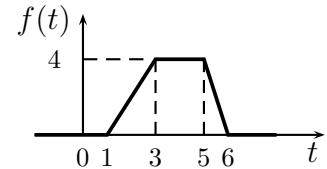


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace  $X_i(s)$  dei seguenti segnali temporali  $x_i(t)$ :

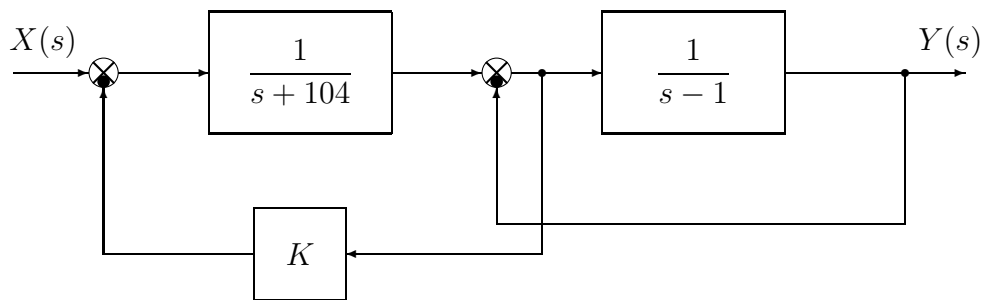
$$x_1(t) = t^5 e^{-2t} + \cos(3\pi t), \quad x_2(t) = 3 \sin(2t - 8),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva  $g_i(t)$  delle seguenti funzioni di trasferimento  $G_i(s)$ :

$$G_1(s) = \frac{s-1}{(s-4)(s+6)^2}, \quad G_2(s) = \frac{2}{(s+3)^4}, \quad G_3(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-3)(s+3)(s+4)}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto  $K = -100$ , utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento  $G(s)$  che lega l'ingresso  $X(s)$  all'uscita  $Y(s)$ :

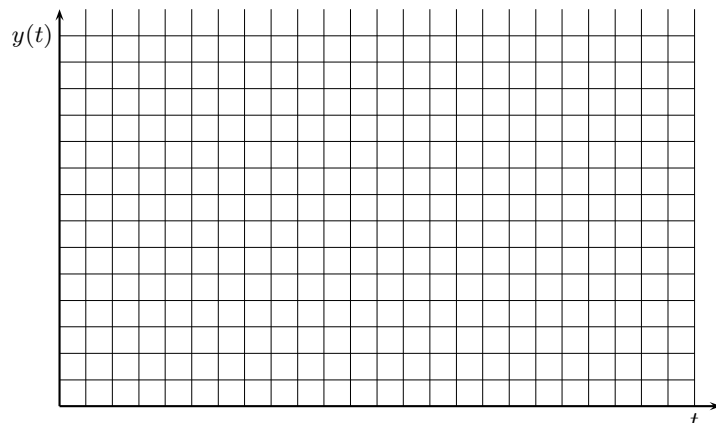
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento  $G(s)$  calcolare: 1) la parte reale  $\sigma$  e 2) la parte immaginaria  $\omega$  dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale  $\omega_n$  e 4) il coefficiente di smorzamento  $\delta$  dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico  $K_0$ ; 6) il tempo di assestamento  $T_a$  del sistema  $G(s)$  alla risposta al gradino:

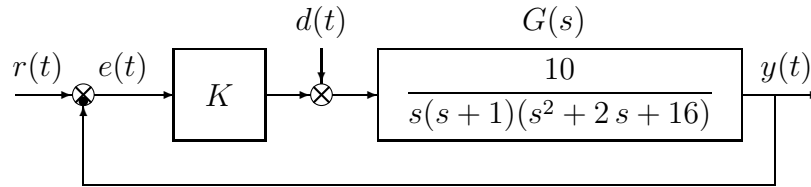
- |                          |                            |                       |
|--------------------------|----------------------------|-----------------------|
| 1) $\sigma = \dots\dots$ | 3) $\omega_n = \dots\dots$ | 5) $K_0 = \dots\dots$ |
| 2) $\omega = \dots\dots$ | 4) $\delta = \dots\dots$   | 6) $T_a = \dots\dots$ |

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta  $y(t)$  della funzione di trasferimento  $G(s)$  al gradino in ingresso  $x(t) = 5$ .

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro  $K$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

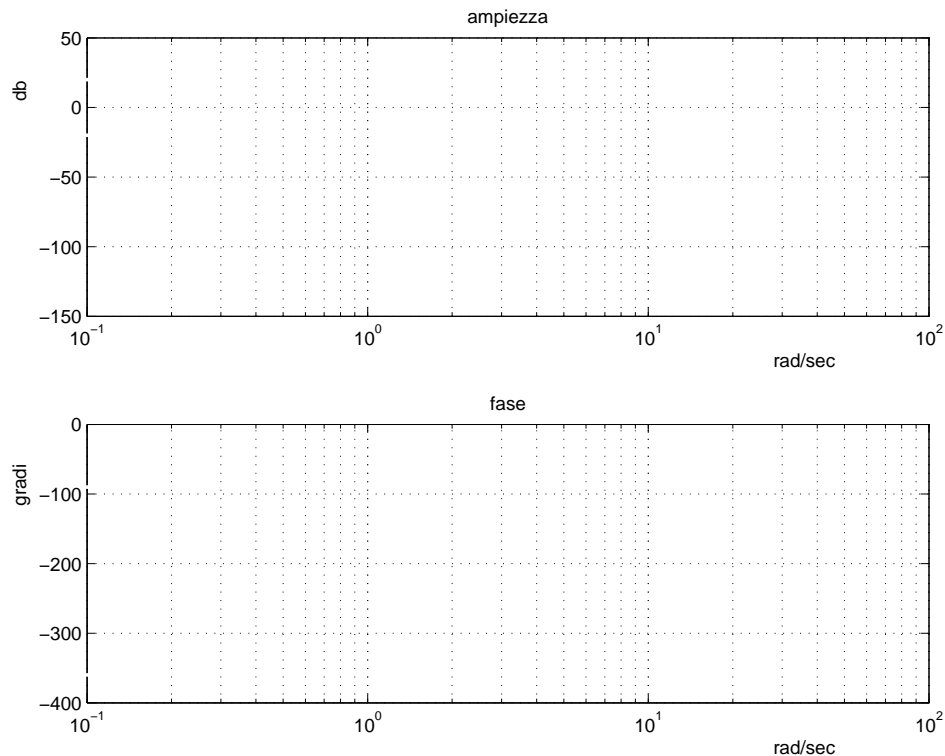
d.2) Posto  $r(t) = 0$ , si determini il valore del parametro  $K$  tale da garantire che in presenza del disturbo costante  $d(t) = d_0$ , il valore a regime dell'uscita  $y(t)$  sia  $y_\infty = 0.3 d_0$ .

d.3) Posto  $d(t) = 0$ , calcolare, in funzione del parametro  $K$ , l'errore a regime  $e_\infty(t)$  corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa  $r(t) = 7t$ .

d.4) Posto  $K = 1$ , disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello  $K G(s)$ . Calcolare esattamente la posizione  $\sigma_a$  dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni  $\sigma_i^*$  con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni  $\omega_i^*$ . Determinare inoltre il margine di ampiezza  $M_\alpha$ . Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase  $M_\phi$ .

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga  $K = 1$ :

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello  $K G(s)$ ;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima del modulo della risposta "a regime"  $|y_\infty(t)|$  del sistema in catena aperta quando il disturbo  $d(t) = 0$  e in ingresso è presente il segnale  $r(t) = 4 \cos(1.5t)$ .

