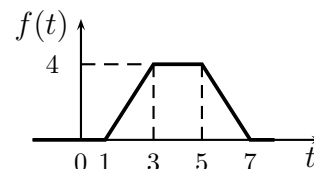


Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace  $X_i(s)$  dei seguenti segnali temporali  $x_i(t)$ :

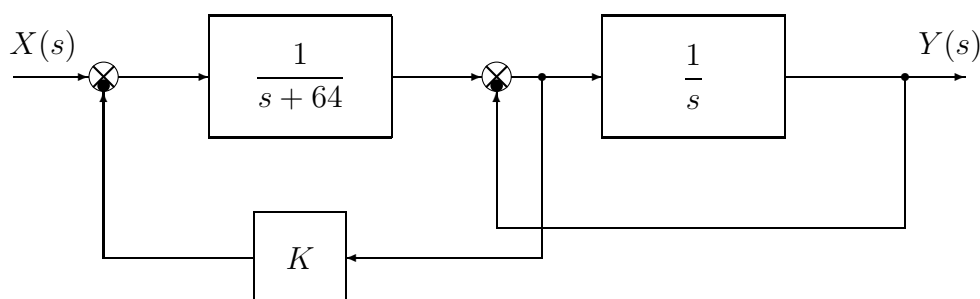
$$x_1(t) = t^4 e^{-3t} + \cos(2\pi t), \quad x_2(t) = 4 \sin(3t - 9),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva  $g_i(t)$  delle seguenti funzioni di trasferimento  $G_i(s)$ :

$$G_1(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s+5)^2}, \quad G_2(s) = \frac{4}{(s+2)^3}, \quad G_3(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto  $K = -61$ , utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento  $G(s)$  che lega l'ingresso  $X(s)$  all'uscita  $Y(s)$ :

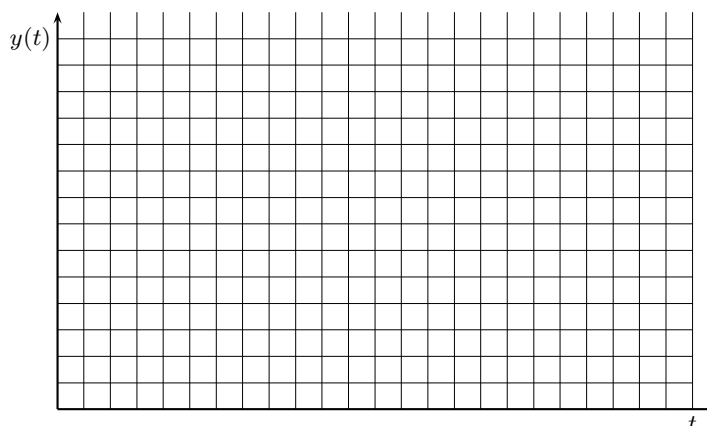
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento  $G(s)$  calcolare: 1) la parte reale  $\sigma$  e 2) la parte immaginaria  $\omega$  dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale  $\omega_n$  e 4) il coefficiente di smorzamento  $\delta$  dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico  $K_0$ ; 6) il tempo di assestamento  $T_a$  del sistema  $G(s)$  alla risposta al gradino:

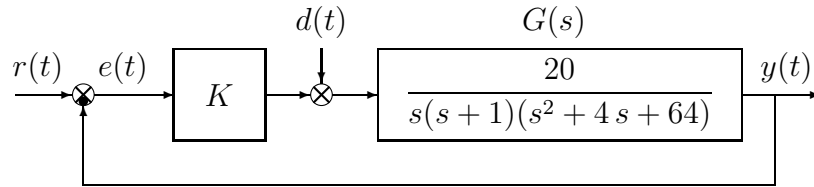
- |                          |                            |                       |
|--------------------------|----------------------------|-----------------------|
| 1) $\sigma = \dots\dots$ | 3) $\omega_n = \dots\dots$ | 5) $K_0 = \dots\dots$ |
| 2) $\omega = \dots\dots$ | 4) $\delta = \dots\dots$   | 6) $T_a = \dots\dots$ |

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta  $y(t)$  della funzione di trasferimento  $G(s)$  al gradino in ingresso  $x(t) = 9$ .

