Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

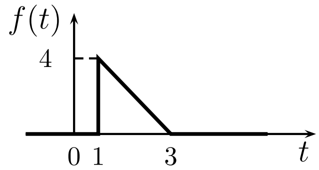
23 Luglio 2008 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

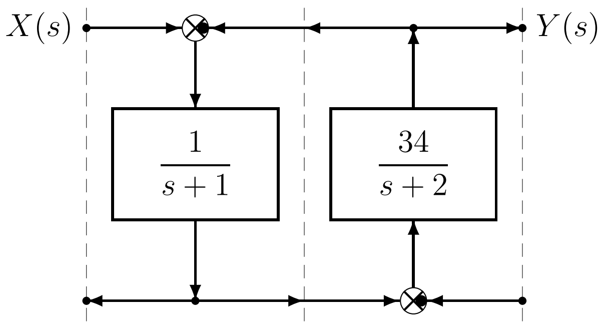
$$x_1(t) = t^4\, e^{-3\,t} + 2\,\cos(5\,\pi\,t), \qquad x_2(t) = 4\,\sin(3\,t - 6),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{s-3}{(s+1)\,(s-4)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{4}{(s+2)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+2)\,(s+3)\,(s-4)}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

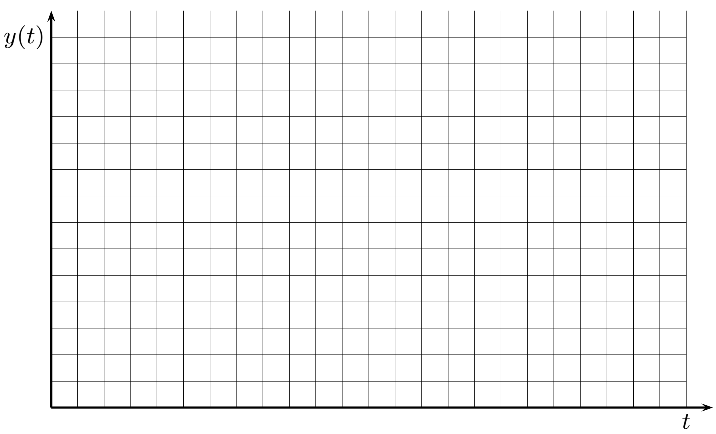
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

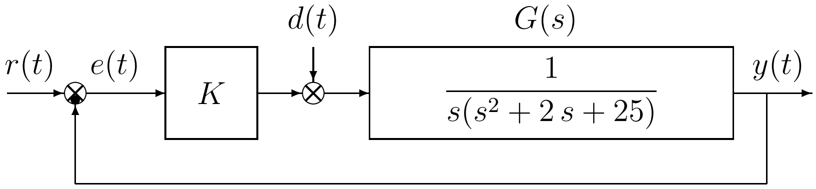
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 3$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2) indicando il valore della massima sovraelongazione percentuale, l'istante di massima sovraelongazione e il periodo delle oscillazioni.