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro  $K$ . Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro  $K$ .

Fondamenti di Controlli Automatici -  
A.A. 2008/09  
16 Dicembre 2008 - Domande Teoriche  
Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

- Il grado relativo di una funzione di trasferimento è definito come:
  - il grado del numeratore meno quello del denominatore;
  - il grado del denominatore meno quello del numeratore;
  - il numero di poli complessi coniugati;
  - il numero di poli nulli.
- Per  $\omega \in [-\infty, \infty]$ , il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema  $G(s)$  di tipo 1 deve essere chiuso all'infinito:
  - con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
  - con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
  - con una circonferenza percorsa in senso orario;
  - con una circonferenza percorsa in senso antiorario.
- Dato il diagramma di Bode asintotico delle fasi di  $G(j\omega)$ , da esso si può dedurre il diagramma asintotico delle ampiezze:
  - solo se il diagramma di Bode delle fasi presenta pendenze negative o nulle;
  - solo se il sistema  $G(s)$  ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
  - solo se il sistema  $G(s)$  ha tutti i poli a parte reale negativa;
  - se nel sistema non sono presenti ritardi.
- Un sistema del secondo ordine con coefficiente di smorzamento  $\delta > 1$  è caratterizzato da:
  - due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
  - due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
  - due poli reali distinti a parte reale negativa;
  - due poli reali distinti a parte reale positiva.
- Il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{\tau_z s + 1}{s^2(\tau_p s + 1)}$ :
  - circonda il punto critico  $-1$  se  $\tau_z < \tau_p$ ;
  - circonda il punto critico  $-1$  se  $\tau_z > \tau_p$ ;
  - circonda sempre il punto critico  $-1$ .
- Affinchè un sistema sia asintoticamente stabile, occorre che i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh ad esso associata siano tutti:
  - positivi o nulli;
  - a parte reale negativa;
  - di segno concorde.
- Il valore iniziale della risposta all'impulso  $g(t)$  del sistema  $G(s) = \frac{5s+1}{s^2+2}$  vale:
  - $g(\infty) = 0$ ;
  - $g(\infty) = 1$ ;
  - $g(\infty) = 5$ .

8. La funzione complessa  $X(s) = \frac{1}{(s+5)^2}$  è la trasformata di Laplace:

- di un segnale  $x(t)$  che tende a  $\frac{1}{5}$  per  $t \rightarrow \infty$ ;
- di un segnale  $x(t)$  che tende a zero per  $t \rightarrow 0$ ;
- del segnale  $x(t) = te^{-(t-5)}$ ;
- del segnale  $x(t) = te^{-5t}$ .

9. Determinare una stima del tempo di assestamento del sistema  $G(s) = \frac{1}{s^2 + 101s + 100}$ ;

$$T_a =$$

10. Un sistema  $G(s)$  a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

- una pendenza di  $-20 \text{ dB/decade}$  per  $\omega \rightarrow 0$ ;
- una pendenza di  $-40 \text{ dB/decade}$  per  $\omega \rightarrow 0$ ;
- una pendenza di  $-20 \text{ dB/decade}$  per  $\omega \rightarrow \infty$ ;
- una pendenza di  $-40 \text{ dB/decade}$  per  $\omega \rightarrow \infty$ .

11. Un sistema dinamico lineare è semplicemente stabile se i poli della funzione di trasferimento sono:

- tutti a parte reale negativa;
- tutti a parte reale negativa tranne uno uguale a zero;
- tutti a parte reale positiva.

12. Data la funzione di risposta armonica  $G(j\omega)$ , il suo margine di fase è definito come:

- $\frac{1}{|G(j\omega)|} \Big|_{\omega: \angle G(j\omega) = -\pi}$ ;
- $\angle G(j\omega) \Big|_{\omega: |G(j\omega)| = 0}$ ;
- $\pi + \angle G(j\omega) \Big|_{\omega: |G(j\omega)| = 1}$ ;
- $\pi - \angle G(j\omega) \Big|_{\omega: |G(j\omega)| = 1}$ .

**Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

13. Gli asintoti del luogo delle radici di un sistema avente 3 poli e guadagno statico negativo formano, nel caso di guadagno di retroazione  $K > 0$ , rispetto all'asse reale positivo angoli:

- di 0, 120 e 240 gradi;
- di 60, 180 e 300 gradi;
- il sistema non presenta asintoti.

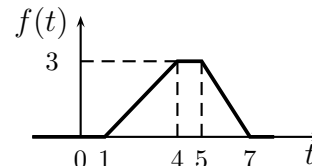
14. Tramite lo studio del contorno delle radici è possibile determinare il valore dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

- di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
- di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
- del guadagno di retroazione.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace  $X_i(s)$  dei seguenti segnali temporali  $x_i(t)$ :

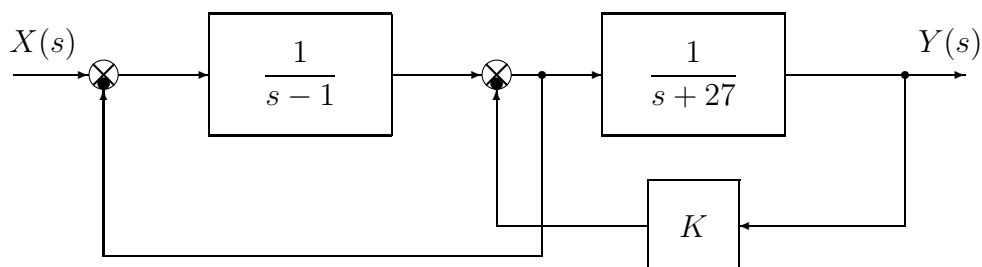
$$x_1(t) = 5 \cos(3t - 9), \quad x_2(t) = 2t^5 e^{-4t} + 2 \sin(2\pi t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva  $g_i(t)$  delle seguenti funzioni di trasferimento  $G_i(s)$ :

$$G_1(s) = -\frac{1}{(s+5)^4}, \quad G_2(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-1)(s+1)(s+3)}, \quad G_3(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s-4)^2}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto  $K = -25$ , utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento  $G(s)$  che lega l'ingresso  $X(s)$  all'uscita  $Y(s)$ :

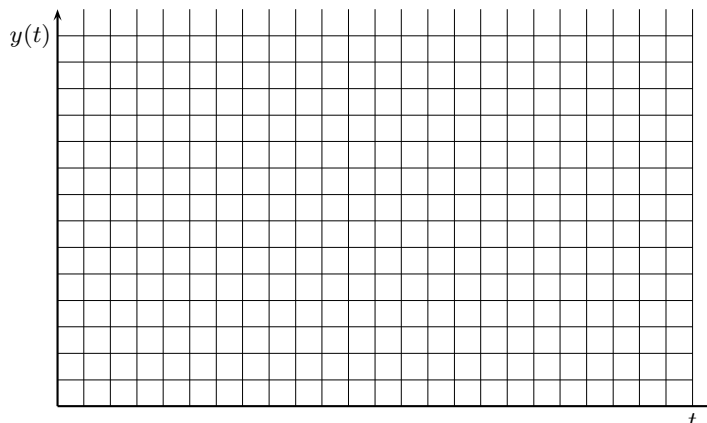
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento  $G(s)$  calcolare: 1) la parte reale  $\sigma$  e 2) la parte immaginaria  $\omega$  dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale  $\omega_n$  e 4) il coefficiente di smorzamento  $\delta$  dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico  $K_0$ ; 6) il tempo di assestamento  $T_a$  del sistema  $G(s)$  alla risposta al gradino:

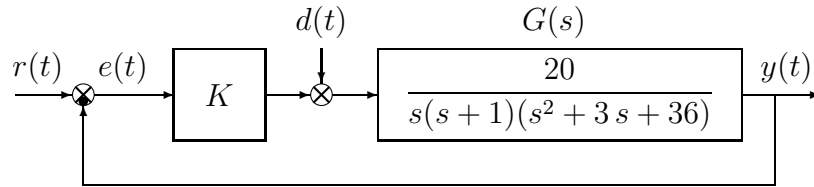
- |                          |                            |                       |
|--------------------------|----------------------------|-----------------------|
| 1) $\sigma = \dots\dots$ | 3) $\omega_n = \dots\dots$ | 5) $K_0 = \dots\dots$ |
| 2) $\omega = \dots\dots$ | 4) $\delta = \dots\dots$   | 6) $T_a = \dots\dots$ |

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta  $y(t)$  della funzione di trasferimento  $G(s)$  al gradino in ingresso  $x(t) = 4$ .

