroazione $K > 0$, rispetto all'asse reale positivo angoli:
    - ◯ di 60, 180 e 300 gradi;
    - ◯ di 0, 120 e 240 gradi;
    - ◯ il sistema non presenta asintoti.

14. In un sistema con $K_\tau > 0$, per valori del guadagno di retroazione $K > 0$ un punto dell'asse reale appartiene al luogo delle radici se lascia alla sua destra:
    - ◯ un numero totale dispari di poli;
    - ◯ un numero totale pari di poli;
    - ◯ un numero totale dispari di zeri e poli;
    - ◯ un numero totale pari di zeri e poli.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09

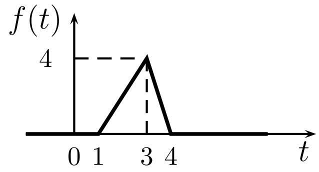
8 Gennaio 2009 - Esercizi

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 3\,t^5\,e^{-4\,t} + \cos(5\,\pi\,t), \qquad x_2(t) = 4\,\sin(3\,t - 12),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{360}{(s+4)^6} + \frac{s}{s^2 + 25\,\pi^2}, \qquad X_2(s) = \frac{12\,e^{-4s}}{s^2+9}, \qquad X_3(s) = \frac{2}{s^2}\left[e^{-s} - 3\,e^{-3\,s} + 2\,e^{-4\,s}\right]$$

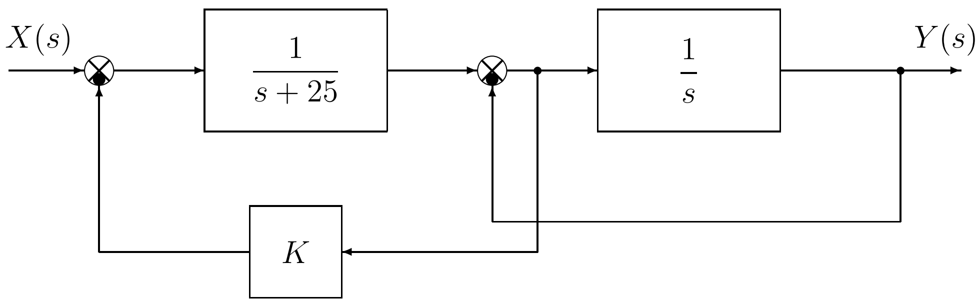
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{s+1}{(s+4)\,(s-6)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{4}{(s+2)^4}, \qquad G_3(s) = \frac{(s+3)^2}{(s-2)\,(s+2)\,(s-4)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{3}{100}\,e^{-4\,t} + \frac{3}{100}\,e^{6\,t} + \frac{7}{10}\,t\,e^{6\,t}, \qquad g_2(t) = \frac{2\,t^3}{3}\,e^{-2\,t}, \qquad g_3(t) = -\frac{25}{8}\,e^{2\,t} + \frac{1}{24}\,e^{-2\,t} + \frac{49}{12}\,e^{4\,t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



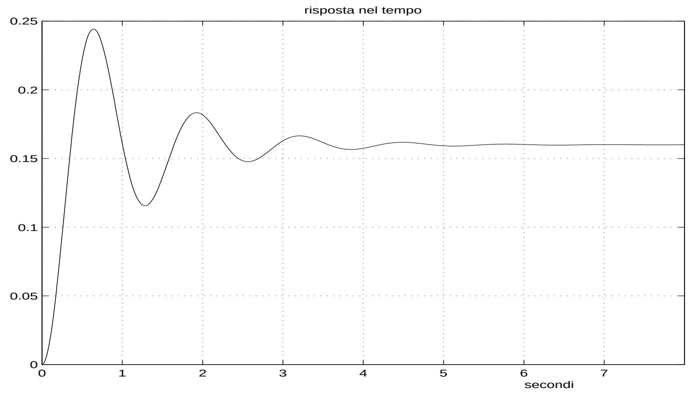
c.1) Posto $K = -24$, utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\,s + 25}$$