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

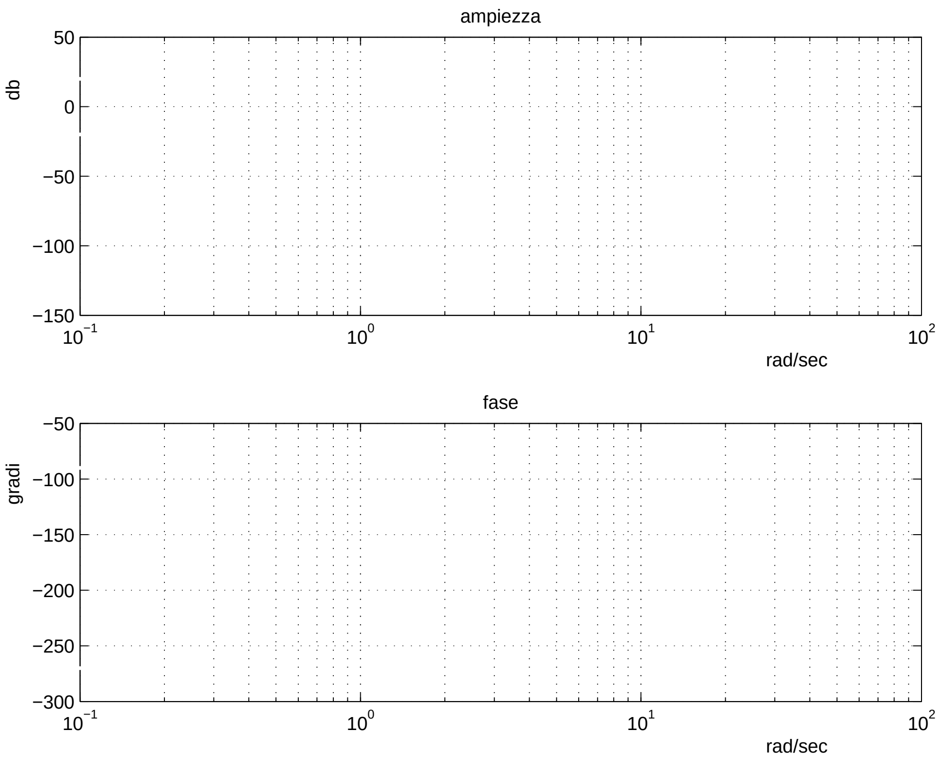
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2\,d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

d.4) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima del modulo della risposta "a regime" $|y_\infty(t)|$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4\,\cos(0.8\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

23 Luglio 2008 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:

   ○ ha almeno una radice a parte reale negativa
   ○ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
   ○ ha solo una radice a parte reale positiva
   ○ ha almeno una radice a parte reale positiva

2. Il picco di risonanza M_R per un sistema del 2 ordine è:

   ○ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$
   ○ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$
   ○ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-\delta^2}}$
   ○ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-2\delta^2}}$

3. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $-1 < \delta < 0$ è caratterizzato da:

   ○ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   ○ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   ○ due poli reali distinti a parte reale negativa;
   ○ due poli reali distinti a parte reale positiva.

4. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\dddot{y}(t)+3\,\ddot{y}(t)+4\,\dot{y}(t)+5\,y(t) = \dot{x}(t)+2\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

5. Un sistema di tipo 1

   ○ ha un polo nell'origine;
   ○ ha uno zero nell'origine;
   ○ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino;
   ○ ha un errore a regime nullo nella risposta alla rampa.

6. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = 2\,t^2$ è:

   ○ $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
   ○ $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
   ○ $X(s) = \frac{4}{s^3}$.

7. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+4\,s+33}$;

$$T_a =$$

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ è la trasformata di Laplace:
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to \infty$;
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a 1 per $t \to 0$;
   - ◯ del segnale $x(t) = t^2 e^{-(t-3)}$;
   - ◯ del segnale $x(t) = te^{-3t}$.

9. Il valore finale per $t \to \infty$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2\,s+1}{s\,(s^2+4)}$ vale:
   - ◯ $g(\infty) = 0$;
   - ◯ $g(\infty) = 1/4$;
   - ◯ $g(\infty) = 1$.

10. Il diagramma di Nyquist completo della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s+2}{s^2+4\,s+4}$:
    - ◯ è una circonferenza;
    - ◯ ha guadagno statico unitario;
    - ◯ presenta un asintoto verticale;
    - ◯ si evolve tutta nel semipiano positivo.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:
    - ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    - ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati a coefficiente di smorzamento δ costante è formato da:
    - ◯ due semirette uscenti dall'origine;
    - ◯ una retta parallela all'asse immaginario;
    - ◯ due rette parallele all'asse reale.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Nella graficazione del contorno delle radici al variare del parametro τ, un asintoto può essere percorso dall'infinito al finito:
    - ◯ solo se il grado relativo è negativo;
    - ◯ solo se il grado relativo è positivo;
    - ◯ anche se il grado relativo è nullo.