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro  $K$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

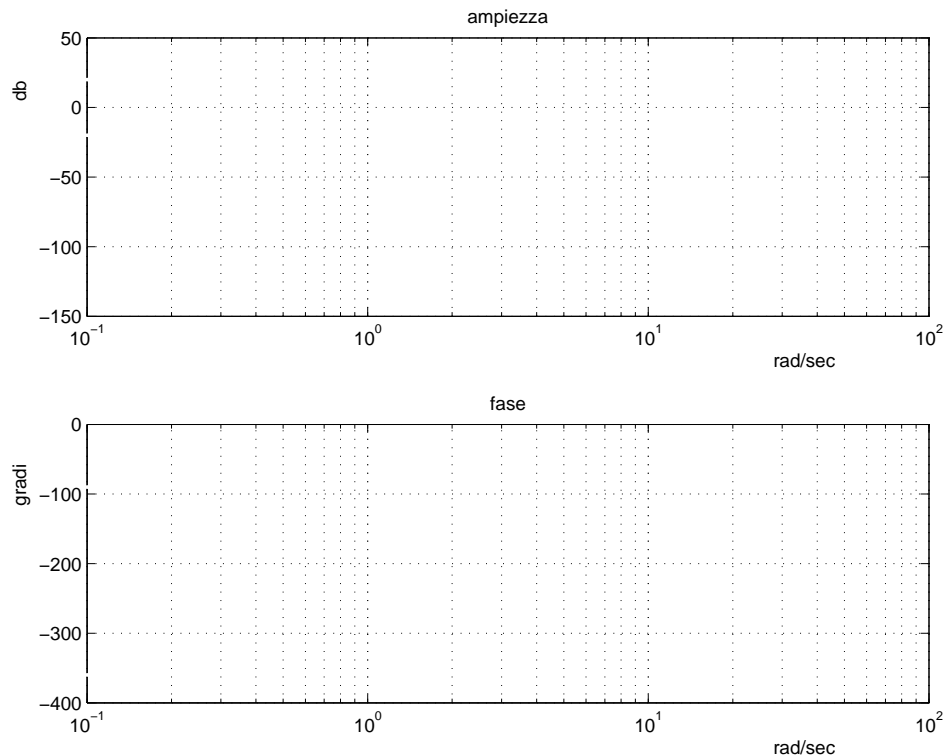
d.2) Posto  $r(t) = 0$ , si determini il valore del parametro  $K$  tale da garantire che in presenza del disturbo costante  $d(t) = d_0$ , il valore a regime dell'uscita  $y(t)$  sia  $y_\infty = 0.5 d_0$ .

d.3) Posto  $d(t) = 0$ , calcolare, in funzione del parametro  $K$ , l'errore a regime  $e_\infty(t)$  corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa  $r(t) = 8t$ .

d.4) Posto  $K = 1$ , disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello  $K G(s)$ . Calcolare esattamente la posizione  $\sigma_a$  dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni  $\sigma_i^*$  con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni  $\omega_i^*$ . Determinare inoltre il margine di ampiezza  $M_\alpha$ . Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase  $M_\phi$ .

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga  $K = 1$ :

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello  $K G(s)$ ;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima del modulo della risposta "a regime"  $|y_\infty(t)|$  del sistema in catena aperta quando il disturbo  $d(t) = 0$  e in ingresso è presente il segnale  $r(t) = 5 \cos(0.8t)$ .

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro  $K$ . Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro  $K$ .

Fondamenti di Controlli Automatici -  
A.A. 2008/09  
16 Dicembre 2008 - Domande Teoriche  
Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Il grado relativo di una funzione di trasferimento è definito come:
  - il numero di poli complessi coniugati;
  - il numero di poli nulli.
  - il grado del numeratore meno quello del denominatore;
  - il grado del denominatore meno quello del numeratore.
2. Per  $\omega \in [-\infty, \infty]$ , il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema  $G(s)$  di tipo 1 deve essere chiuso all'infinito:
  - con una circonferenza percorsa in senso antiorario;
  - con una circonferenza percorsa in senso orario;
  - con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
  - con una semicirconferenza percorsa in senso orario.
3. Dato il diagramma di Bode asintotico delle fasi di  $G(j\omega)$ , da esso si può dedurre il diagramma asintotico delle ampiezze:
  - se nel sistema non sono presenti ritardi.
  - solo se il sistema  $G(s)$  ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
  - solo se il sistema  $G(s)$  ha tutti i poli a parte reale negativa;
  - solo se il diagramma di Bode delle fasi presenta pendenze negative o nulle.
4. Un sistema del secondo ordine con coefficiente di smorzamento  $\delta > 1$  è caratterizzato da:
  - due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
  - due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
  - due poli reali distinti a parte reale positiva;
  - due poli reali distinti a parte reale negativa.
5. Il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{\tau_z s + 1}{s^2(\tau_p s + 1)}$ :
  - circonda il punto critico  $-1$  se  $\tau_z > \tau_p$ ;
  - circonda il punto critico  $-1$  se  $\tau_z < \tau_p$ ;
  - circonda sempre il punto critico  $-1$ .
6. Affinchè un sistema sia asintoticamente stabile, occorre che i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh ad esso associata siano tutti:
  - di segno concorde;
  - positivi o nulli;
  - a parte reale negativa.
7. Il valore iniziale della risposta all'impulso  $g(t)$  del sistema  $G(s) = \frac{7s+3}{s^2+1}$  vale:
  - $g(0^+) = 0$ ;
  - $g(0^+) = 1$ ;
  - $g(0^+) = 7$ .

8. La funzione complessa  $X(s) = \frac{1}{(s+5)^2}$  è la trasformata di Laplace:

- del segnale  $x(t) = te^{-5t}$ ;
- del segnale  $x(t) = te^{-(t-5)}$ ;
- di un segnale  $x(t)$  che tende a zero per  $t \rightarrow 0$ ;
- di un segnale  $x(t)$  che tende a  $\frac{1}{5}$  per  $t \rightarrow \infty$ .

9. Determinare una stima del tempo di assestamento del sistema  $G(s) = \frac{1}{s^2+202s+400}$ ;

$$T_a =$$

10. Un sistema  $G(s)$  a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

- una pendenza di  $-40 \text{ dB/decade}$  per  $\omega \rightarrow 0$ ;
- una pendenza di  $-20 \text{ dB/decade}$  per  $\omega \rightarrow 0$ ;
- una pendenza di  $-40 \text{ dB/decade}$  per  $\omega \rightarrow \infty$ ;
- una pendenza di  $-20 \text{ dB/decade}$  per  $\omega \rightarrow \infty$ .