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro  $K$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

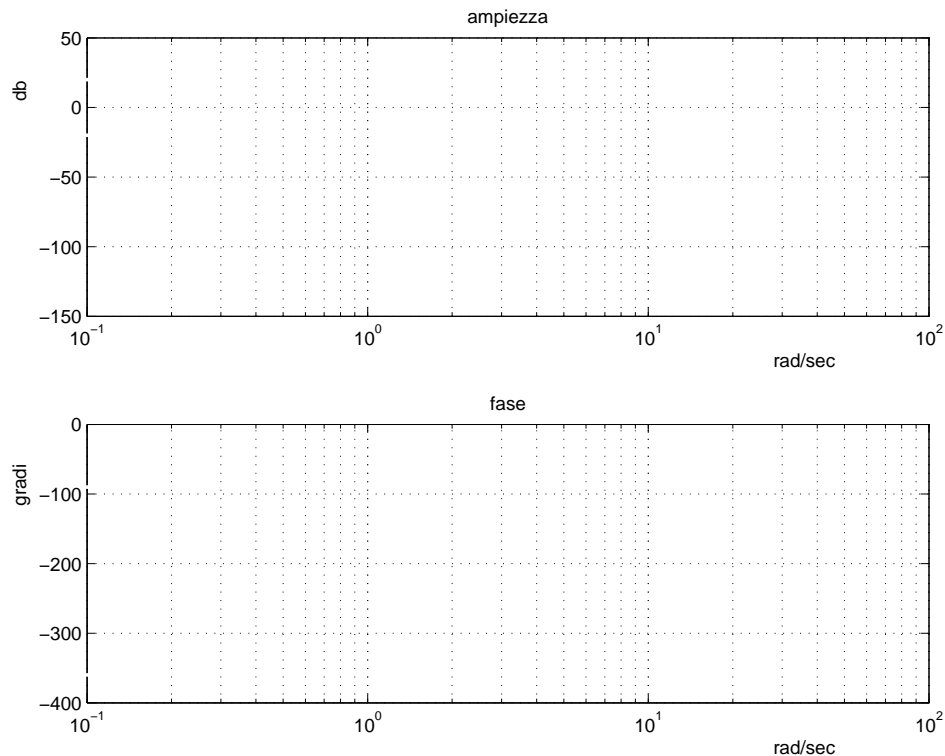
d.2) Posto  $r(t) = 0$ , si determini il valore del parametro  $K$  tale da garantire che in presenza del disturbo costante  $d(t) = d_0$ , il valore a regime dell'uscita  $y(t)$  sia  $y_\infty = 0.4 d_0$ .

d.3) Posto  $d(t) = 0$ , calcolare, in funzione del parametro  $K$ , l'errore a regime  $e_\infty(t)$  corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa  $r(t) = 5t$ .

d.4) Posto  $K = 1$ , disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello  $K G(s)$ . Calcolare esattamente la posizione  $\sigma_a$  dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni  $\sigma_i^*$  con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni  $\omega_i^*$ . Determinare inoltre il margine di ampiezza  $M_\alpha$ . Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase  $M_\phi$ .

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga  $K = 1$ :

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello  $K G(s)$ ;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima del modulo della risposta "a regime"  $|y_\infty(t)|$  del sistema in catena aperta quando il disturbo  $d(t) = 0$  e in ingresso è presente il segnale  $r(t) = 4 \cos(1.5t)$ .

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro  $K$ . Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro  $K$ .