14. In corrispondenza di un punto di diramazione nel luogo delle radici di un sistema dinamico $G(s)$:
    - ◯ vi sono radici multiple nell'equazione caratteristica del sistema;
    - ◯ hanno origine rami che dividono il piano complesso in parti uguali;
    - ◯ i rami del luogo delle radici sono costituiti da semirette;
    - ◯ i rami del luogo delle radici sono perpendicolari fra di loro.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

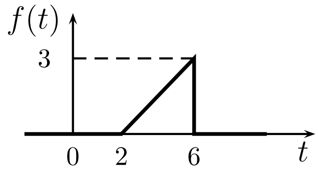
23 Luglio 2008 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

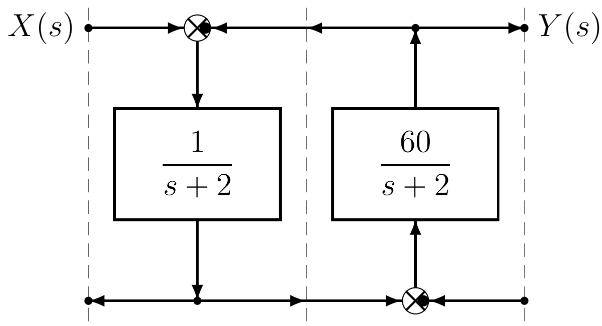
$$x_1(t) = 4\cos(3\,t - 15), \qquad x_2(t) = 3\,t^4\,e^{-2\,t} + 4\sin(5\,\pi\,t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{(s+5)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{(s-5)^2}{(s-1)\,(s+2)\,(s+3)}, \qquad G_3(s) = \frac{s+1}{(s-2)\,(s+3)^2}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

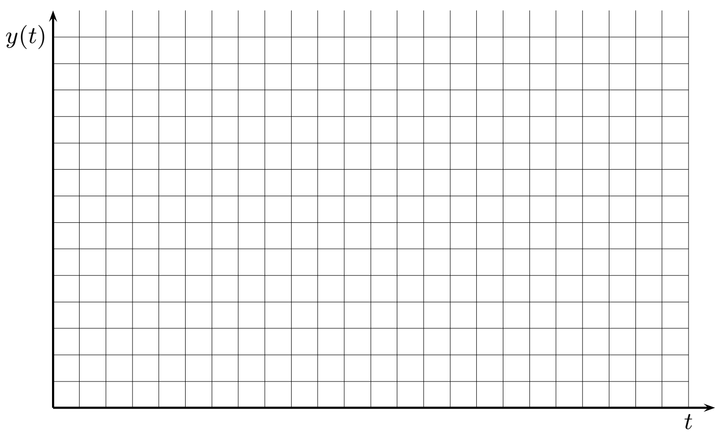
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

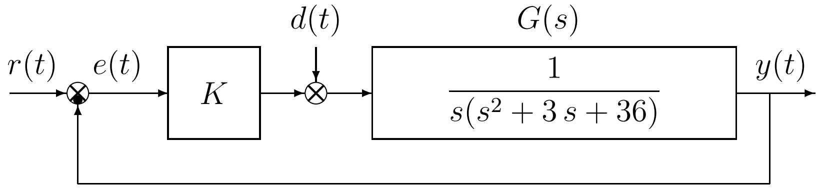
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 4$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2) indicando il valore della massima sovraelongazione percentuale, l'istante di massima sovraelongazione e il periodo delle oscillazioni.