11. Un sistema dinamico lineare è semplicemente stabile se i poli della funzione di trasferimento sono:

- tutti a parte reale negativa tranne uno uguale a zero;
- tutti a parte reale negativa;
- tutti a parte reale positiva.

12. Data la funzione di risposta armonica  $G(j\omega)$ , il suo margine di fase è definito come:

- $\frac{1}{|G(j\omega)|} \Big|_{\omega: \angle G(j\omega) = -\pi}$ ;
- $\angle G(j\omega) \Big|_{\omega: |G(j\omega)| = 0}$ ;
- $\pi - \angle G(j\omega) \Big|_{\omega: |G(j\omega)| = 1}$ ;
- $\pi + \angle G(j\omega) \Big|_{\omega: |G(j\omega)| = 1}$ .

**Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

13. Gli asintoti del luogo delle radici di un sistema avente 3 poli e guadagno statico negativo formano, nel caso di guadagno di retroazione  $K > 0$ , rispetto all'asse reale positivo angoli:

- di 60, 180 e 300 gradi;
- di 0, 120 e 240 gradi;
- il sistema non presenta asintoti.

14. Tramite lo studio del contorno delle radici è possibile determinare il valore dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

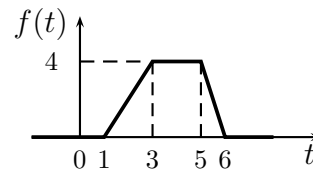
- di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
- di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
- del guadagno di retroazione.

Fondamenti di Controlli Automatici -  
A.A. 2008/09  
16 Dicembre 2008 - Esercizi  
Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace  $X_i(s)$  dei seguenti segnali temporali  $x_i(t)$ :

$$x_1(t) = t^5 e^{-2t} + \cos(3\pi t), \quad x_2(t) = 3 \sin(2t - 8),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{120}{(s+2)^6} + \frac{s}{s^2 + 9\pi^2}, \quad X_2(s) = \frac{6e^{-4s}}{s^2 + 4}, \quad X_3(s) = \frac{2}{s^2} [e^{-s} - e^{-3s} - e^{-5s} + e^{-7s}]$$

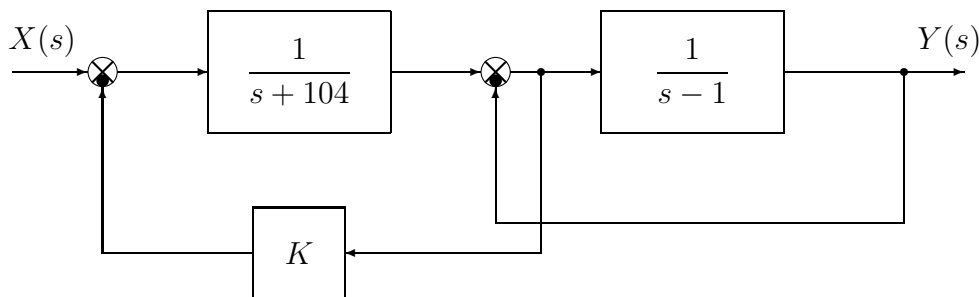
b) Calcolare la risposta impulsiva  $g_i(t)$  delle seguenti funzioni di trasferimento  $G_i(s)$ :

$$G_1(s) = \frac{s-1}{(s-4)(s+6)^2}, \quad G_2(s) = \frac{2}{(s+3)^4}, \quad G_3(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-3)(s+3)(s+4)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{3}{100} e^{4t} - \frac{3}{100} e^{-6t} + \frac{7}{10} t e^{-6t}, \quad g_2(t) = \frac{t^3}{3} e^{-3t}, \quad g_3(t) = \frac{25}{42} e^{3t} - \frac{1}{6} e^{-3t} + \frac{4}{7} t e^{-4t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto  $K = -100$ , utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento  $G(s)$  che lega l'ingresso  $X(s)$  all'uscita  $Y(s)$ :

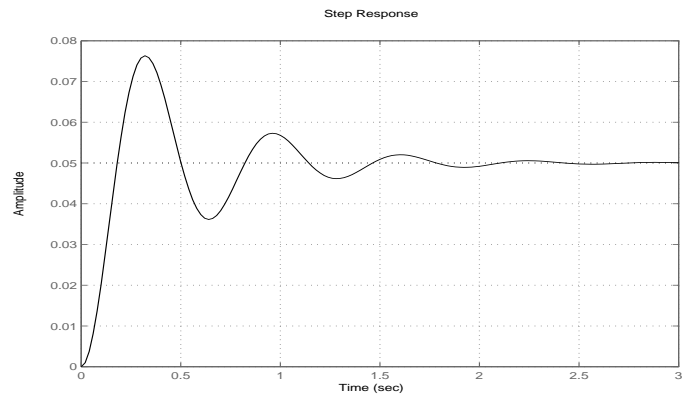
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s + 100}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento  $G(s)$  calcolare: 1) la parte reale  $\sigma$  e 2) la parte immaginaria  $\omega$  dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale  $\omega_n$  e 4) il coefficiente di smorzamento  $\delta$  dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico  $K_0$ ; 6) il tempo di assestamento  $T_a$  del sistema  $G(s)$  alla risposta al gradino:

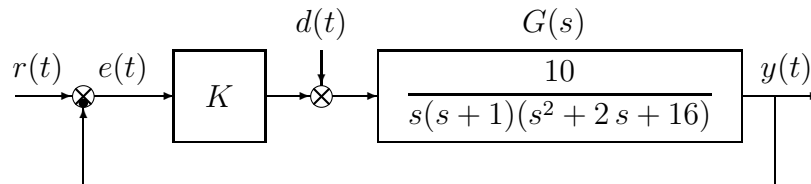
- |                     |                    |                          |
|---------------------|--------------------|--------------------------|
| 1) $\sigma = -2$    | 3) $\omega_n = 10$ | 5) $K_0 = \frac{1}{100}$ |
| 2) $\omega = 9.797$ | 4) $\delta = 0.2$  | 6) $T_a = \frac{3}{2}$   |

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta  $y(t)$  della funzione di trasferimento  $G(s)$  al gradino in ingresso  $x(t) = 5$ .

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro  $K$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s^2+2s+16)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 3s^3 + 18s^2 + 16s + 10K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 18 & 10K \\ 3 & 3 & 16 & \\ 2 & 38 & 30K & \\ 1 & 608 - 90K & & \\ 0 & 30K & & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \quad K < 6.756$$

La pulsazione  $\omega^*$  corrispondente al valore limite  $K^* = 6.756$  è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{16}{3}} = 2.3$$

d.2) Posto  $r(t) = 0$ , si determini il valore del parametro  $K$  tale da garantire che in presenza del disturbo costante  $d(t) = d_0$ , il valore a regime dell'uscita  $y(t)$  sia  $y_\infty = 0.3 d_0$ .

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante  $d(t) = d_0$  è

$$y_\infty = \frac{G(0) d_0}{1 + K G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.3 d_0$$

Il sistema  $G(s)$  è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico è infinito  $G(0) = \infty$ . Il valore di uscita richiesto si ha per  $K = 3.33$ .

d.3) Posto  $d(t) = 0$ , calcolare, in funzione del parametro  $K$ , l'errore a regime  $e_\infty(t)$  corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa  $r(t) = 7t$ .

Soluzione: L'errore a regime  $e_\infty = \frac{7}{K_v}$  con  $K_v = \frac{5K}{8}$ . Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{56}{5K}$$

d.4) Posto  $K = 1$ , disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” del guadagno d’anello  $K G(s)$ . Calcolare esattamente la posizione  $\sigma_a$  dell’asintoto verticale, le eventuali intersezioni  $\sigma_i^*$  con l’asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni  $\omega_i^*$ . Determinare inoltre il margine di ampiezza  $M_\alpha$ . Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase  $M_\phi$ .