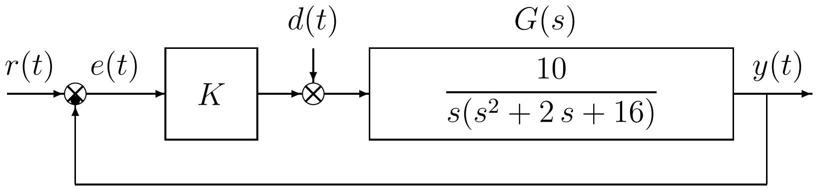
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

1) $\sigma = -1$	3) $\omega_n = 5$	5) $K_0 = \frac{1}{25}$
2) $\omega = 4.89$	4) $\delta = 0.2$	6) $T_a = 3$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingresso $x(t) = 4$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K}{s\,(s^2+2\,s+16)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 2\,s^2 + 16\,s + 10\,K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 16 \\ 2 & 2 & 10\,K \\ 1 & 16-5\,K & \\ 0 & 10\,K & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 3.2$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 3.2$ è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{16}{1}} = 4$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2\,d_0$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1 + K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.2\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico è infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 5$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 4\,t$.

<u>Soluzione</u>: L'errore a regime $e_\infty = \frac{4}{K_v}$ con $K_v = \frac{5\,K}{8}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{32}{5\,K}.$$

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

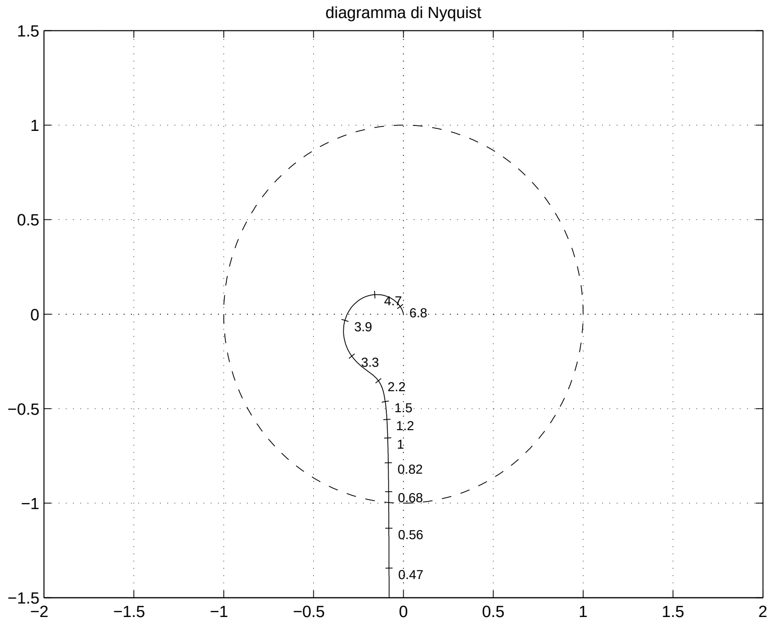


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = -0.078$.

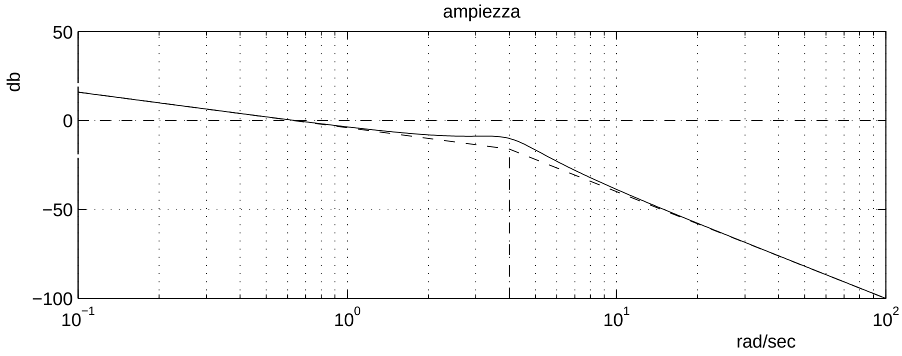
Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