**Fondamenti di Controlli Automatici -  
A.A. 2008/09  
30 Ottobre 2008 - Domande Teoriche  
Compito Nr.**

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

- Un sistema di “tipo 2” è caratterizzato da:
  - 2 poli nulli;
  - 2 poli complessi coniugati;
  - grado relativo  $n - m = 2$ .
- Per  $\omega \in [-\infty, \infty]$ , il diagramma di Nyquist “completo” di un sistema  $G(s)$  di tipo 2 deve essere chiuso all’infinito:
  - con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
  - con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
  - con una circonferenza percorsa in senso orario;
  - con una circonferenza percorsa in senso antiorario.
- Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di  $G(j\omega)$ , da esso si può dedurre il diagramma delle fasi:
  - solo se il diagramma di Bode presenta pendenze negative o nulle;
  - solo se il sistema  $G(s)$  ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
  - solo se il sistema  $G(s)$  ha tutti i poli a parte reale negativa.
- La trasformata di Laplace del segnale  $x(t) = 2t$  è:
  - $X(s) = \frac{1}{s^2}$ ;
  - $X(s) = \frac{2}{s^2}$ ;
  - $X(s) = \frac{1}{s^3}$ ;
  - $X(s) = \frac{2}{s^3}$ .
- Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento  $0 < \delta < 1$  è caratterizzato da:
  - due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
  - due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
  - due poli reali distinti a parte reale negativa;
  - due poli reali distinti a parte reale positiva.
- Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa:
  - ha guadagno statico minore di 1;
  - ha guadagno statico maggiore di 1;
  - ha guadagno statico unitario.
- Nell’applicazione del criterio di Routh, le radici dell’equazione ausiliaria che si ottiene quando una riga intera della tabella di Routh si annulla:
  - sono radici anche dell’equazione caratteristica di partenza;
  - sono tutte radici a parte reale nulla;
  - sono radici simmetriche rispetto all’origine del piano complesso.

8. La funzione complessa  $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$  è la trasformata di Laplace:

- di un segnale  $x(t)$  che tende a zero per  $t \rightarrow \infty$ ;
- di un segnale  $x(t)$  che tende a zero per  $t \rightarrow 0$ ;
- del segnale  $x(t) = te^{-(t-3)}$ ;
- del segnale  $x(t) = t^2e^{-3t}$ .

9. Il diagramma di Nyquist della funzione  $G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$  per  $\omega \in [0, \infty]$ :

- è una semicirconferenza;
- presenta un asintoto verticale;
- si evolve tutta nel semipiano positivo;
- ha guadagno statico unitario.

10. Determinare il tempo di assestamento del sistema  $G(s) = \frac{1}{s+4}$ ;

$$T_a =$$

11. Un sistema  $G(s)$  a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 1 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

- una pendenza di  $-20 \text{ db/decade}$  per  $\omega \rightarrow 0$ ;
- una pendenza di  $-40 \text{ db/decade}$  per  $\omega \rightarrow 0$ ;
- una pendenza di  $-20 \text{ db/decade}$  per  $\omega \rightarrow \infty$ ;
- una pendenza di  $-40 \text{ db/decade}$  per  $\omega \rightarrow \infty$ .

12. Il valore finale per  $t \rightarrow \infty$  della risposta all'impulso  $g(t)$  del sistema  $G(s) = \frac{4s+1}{s^2+2}$  vale:

- $g(\infty) = 0$ ;
- $g(\infty) = 1$ ;
- $g(\infty) = 2$ .

**Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

13. Un sistema dinamico  $G(s)$  avente i poli e gli zeri posizionati in modo alterno (un polo, uno zero, un polo, uno zero ecc.) sull'asse reale presenta un luogo delle radici:

- che per  $K < 0$  si evolve tutto sull'asse reale;
- che per  $K > 0$  si evolve tutto sull'asse reale;
- che può evolvere anche al di fuori dell'asse reale.

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

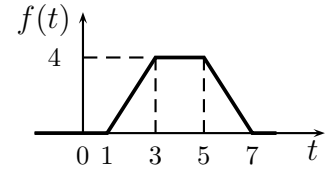
- di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
- di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
- delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.

Fondamenti di Controlli Automatici -  
A.A. 2008/09  
30 Ottobre 2008 - Esercizi  
Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace  $X_i(s)$  dei seguenti segnali temporali  $x_i(t)$ :

$$x_1(t) = t^4 e^{-3t} + \cos(2\pi t), \quad x_2(t) = 4 \sin(3t - 9),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{24}{(s+3)^5} + \frac{s}{s^2 + 4\pi^2}, \quad X_2(s) = \frac{12e^{-3s}}{s^2 + 9}, \quad X_3(s) = \frac{2}{s^2} [e^{-s} - e^{-3s} - e^{-5s} + e^{-7s}]$$