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  per  $\omega \in [0, \infty]$  è mostrato in Fig. 1.

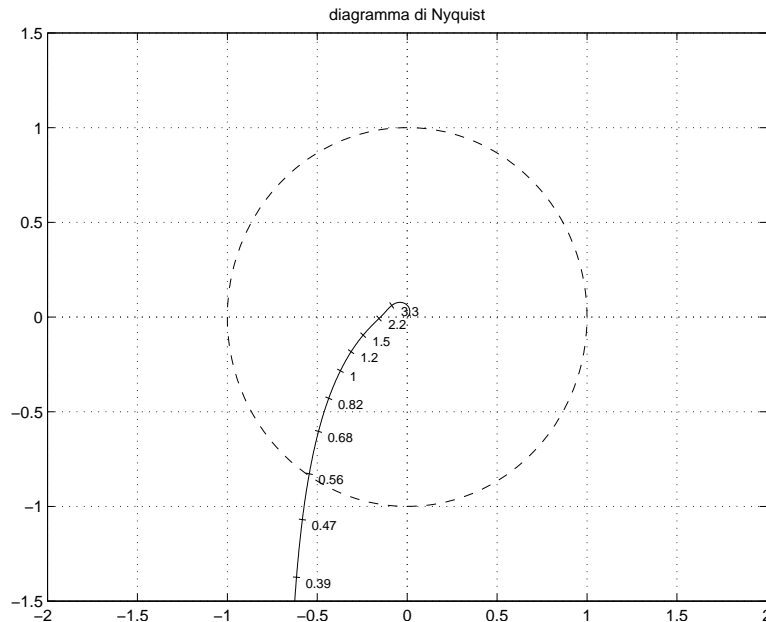


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  per  $\omega \in [0, \infty]$ .

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in  $K_T \Delta_a = -0.7031$ .

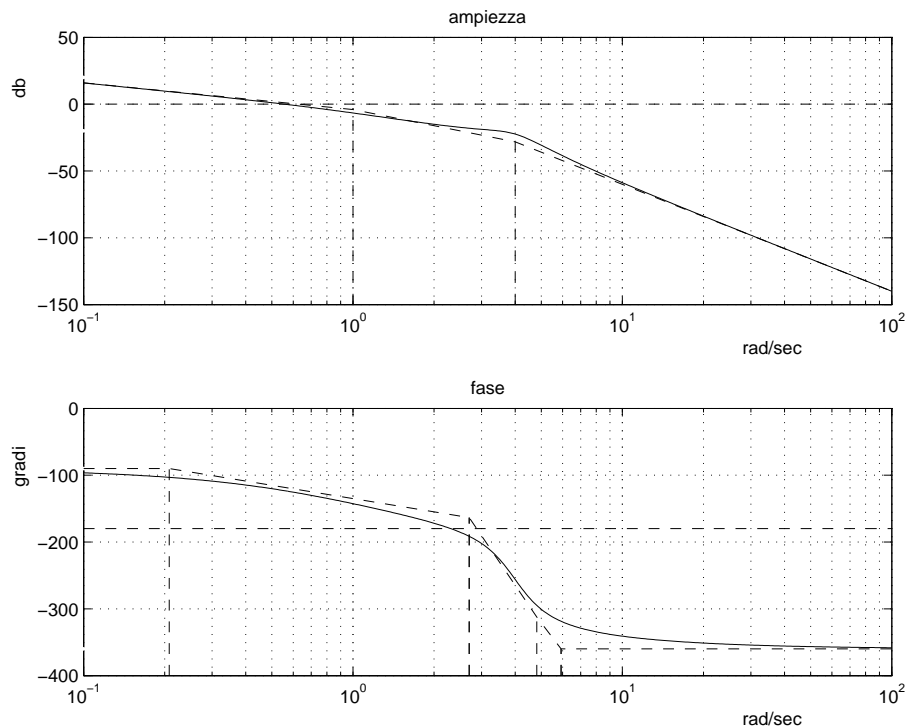
Esiste un’unica intersezione  $\sigma^*$  con l’asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall’analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.148$$

Il corrispondente valore di  $\omega^*$  è 2.3 mentre il margine di ampiezza è  $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 6.756$  ed il margine di fase è  $M_f = 57^\circ$ .

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell’esercizio precedente e si ponga  $K = 1$ :

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello  $K G(s)$ ;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi  $\omega_T = 0.32 \text{ rad/s}$ .

e.3) Fornire una stima del modulo della risposta "a regime"  $|y_\infty(t)|$  del sistema in catena aperta quando il disturbo  $d(t) = 0$  e in ingresso è presente il segnale  $r(t) = 4 \cos(1.5t)$ .

Soluzione: Dal diagramma di Bode si ricava, alla pulsazione  $\omega_T = 1.5 \text{ rad/s}$ , un guadagno del sistema in catena aperta circa  $-20 \text{ dB} = 0.1$ . Il modulo del segnale d'uscita risulta quindi essere  $|y_\infty(t)| = 0.4$ .

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro  $K$ . Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro  $K$ .

Soluzione:

$$\begin{aligned}\sigma &= -0.75 \\ \phi &= 45, 135, 225, 315 \\ s^* &= 2.3i \\ K^* &= 6.756\end{aligned}$$

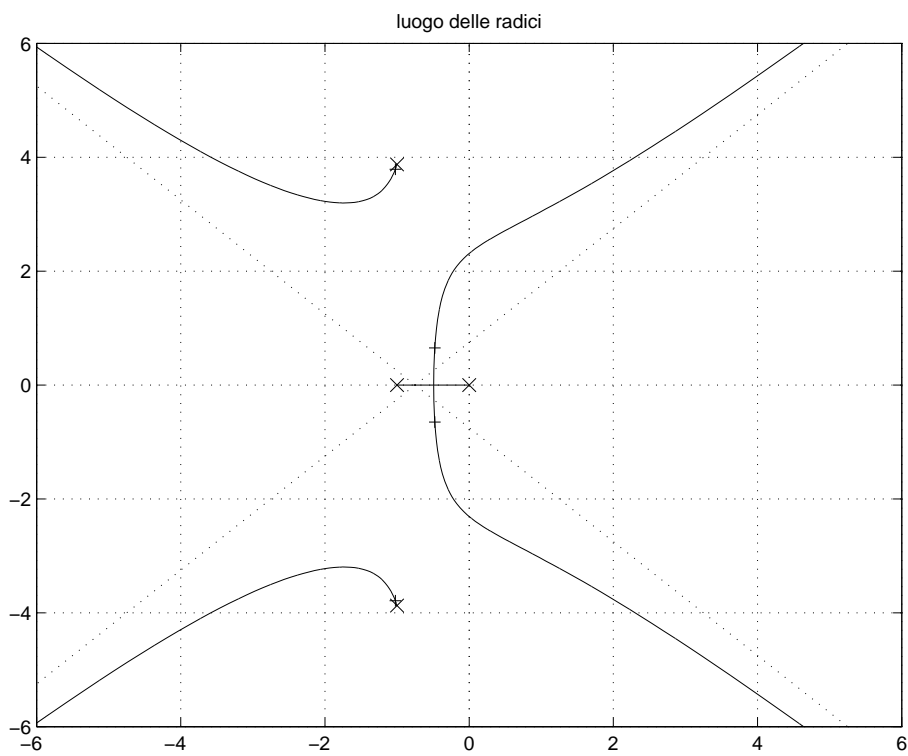


Figura 2: Luogo delle radici di  $G(s)$ .