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

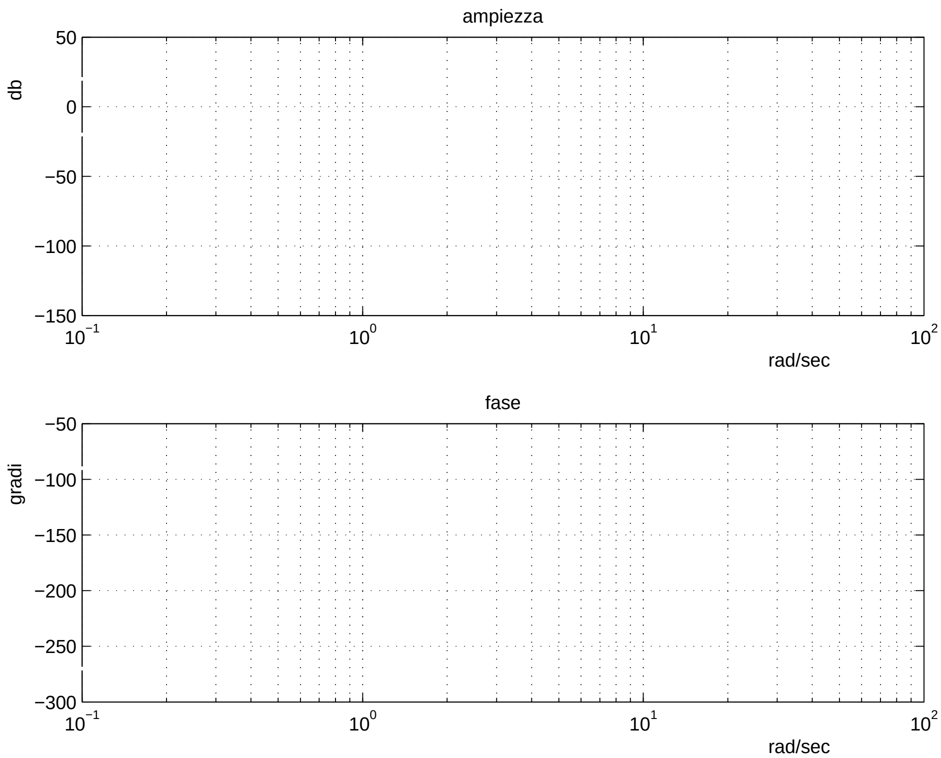
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.1\, d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 4\,t$.

d.4) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 50$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima del modulo della risposta "a regime" $|y_\infty(t)|$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5\,\cos(1.5\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

23 Luglio 2008 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:
   - ◯ ha solo una radice a parte reale positiva
   - ◯ ha almeno una radice a parte reale positiva
   - ◯ ha almeno una radice a parte reale negativa
   - ◯ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva

2. Il picco di risonanza M_R per un sistema del 2 ordine è:
   - ◯ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-\delta^2}}$
   - ◯ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$
   - ◯ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$
   - ◯ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-2\delta^2}}$

3. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $-1 < \delta < 0$ è caratterizzato da:
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale negativa.

4. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$5\,\dddot{x}(t)+4\,\ddot{x}(t)+3\,\dot{x}(t)+2\,x(t) = \dot{u}(t)+2\,u(t) \quad\rightarrow\quad G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} =$$

5. Un sistema di tipo 1
   - ◯ ha uno zero nell'origine;
   - ◯ ha un polo nell'origine;
   - ◯ ha un errore a regime nullo nella risposta alla rampa;
   - ◯ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino.

6. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = t^2$ è:
   - ◯ $X(s) = \frac{4}{s^3}$;
   - ◯ $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
   - ◯ $X(s) = \frac{1}{s^2}$.

7. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+5\,s+49}$;

$$T_a =$$

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   - ◯ del segnale $x(t) = t^2 e^{-(t-3)}$;
   - ◯ del segnale $x(t) = te^{-3t}$;
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to 0$;
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a 1 per $t \to \infty$.

9. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{4\,s+5}{2\,s^3+1}$ vale:

   - ◯ $g(0^+) = 0$;
   - ◯ $g(0^+) = 1/4$;
   - ◯ $g(0^+) = 1$.

10. Il diagramma di Nyquist completo della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s+2}{s^2+4\,s+4}$:

    - ◯ ha guadagno statico unitario;
    - ◯ presenta un asintoto verticale;
    - ◯ si evolve tutta nel semipiano positivo;
    - ◯ è una circonferenza.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    - ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    - ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati a coefficiente di smorzamento δ costante è formato da:

    - ◯ una retta parallela all'asse immaginario;
    - ◯ due rette parallele all'asse reale.
    - ◯ due semirette uscenti dall'origine;

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Nella graficazione del contorno delle radici al variare del parametro τ, un asintoto può essere percorso dall'infinito al finito:

    - ◯ solo se il grado relativo è positivo;
    - ◯ solo se il grado relativo è negativo;
    - ◯ anche se il grado relativo è nullo.