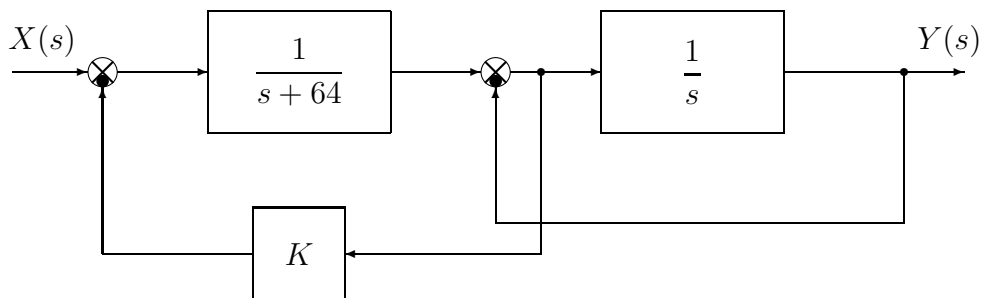
b) Calcolare la risposta impulsiva  $g_i(t)$  delle seguenti funzioni di trasferimento  $G_i(s)$ :

$$G_1(s) = \frac{s-2}{(s-3)(s+5)^2}, \quad G_2(s) = \frac{4}{(s+2)^3}, \quad G_3(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+2)(s+3)(s+4)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{1}{64} e^{3t} - \frac{1}{64} e^{-5t} + \frac{7}{8} t e^{-5t}, \quad g_2(t) = 2t^2 e^{-2t}, \quad g_3(t) = \frac{1}{2} e^{-2t} - 4e^{-3t} + \frac{9}{2} e^{-4t}$$

c) Si consideri il seguente schema a blocchi:



c.1) Posto  $K = -61$ , utilizzando la formula di Mason calcolare la funzione di trasferimento  $G(s)$  che lega l'ingresso  $X(s)$  all'uscita  $Y(s)$ :

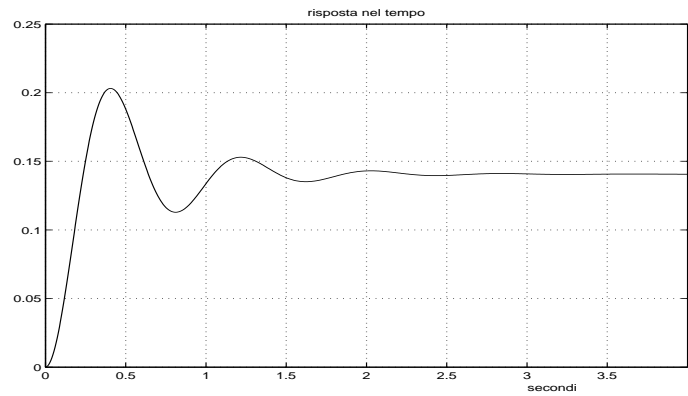
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + 4s + 64}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento  $G(s)$  calcolare: 1) la parte reale  $\sigma$  e 2) la parte immaginaria  $\omega$  dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale  $\omega_n$  e 4) il coefficiente di smorzamento  $\delta$  dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico  $K_0$ ; 6) il tempo di assestamento  $T_a$  del sistema  $G(s)$  alla risposta al gradino:

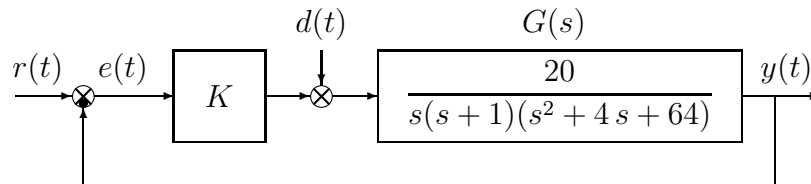
$$\begin{array}{lll} 1) \sigma = -2 & 3) \omega_n = 8 & 5) K_0 = \frac{1}{64} \\ 2) \omega = 7.746 & 4) \delta = 0.25 & 6) T_a = \frac{3}{2} \end{array}$$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta  $y(t)$  della funzione di trasferimento  $G(s)$  al gradino in ingresso  $x(t) = 9$ .

Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro  $K$  il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K}{s(s+1)(s^2+4s+64)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^4 + 5s^3 + 68s^2 + 64s + 20K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 68 & 20K \\ 3 & 5 & 64 & \\ 2 & 276 & 100K & \\ 1 & 17664 - 500K & & \\ 0 & 100K & & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \quad K < 35.328$$

La pulsazione  $\omega^*$  corrispondente al valore limite  $K^* = 35.328$  è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{64}{5}} = 3.578$$

d.2) Posto  $r(t) = 0$ , si determini il valore del parametro  $K$  tale da garantire che in presenza del disturbo costante  $d(t) = d_0$ , il valore a regime dell'uscita  $y(t)$  sia  $y_\infty = 0.4 d_0$ .