Fondamenti di Controlli Automatici -  
A.A. 2008/09  
16 Dicembre 2008 - Domande Teoriche  
Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

- Il grado relativo di una funzione di trasferimento è definito come:
  - il grado del numeratore meno quello del denominatore;
  - il grado del denominatore meno quello del numeratore;
  - il numero di poli complessi coniugati;
  - il numero di poli nulli.
- Per  $\omega \in [-\infty, \infty]$ , il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema  $G(s)$  di tipo 1 deve essere chiuso all'infinito:
  - con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
  - con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
  - con una circonferenza percorsa in senso orario;
  - con una circonferenza percorsa in senso antiorario.
- Dato il diagramma di Bode asintotico delle fasi di  $G(j\omega)$ , da esso si può dedurre il diagramma asintotico delle ampiezze:
  - solo se il diagramma di Bode delle fasi presenta pendenze negative o nulle;
  - solo se il sistema  $G(s)$  ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
  - solo se il sistema  $G(s)$  ha tutti i poli a parte reale negativa;
  - se nel sistema non sono presenti ritardi.
- Un sistema del secondo ordine con coefficiente di smorzamento  $\delta > 1$  è caratterizzato da:
  - due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
  - due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
  - due poli reali distinti a parte reale negativa;
  - due poli reali distinti a parte reale positiva.
- Il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{\tau_z s + 1}{s^2(\tau_p s + 1)}$ :
  - circonda il punto critico  $-1$  se  $\tau_z < \tau_p$ ;
  - circonda il punto critico  $-1$  se  $\tau_z > \tau_p$ ;
  - circonda sempre il punto critico  $-1$ .
- Affinchè un sistema sia asintoticamente stabile, occorre che i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh ad esso associata siano tutti:
  - positivi o nulli;
  - a parte reale negativa;
  - di segno concorde.
- Il valore iniziale della risposta all'impulso  $g(t)$  del sistema  $G(s) = \frac{5s+1}{s^2+2}$  vale:
  - $g(\infty) = 0$ ;
  - $g(\infty) = 1$ ;
  - $g(\infty) = 5$ .

8. La funzione complessa  $X(s) = \frac{1}{(s+5)^2}$  è la trasformata di Laplace:

- di un segnale  $x(t)$  che tende a  $\frac{1}{5}$  per  $t \rightarrow \infty$ ;
- di un segnale  $x(t)$  che tende a zero per  $t \rightarrow 0$ ;
- del segnale  $x(t) = te^{-(t-5)}$ ;
- del segnale  $x(t) = te^{-5t}$ .

9. Determinare una stima del tempo di assestamento del sistema  $G(s) = \frac{1}{s^2+101s+100}$ ;

$$T_a = 3$$

10. Un sistema  $G(s)$  a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

- una pendenza di  $-20 \text{ dB/decade}$  per  $\omega \rightarrow 0$ ;
- una pendenza di  $-40 \text{ dB/decade}$  per  $\omega \rightarrow 0$ ;
- una pendenza di  $-20 \text{ dB/decade}$  per  $\omega \rightarrow \infty$ ;
- una pendenza di  $-40 \text{ dB/decade}$  per  $\omega \rightarrow \infty$ .

11. Un sistema dinamico lineare è semplicemente stabile se i poli della funzione di trasferimento sono:

- tutti a parte reale negativa;
- tutti a parte reale negativa tranne uno uguale a zero;
- tutti a parte reale positiva.

12. Data la funzione di risposta armonica  $G(j\omega)$ , il suo margine di fase è definito come:

- $\frac{1}{|G(j\omega)|} \Big|_{\omega: \angle G(j\omega) = -\pi}$ ;
- $\angle G(j\omega) \Big|_{\omega: |G(j\omega)| = 0}$ ;
- $\pi + \angle G(j\omega) \Big|_{\omega: |G(j\omega)| = 1}$ ;
- $\pi - \angle G(j\omega) \Big|_{\omega: |G(j\omega)| = 1}$ .

**Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

13. Gli asintoti del luogo delle radici di un sistema avente 3 poli e guadagno statico negativo formano, nel caso di guadagno di retroazione  $K > 0$ , rispetto all'asse reale positivo angoli:

- di 0, 120 e 240 gradi;
- di 60, 180 e 300 gradi;
- il sistema non presenta asintoti.

14. Tramite lo studio del contorno delle radici è possibile determinare il valore dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

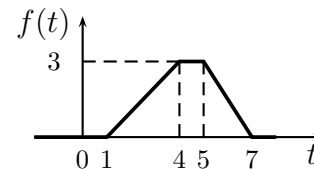
- di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
- di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
- del guadagno di retroazione.

Fondamenti di Controlli Automatici -  
A.A. 2008/09  
16 Dicembre 2008 - Esercizi  
Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace  $X_i(s)$  dei seguenti segnali temporali  $x_i(t)$ :

$$x_1(t) = 5 \cos(3t - 9), \quad x_2(t) = 2t^5 e^{-4t} + 2 \sin(2\pi t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{5s e^{-3s}}{s^2 + 9}, \quad X_2(s) = \frac{240}{(s+4)^6} + \frac{4\pi}{s^2 + 4\pi^2}, \quad X_3(s) = \frac{3}{2s^2} [e^{-2s} - 2e^{-4s} + e^{-6s}]$$

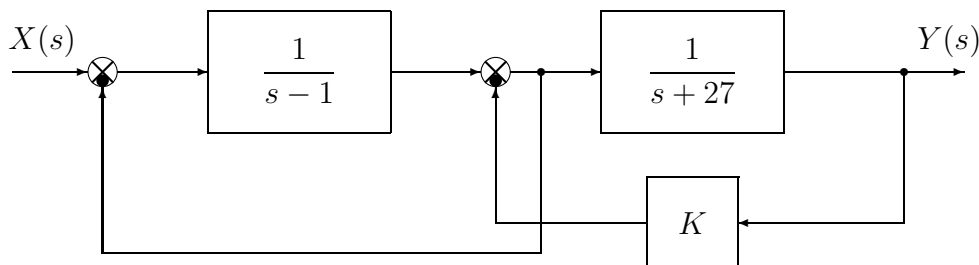
b) Calcolare la risposta impulsiva  $g_i(t)$  delle seguenti funzioni di trasferimento  $G_i(s)$ :

$$G_1(s) = -\frac{1}{(s+5)^4}, \quad G_2(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-1)(s+1)(s+3)}, \quad G_3(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s-4)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{t^3}{6} e^{-5t}, \quad g_2(t) = \frac{9}{8} e^t - \frac{1}{4} e^{-t} + \frac{1}{8} e^{-3t}, \quad g_3(t) = e^{3t} - e^{4t} + 2t e^{4t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto  $K = -25$ , utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento  $G(s)$  che lega l'ingresso  $X(s)$  all'uscita  $Y(s)$ :

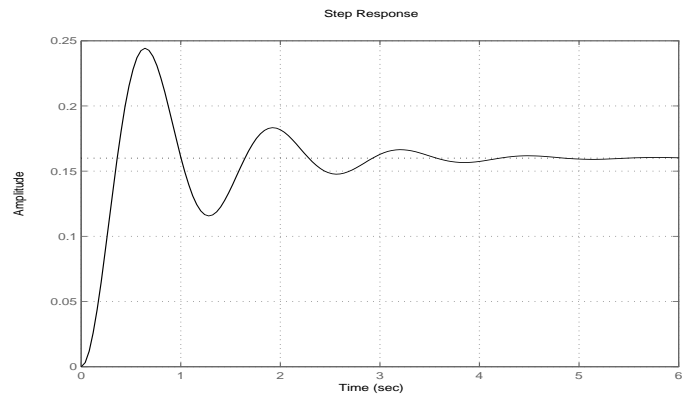
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 25}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento  $G(s)$  calcolare: 1) la parte reale  $\sigma$  e 2) la parte immaginaria  $\omega$  dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale  $\omega_n$  e 4) il coefficiente di smorzamento  $\delta$  dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico  $K_0$ ; 6) il tempo di assestamento  $T_a$  del sistema  $G(s)$  alla risposta al gradino:

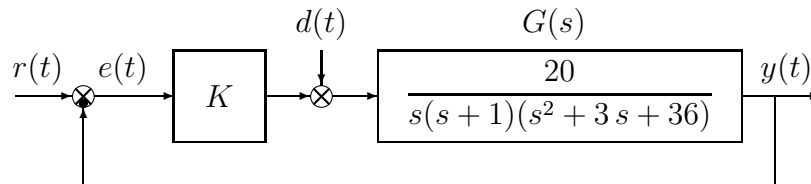
- |                    |                   |                         |
|--------------------|-------------------|-------------------------|
| 1) $\sigma = -1$   | 3) $\omega_n = 5$ | 5) $K_0 = \frac{1}{25}$ |
| 2) $\omega = 4.89$ | 4) $\delta = 0.2$ | 6) $T_a = 3$            |

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta  $y(t)$  della funzione di trasferimento  $G(s)$  al gradino in ingresso  $x(t) = 4$ .

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro  $K$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{20K}{s(s+1)(s^2+3s+36)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 4s^3 + 39s^2 + 36s + 20K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 39 & 20K \\ 3 & 4 & 36 & \\ 2 & 30 & 20K & \\ 1 & 36 - \frac{8}{3}K & & \\ 0 & 20K & & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \quad K < 13.5$$

La pulsazione  $\omega^*$  corrispondente al valore limite  $K^* = 13.5$  è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{36}{4}} = 3$$

d.2) Posto  $r(t) = 0$ , si determini il valore del parametro  $K$  tale da garantire che in presenza del disturbo costante  $d(t) = d_0$ , il valore a regime dell'uscita  $y(t)$  sia  $y_\infty = 0.5 d_0$ .

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante  $d(t) = d_0$  è

$$y_\infty = \frac{G(0) d_0}{1 + K G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.5 d_0$$

Il sistema  $G(s)$  è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico è infinito  $G(0) = \infty$ . Il valore di uscita richiesto si ha per  $K = 2$ .

d.3) Posto  $d(t) = 0$ , calcolare, in funzione del parametro  $K$ , l'errore a regime  $e_\infty(t)$  corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa  $r(t) = 8t$ .

Soluzione: L'errore a regime  $e_\infty = \frac{8}{K_v}$  con  $K_v = \frac{5K}{9}$ . Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{72}{5K}$$

d.4) Posto  $K = 1$ , disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” del guadagno d’anello  $K G(s)$ . Calcolare esattamente la posizione  $\sigma_a$  dell’asintoto verticale, le eventuali intersezioni  $\sigma_i^*$  con l’asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni  $\omega_i^*$ . Determinare inoltre il margine di ampiezza  $M_\alpha$ . Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase  $M_\phi$ .

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  per  $\omega \in [0, \infty]$  è mostrato in Fig. 3.

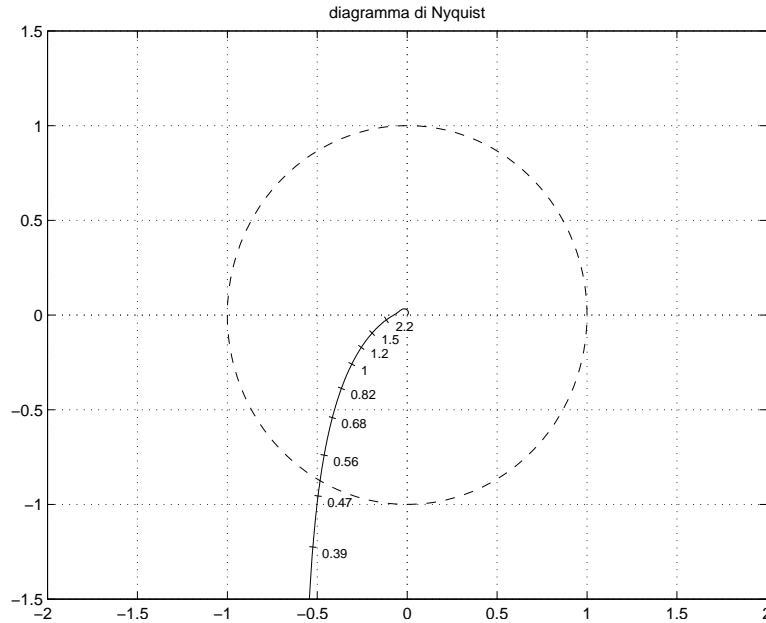


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  per  $\omega \in [0, \infty]$ .

Il sistema è di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in  $K_T \Delta_a = -0.6019$ .

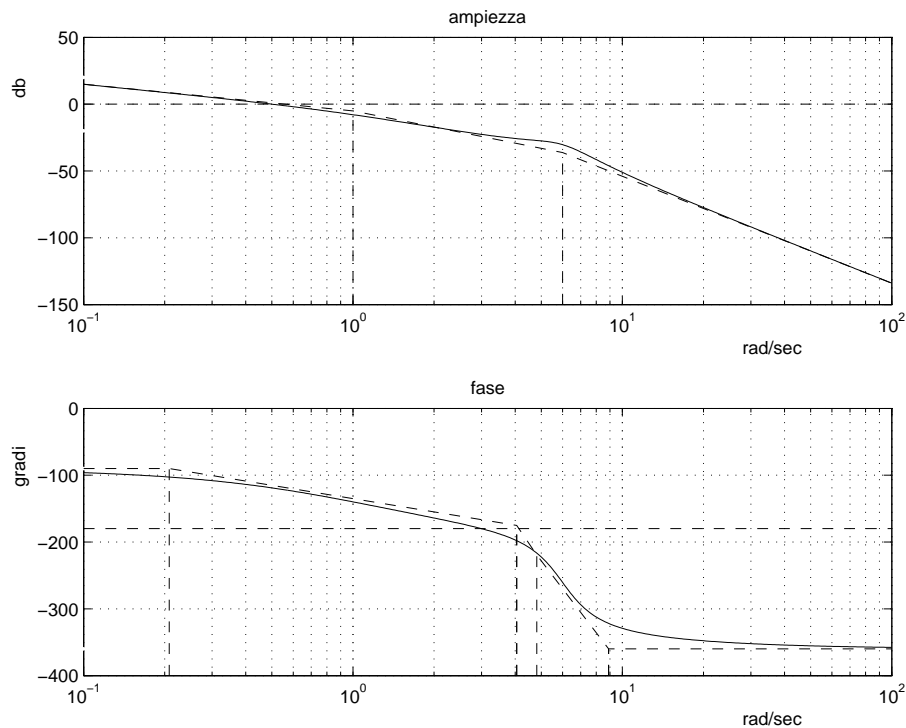
Esiste un’unica intersezione  $\sigma^*$  con l’asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall’analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -0.074$$

Il corrispondente valore di  $\omega^*$  è 3 mentre il margine di ampiezza è  $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 13.5$  ed il margine di fase è  $M_f = 61^\circ$ .