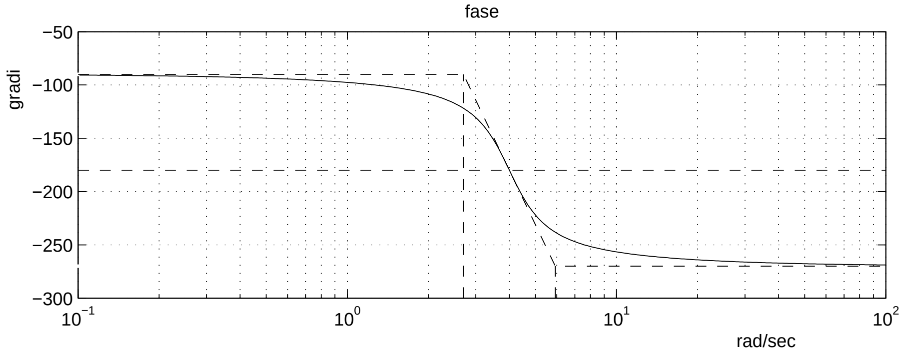
$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.3125$$

Il corrispondente valore di ω^* è 3.2 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 3.2$ ed il margine di fase è $M_f = 85°$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;





e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

<u>Soluzione</u>: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.64\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima del modulo della risposta "a regime" $|y_\infty(t)|$ del sistema in catena aperta quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4\,\cos(0.64\,t)$.

<u>Soluzione</u>: Dal diagramma di Bode si ricava, alla pulsazione $\omega_T = 1.5\, rad/s$, un guadagno del sistema in catena aperta circa $-20\ dB = 0.1$. Il modulo del segnale d'uscita risulta quindi essere $|y_\infty(t)| = 0.4$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. <u>Soluzione</u>: vedi figura 2.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

<u>Soluzione</u>:

$$\sigma = -0.667$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 4\,i$$
$$K^* = 3.2$$