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante  $d(t) = d_0$  è

$$y_\infty = \frac{G(0) d_0}{1 + K G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.4 d_0$$

Il sistema  $G(s)$  è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico è infinito  $G(0) = \infty$ . Il valore di uscita richiesto si ha per  $K = 2.5$ .

d.3) Posto  $d(t) = 0$ , calcolare, in funzione del parametro  $K$ , l'errore a regime  $e_\infty(t)$  corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa  $r(t) = 5t$ .

Soluzione: L'errore a regime  $e_\infty = \frac{5}{K_v}$  con  $K_v = \frac{5K}{16}$ . Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{16}{K}$$

d.4) Posto  $K = 1$ , disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist “completo” del guadagno d’anello  $K G(s)$ . Calcolare esattamente la posizione  $\sigma_a$  dell’asintoto verticale, le eventuali intersezioni  $\sigma_i^*$  con l’asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni  $\omega_i^*$ . Determinare inoltre il margine di ampiezza  $M_\alpha$ . Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase  $M_\phi$ .

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  per  $\omega \in [0, \infty]$  è mostrato in Fig. 1.

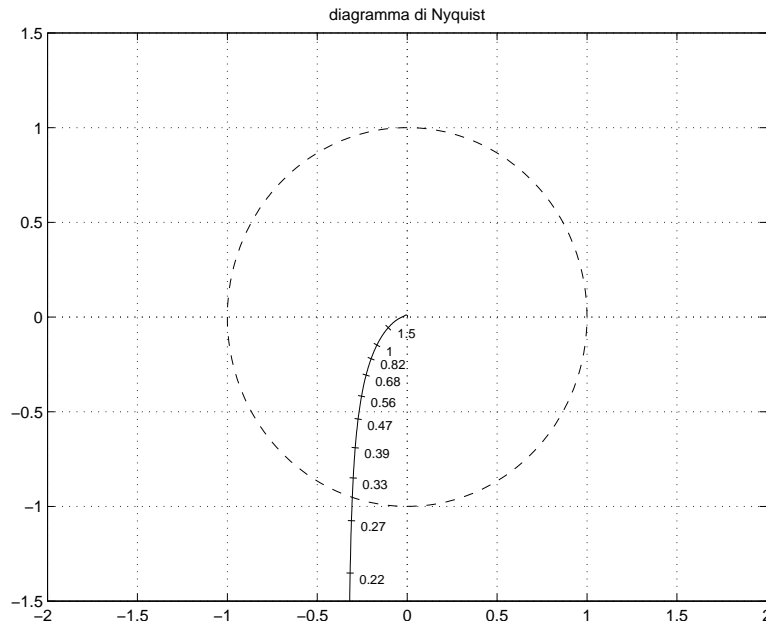


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione  $G(s)$  per  $\omega \in [0, \infty]$ .

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in  $K_T \Delta_a = -0.332$ .

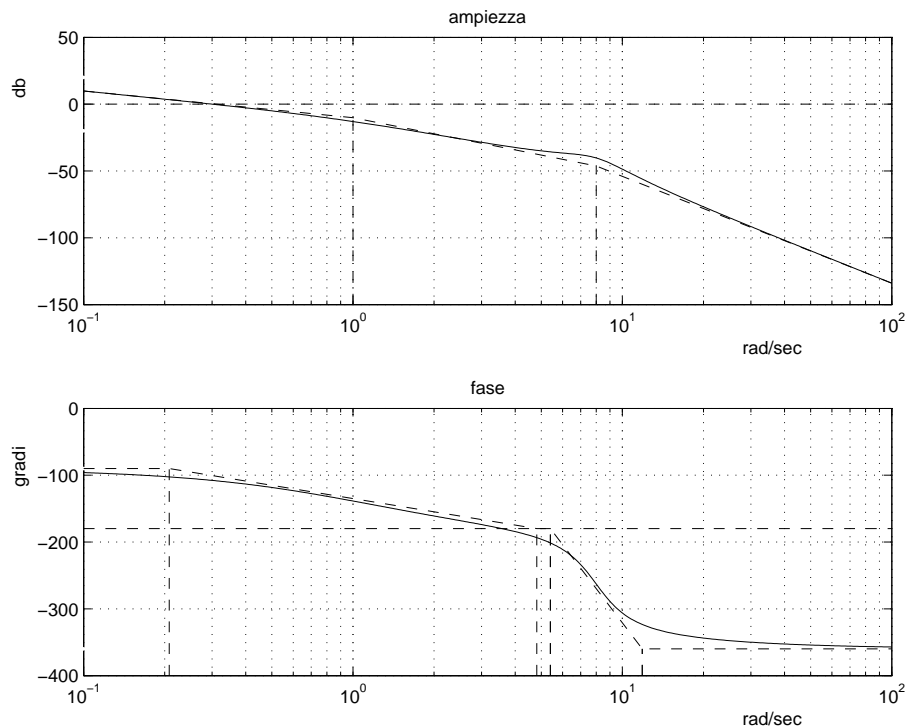
Esiste un’unica intersezione  $\sigma^*$  con l’asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall’analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{1}{35.328}$$