14. In corrispondenza di un punto di diramazione nel luogo delle radici di un sistema dinamico $G(s)$:

    - ◯ i rami del luogo delle radici sono costituiti da semirette;
    - ◯ i rami del luogo delle radici sono perpendicolari fra di loro;
    - ◯ vi sono radici multiple nell'equazione caratteristica del sistema;
    - ◯ hanno origine rami che dividono il piano complesso in parti uguali.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

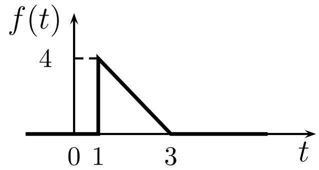
23 Luglio 2008 - Esercizi

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = t^4\, e^{-3\,t} + 2\,\cos(5\,\pi\,t), \qquad x_2(t) = 4\,\sin(3\,t - 6),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{24}{(s+3)^5} + \frac{2\,s}{s^2 + 25\,\pi^2}, \qquad X_2(s) = \frac{12\,e^{-2s}}{s^2+9}, \qquad X_3(s) = \frac{2}{s}\left[-\frac{e^{-s}}{s} + 2\,e^{-s} + \frac{e^{-3\,s}}{s}\right]$$

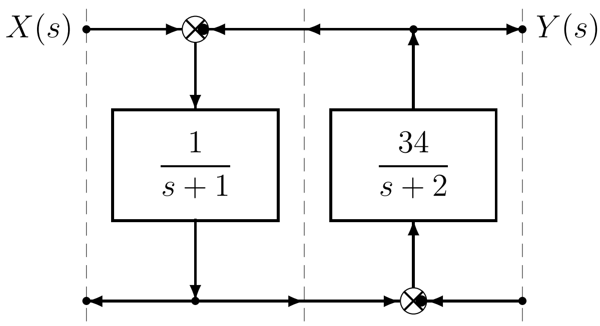
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{s-3}{(s+1)\,(s-4)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{4}{(s+2)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{(s+1)^2}{(s+2)\,(s+3)\,(s-4)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{4}{25}\,e^{-t} + \frac{4}{25}\,e^{4\,t} + \frac{1}{5}\,t\,e^{4\,t}, \qquad g_2(t) = 2\,t^2\,e^{-2\,t}, \qquad g_3(t) = -\frac{1}{6}\,e^{-2\,t} + \frac{4}{7}\,e^{-3\,t} + \frac{25}{42}\,e^{4\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

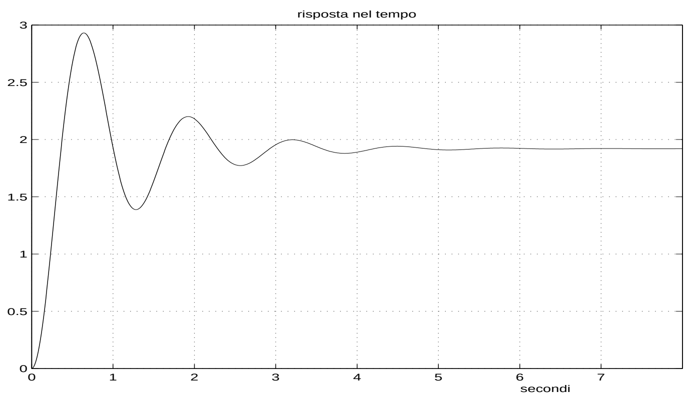
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{34}{s^2 + 3\,s + 36}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

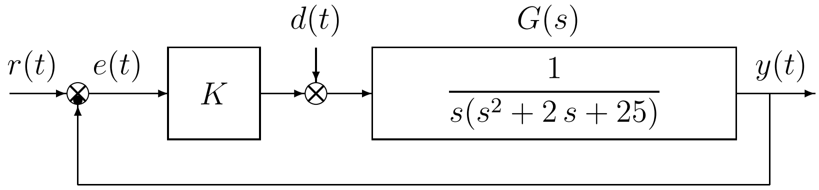
1) $\sigma = -1.5$ 3) $\omega_n = 6$ 5) $K_0 = 0.9444$

2) $\omega = 5.81$ 4) $\delta = 0.25$ 6) $T_a = 2$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 3$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2) indicando il valore della massima sovraelongazione percentuale, l'istante di massima sovraelongazione e il periodo delle oscillazioni.