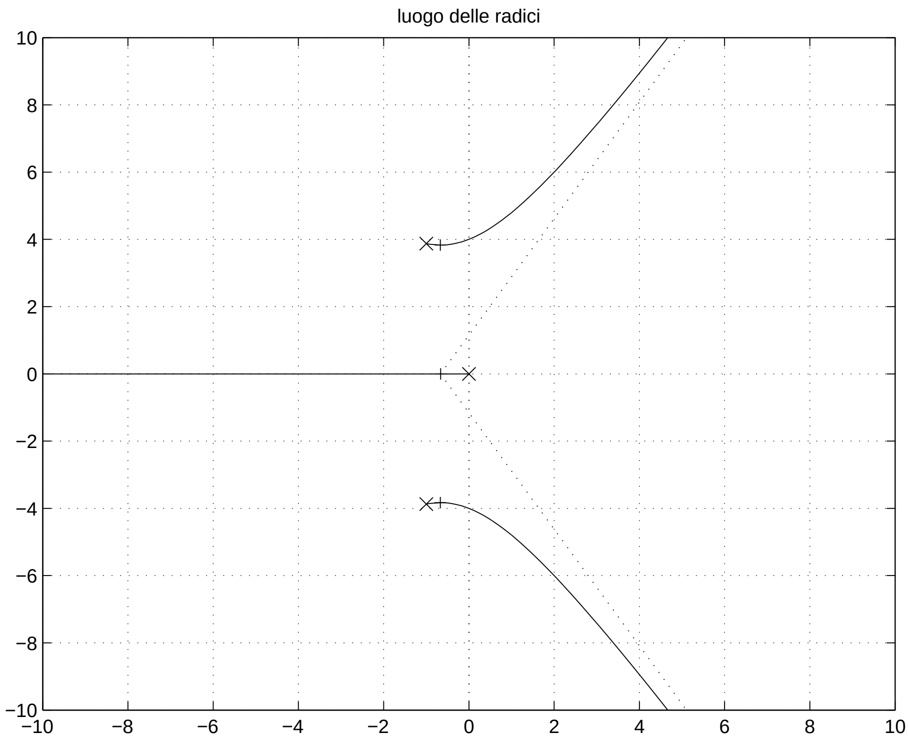


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2008/09
8 Gennaio 2009 - Domande Teoriche
Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Per $\omega > 0$, il diagramma di Bode reale delle fasi della funzione $G(s) = \frac{1}{1+\tau s}$ coincide con il diagramma "asintotico" di Bode:
   - ○ in nessun punto al finito;
   - ⊗ in un solo punto al finito $\omega_n = 1/\tau$;
   - ○ nei tre punti al finito $\omega_n = 1/\tau$, $\omega_a = \omega_n/4.81$, $\omega_b = 4.81\,\omega_n$.
2. Il margine di ampiezza M_A del sistema $G(s) = \frac{1}{(1+\tau_1 s)(1+\tau_2 s)(1+\tau_3 s)}$ con $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$, $\tau_3 > 0$ è;
   - ⊗ sempre maggiore di 1;
   - ○ sempre minore di 1;
   - ○ può essere unitario.
3. Il grado relativo di una funzione di trasferimento è definito come:
   - ○ il grado del numeratore meno quello del denominatore;
   - ⊗ il grado del denominatore meno quello del numeratore;
   - ○ il numero di poli complessi coniugati;
   - ○ il numero di poli nulli.
4. Un sistema del secondo ordine con coefficiente di smorzamento $\delta < 1$ è caratterizzato da:
   - ⊗ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ⊗ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ○ due poli reali distinti a parte reale negativa;
   - ⊗ due poli reali distinti a parte reale positiva.
5. Il margine di fase del sistema $G(s) = 1/s$:
   - ○ è $-\frac{\pi}{2}$;
   - ⊗ è $\frac{\pi}{2}$;
   - ○ è nullo;
   - ○ non è definibile.
6. Nell'appicazione del criterio di Routh, le radici dell'equazione ausiliaria che si ottiene quando una riga intera della tabella di Routh si annulla:
   - ⊗ sono radici anche dell'equazione caratteristica di partenza;
   - ○ sono tutte radici a parte reale nulla;
   - ⊗ sono radici simmetriche rispetto all'origine del piano complesso.
7. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ è la trasformata di Laplace:
   - ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to \infty$;
   - ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to 0$;
   - ○ del segnale $x(t) = te^{-(t-3)}$;
   - ○ del segnale $x(t) = t^2 e^{-3t}$.

8. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 4 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

   ⊗ una pendenza di $-20\,dB/decade$ per $\omega \to 0$;
   ○ una pendenza di $-40\,dB/decade$ per $\omega \to 0$;
   ○ una pendenza di $-60\,dB/decade$ per $\omega \to \infty$;
   ⊗ una pendenza di $-80\,dB/decade$ per $\omega \to \infty$.

9. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa:

   ○ ha guadagno statico minore di 1;
   ○ ha guadagno statico maggiore di 1;
   ⊗ ha guadagno statico unitario.

10. Un sistema dinamico lineare è semplicemente stabile se i poli della funzione di trasferimento sono:

    ○ tutti a parte reale negativa;
    ⊗ tutti a parte reale negativa tranne uno uguale a zero;
    ○ tutti a parte reale positiva.

11. Data la funzione di risposta armonica $G(j\,\omega)$, il suo margine di fase è definito come:

    ○ $\left.\frac{1}{|G(j\omega)|}\right|_{\omega\,:\,\angle G(j\omega)=-\pi}$;
    ○ $\left.\angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=0}$;
    ⊗ $\left.\pi + \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$;
    ○ $\left.\pi - \angle G(j\,\omega)\right|_{\omega\,:\,|G(j\omega)|=1}$.

12. In un sistema del secondo ordine a poli complessi coniugati, il tempo di assestamento T_a rimane costante al variare della posizione dei poli:

    ⊗ su di una retta parallela all'asse immaginario;
    ○ su di una circonferenza con centro nell'origine;
    ○ su due semirette uscenti dall'origine;
    ○ su di un'ellisse con fuoco nell'origine.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Gli asintoti del luogo delle radici di un sistema avente 3 poli e guadagno statico negativo formano, nel caso di guadagno di retroazione $K > 0$, rispetto all'asse reale positivo angoli:

    ○ di 60, 180 e 300 gradi;
    ⊗ di 0, 120 e 240 gradi;
    ○ il sistema non presenta asintoti.

14. In un sistema con $K_\tau > 0$, per valori del guadagno di retroazione $K > 0$ un punto dell'asse reale appartiene al luogo delle radici se lascia alla sua destra:

    ○ un numero totale dispari di poli;
    ○ un numero totale pari di poli;
    ⊗ un numero totale dispari di zeri e poli;
    ○ un numero totale pari di zeri e poli.