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell’esercizio precedente e si ponga  $K = 1$ :

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello  $K G(s)$ ;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi  $\omega_T = 0.5 \text{ rad/s}$ .

e.3) Fornire una stima del modulo della risposta "a regime"  $|y_\infty(t)|$  del sistema in catena aperta quando il disturbo  $d(t) = 0$  e in ingresso è presente il segnale  $r(t) = 5 \cos(0.8t)$ .

Soluzione: Dal diagramma di Bode si ricava, alla pulsazione  $\omega_T = 0.8 \text{ rad/s}$ , un guadagno del sistema in catena aperta circa 1.78. Il modulo del segnale d'uscita risulta quindi essere  $|y_\infty(t)| = 8.9$ .

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro  $K$ . Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro  $K$ .

Soluzione:

$$\begin{aligned}\sigma &= -1 \\ \phi &= 45, 135, 225, 315 \\ s^* &= 3i \\ K^* &= 13.5\end{aligned}$$

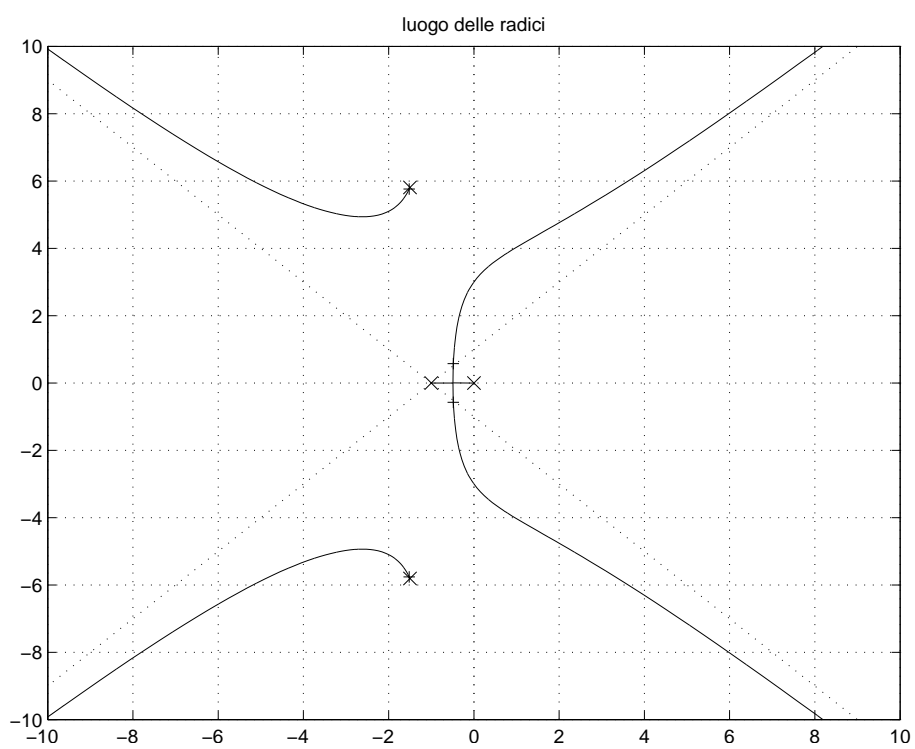


Figura 4: Luogo della radici di  $G(s)$ .

Fondamenti di Controlli Automatici -  
A.A. 2008/09  
16 Dicembre 2008 - Domande Teoriche  
Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

- Il grado relativo di una funzione di trasferimento è definito come:
  - il numero di poli complessi coniugati;
  - il numero di poli nulli.
  - il grado del numeratore meno quello del denominatore;
  - il grado del denominatore meno quello del numeratore.
- Per  $\omega \in [-\infty, \infty]$ , il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema  $G(s)$  di tipo 1 deve essere chiuso all'infinito:
  - con una circonferenza percorsa in senso antiorario;
  - con una circonferenza percorsa in senso orario;
  - con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
  - con una semicirconferenza percorsa in senso orario.
- Dato il diagramma di Bode asintotico delle fasi di  $G(j\omega)$ , da esso si può dedurre il diagramma asintotico delle ampiezze:
  - se nel sistema non sono presenti ritardi.
  - solo se il sistema  $G(s)$  ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
  - solo se il sistema  $G(s)$  ha tutti i poli a parte reale negativa;
  - solo se il diagramma di Bode delle fasi presenta pendenze negative o nulle.
- Un sistema del secondo ordine con coefficiente di smorzamento  $\delta > 1$  è caratterizzato da:
  - due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
  - due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
  - due poli reali distinti a parte reale positiva;
  - due poli reali distinti a parte reale negativa.
- Il diagramma di Nyquist della funzione di trasferimento  $G(s) = \frac{\tau_z s + 1}{s^2(\tau_p s + 1)}$ :
  - circonda il punto critico  $-1$  se  $\tau_z > \tau_p$ ;
  - circonda il punto critico  $-1$  se  $\tau_z < \tau_p$ ;
  - circonda sempre il punto critico  $-1$ .
- Affinchè un sistema sia asintoticamente stabile, occorre che i coefficienti della prima colonna della tabella di Routh ad esso associata siano tutti:
  - di segno concorde;
  - positivi o nulli;
  - a parte reale negativa.
- Il valore iniziale della risposta all'impulso  $g(t)$  del sistema  $G(s) = \frac{7s+3}{s^2+1}$  vale:
  - $g(0^+) = 0$ ;
  - $g(0^+) = 1$ ;
  - $g(0^+) = 7$ .

8. La funzione complessa  $X(s) = \frac{1}{(s+5)^2}$  è la trasformata di Laplace:

- del segnale  $x(t) = te^{-5t}$ ;
- del segnale  $x(t) = te^{-(t-5)}$ ;
- di un segnale  $x(t)$  che tende a zero per  $t \rightarrow 0$ ;
- di un segnale  $x(t)$  che tende a  $\frac{1}{5}$  per  $t \rightarrow \infty$ .

9. Determinare una stima del tempo di assestamento del sistema  $G(s) = \frac{1}{s^2+202s+400}$ ;

$$T_a = 1.5$$

10. Un sistema  $G(s)$  a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

- una pendenza di  $-40 \text{ dB/decade}$  per  $\omega \rightarrow 0$ ;
- una pendenza di  $-20 \text{ dB/decade}$  per  $\omega \rightarrow 0$ ;
- una pendenza di  $-40 \text{ dB/decade}$  per  $\omega \rightarrow \infty$ ;
- una pendenza di  $-20 \text{ dB/decade}$  per  $\omega \rightarrow \infty$ .

11. Un sistema dinamico lineare è semplicemente stabile se i poli della funzione di trasferimento sono:

- tutti a parte reale negativa tranne uno uguale a zero;
- tutti a parte reale negativa;
- tutti a parte reale positiva.

12. Data la funzione di risposta armonica  $G(j\omega)$ , il suo margine di fase è definito come:

- $\frac{1}{|G(j\omega)|} \Big|_{\omega: \angle G(j\omega) = -\pi}$ ;
- $\angle G(j\omega) \Big|_{\omega: |G(j\omega)| = 0}$ ;
- $\pi - \angle G(j\omega) \Big|_{\omega: |G(j\omega)| = 1}$ ;
- $\pi + \angle G(j\omega) \Big|_{\omega: |G(j\omega)| = 1}$ .

**Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

13. Gli asintoti del luogo delle radici di un sistema avente 3 poli e guadagno statico negativo formano, nel caso di guadagno di retroazione  $K > 0$ , rispetto all'asse reale positivo angoli:

- di 60, 180 e 300 gradi;
- di 0, 120 e 240 gradi;
- il sistema non presenta asintoti.

14. Tramite lo studio del contorno delle radici è possibile determinare il valore dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

- di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
- di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
- del guadagno di retroazione.