Il corrispondente valore di  $\omega^*$  è 3.578 mentre il margine di ampiezza è  $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 35.328$  ed il margine di fase è  $M_f = 72^\circ$ .

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell’esercizio precedente e si ponga  $K = 1$ :

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello  $K G(s)$ ;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi  $\omega_T = 0.32 \text{ rad/s}$ .

e.3) Fornire una stima del modulo della risposta "a regime"  $|y_\infty(t)|$  del sistema in catena aperta quando il disturbo  $d(t) = 0$  e in ingresso è presente il segnale  $r(t) = 4 \cos(1.5t)$ .

Soluzione: Dal diagramma di Bode si ricava, alla pulsazione  $\omega_T = 1.5 \text{ rad/s}$ , un guadagno del sistema in catena aperta circa  $-20 \text{ dB} = 0.1$ . Il modulo del segnale d'uscita risulta quindi essere  $|y_\infty(t)| = 0.4$ .

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro  $K$ . Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro  $K$ .

Soluzione:

$$\begin{aligned}\sigma &= -1.25 \\ \phi &= 45, 135, 225, 315 \\ s^* &= 3.578i \\ K^* &= 35.328\end{aligned}$$

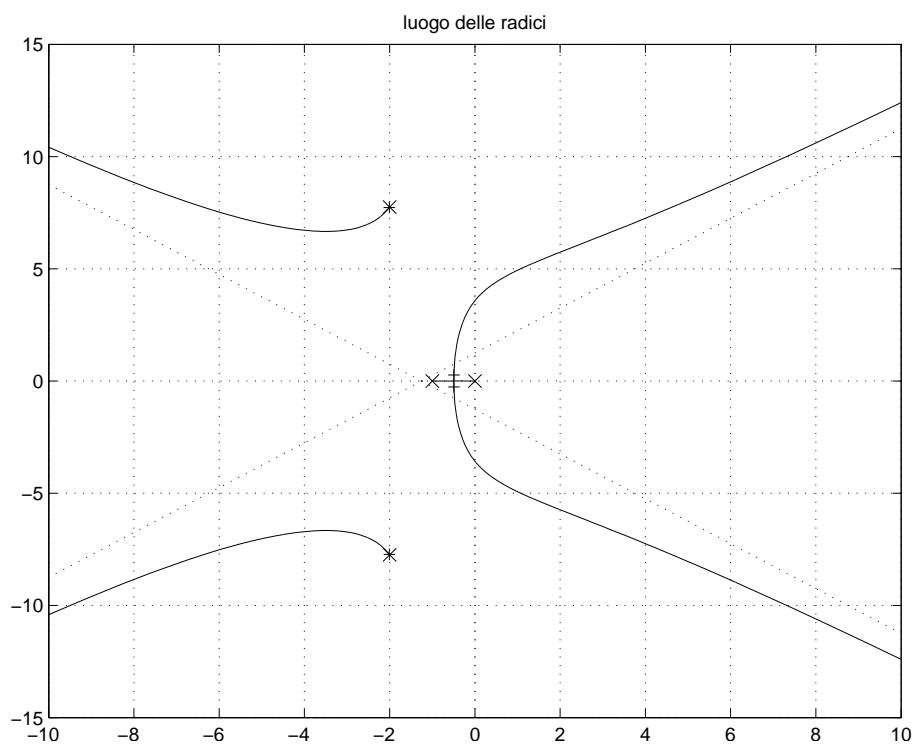


Figura 2: Luogo delle radici di  $G(s)$ .