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K}{s\,(s^2 + 2\,s + 25)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 2\,s^2 + 25\,s + K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 25 \\ 2 & 2 & K \\ 1 & 25 - \frac{K}{2} & \\ 0 & K & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 50$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 48$ è:

$$\omega^* = \sqrt{25} = 4$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.2\,d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1 + K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.2\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 5$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{3}{K_v}$ con $K_v = \frac{K}{25}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{75}{K}.$$

d.4) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

<u>Soluzione</u>: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

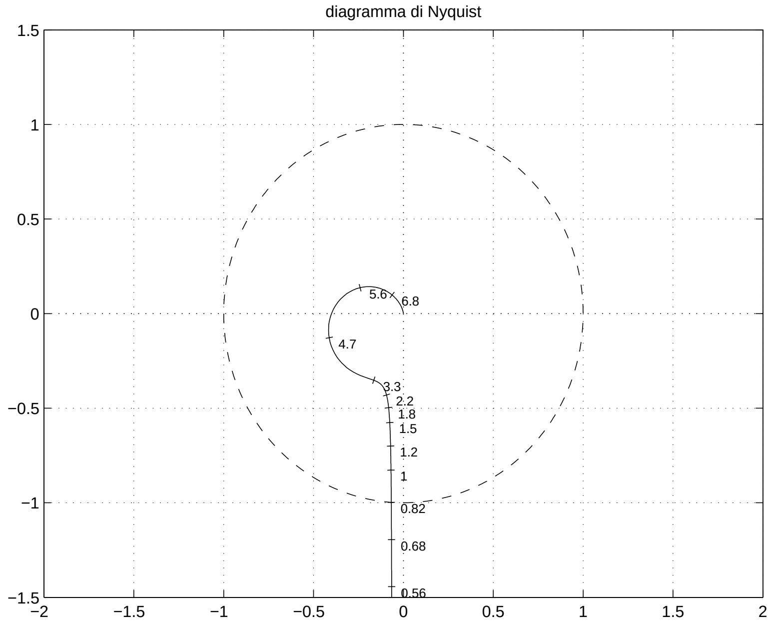


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = -0.064$.

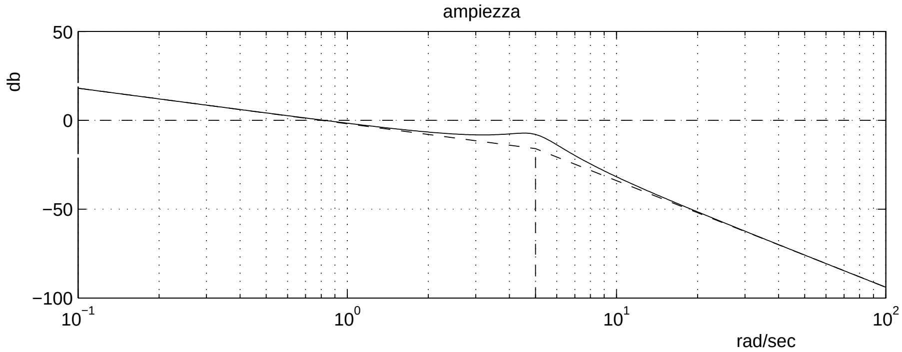
Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

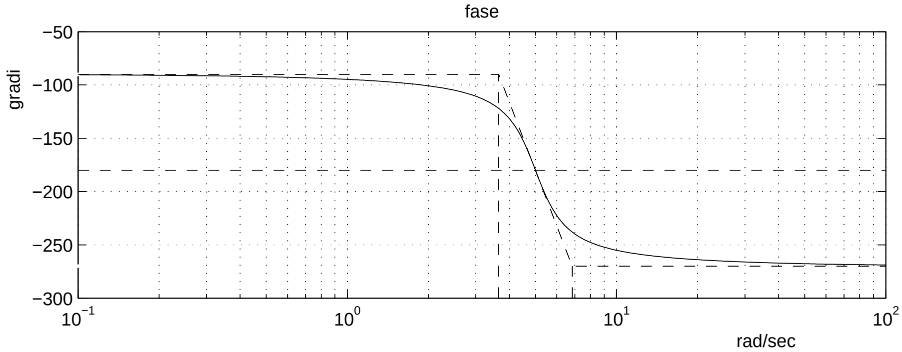
$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{2}{5}$$

Il corrispondente valore di ω^* è 5 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 2.5$ ed il margine di fase è $M_f = 86$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;





e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

<u>Soluzione</u>: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.8\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima del modulo della risposta "a regime" $|y_\infty(t)|$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 4\,\cos(0.8\,t)$.