Fondamenti di Controlli Automatici -  
A.A. 2008/09  
30 Ottobre 2008 - Domande Teoriche  
Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di “tipo 2” è caratterizzato da:

- 2 poli nulli;
- 2 poli complessi coniugati;
- grado relativo  $n - m = 2$ .

2. Per  $\omega \in [-\infty, \infty]$ , il diagramma di Nyquist “completo” di un sistema  $G(s)$  di tipo 2 deve essere chiuso all’infinito:

- con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
- con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
- con una circonferenza percorsa in senso orario;
- con una circonferenza percorsa in senso antiorario.

3. Dato il diagramma di Bode delle ampiezze di  $G(j\omega)$ , da esso si può dedurre il diagramma delle fasi:

- solo se il diagramma di Bode presenta pendenze negative o nulle;
- solo se il sistema  $G(s)$  ha tutti i poli e tutti gli zeri a parte reale negativa;
- solo se il sistema  $G(s)$  ha tutti i poli a parte reale negativa.

4. La trasformata di Laplace del segnale  $x(t) = 2t$  è:

- $X(s) = \frac{1}{s^2}$ ;
- $X(s) = \frac{2}{s^2}$ ;
- $X(s) = \frac{1}{s^3}$ ;
- $X(s) = \frac{2}{s^3}$ .

5. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento  $0 < \delta < 1$  è caratterizzato da:

- due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
- due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
- due poli reali distinti a parte reale negativa;
- due poli reali distinti a parte reale positiva.

6. Un sistema di tipo 1 chiuso in retroazione unitaria negativa:

- ha guadagno statico minore di 1;
- ha guadagno statico maggiore di 1;
- ha guadagno statico unitario.

7. Nell’applicazione del criterio di Routh, le radici dell’equazione ausiliaria che si ottiene quando una riga intera della tabella di Routh si annulla:

- sono radici anche dell’equazione caratteristica di partenza;
- sono tutte radici a parte reale nulla;
- sono radici simmetriche rispetto all’origine del piano complesso.

8. La funzione complessa  $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$  è la trasformata di Laplace:

- di un segnale  $x(t)$  che tende a zero per  $t \rightarrow \infty$ ;
- di un segnale  $x(t)$  che tende a zero per  $t \rightarrow 0$ ;
- del segnale  $x(t) = te^{-(t-3)}$ ;
- del segnale  $x(t) = t^2e^{-3t}$ .

9. Il diagramma di Nyquist della funzione  $G(s) = \frac{s+1}{s(s+2)}$  per  $\omega \in [0, \infty]$ :

- è una semicirconferenza;
- presenta un asintoto verticale;
- si evolve tutta nel semipiano positivo;
- ha guadagno statico unitario.

10. Determinare il tempo di assestamento del sistema  $G(s) = \frac{1}{s+4}$ ;

$$T_a = \frac{3}{4}$$

11. Un sistema  $G(s)$  a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 1 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

- una pendenza di  $-20 \text{ db/decade}$  per  $\omega \rightarrow 0$ ;
- una pendenza di  $-40 \text{ db/decade}$  per  $\omega \rightarrow 0$ ;
- una pendenza di  $-20 \text{ db/decade}$  per  $\omega \rightarrow \infty$ ;
- una pendenza di  $-40 \text{ db/decade}$  per  $\omega \rightarrow \infty$ .

12. Il valore finale per  $t \rightarrow \infty$  della risposta all'impulso  $g(t)$  del sistema  $G(s) = \frac{4s+1}{s^2+2}$  vale:

- $g(\infty) = 0$ ;
- $g(\infty) = 1$ ;
- $g(\infty) = 2$ .

**Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

13. Un sistema dinamico  $G(s)$  avente i poli e gli zeri posizionati in modo alterno (un polo, uno zero, un polo, uno zero ecc.) sull'asse reale presenta un luogo delle radici:

- che per  $K < 0$  si evolve tutto sull'asse reale;
- che per  $K > 0$  si evolve tutto sull'asse reale;
- che può evolvere anche al di fuori dell'asse reale.

14. Il metodo del contorno delle radici studia le curve descritte dalle radici dell'equazione caratteristica al variare:

- di un qualunque parametro che compare nell'equazione caratteristica;
- di un qualunque parametro che entra linearmente nell'equazione caratteristica;
- delle sole costanti di tempo relative ad un polo o ad uno zero.