<u>Soluzione</u>: La pulsazione $\omega_T = 0.8\, rad/s$ corrisponde alla banda passante del sistema retroazionato. Il corrispondente guadagno del sistema retroazionato è pari a $\frac{1}{2}$. Il modulo del segnale d'uscita risulta quindi essere $|y_\infty(t)| = 2$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. <u>Soluzione</u>: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

<u>Soluzione</u>:

$$\sigma = -0.667$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 4\,i$$
$$K^* = 2.5$$

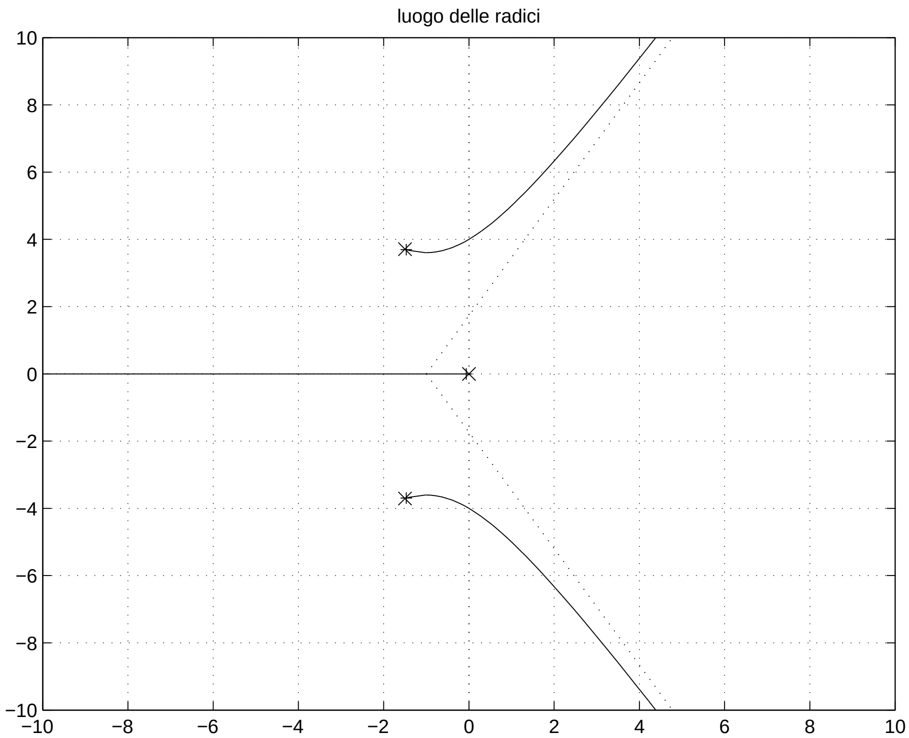


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08
23 Luglio 2008 - Domande Teoriche
Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:

   ⊗ ha almeno una radice a parte reale negativa
   ⊗ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
   ◯ ha solo una radice a parte reale positiva
   ⊗ ha almeno una radice a parte reale positiva

2. Il picco di risonanza M_R per un sistema del 2 ordine è:

   ⊗ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$
   ◯ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$
   ◯ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-\delta^2}}$
   ◯ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-2\delta^2}}$

3. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $-1 < \delta < 0$ è caratterizzato da:

   ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   ⊗ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   ◯ due poli reali distinti a parte reale negativa;
   ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva.

4. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\dddot{y}(t) + 3\,\ddot{y}(t) + 4\,\dot{y}(t) + 5\,y(t) = \dot{x}(t) + 2\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1\,s+2}{s^3+3\,s^2+4\,s+5}$$

5. Un sistema di tipo 1

   ⊗ ha un polo nell'origine;
   ◯ ha uno zero nell'origine;
   ⊗ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino;
   ◯ ha un errore a regime nullo nella risposta alla rampa.

6. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = 2\,t^2$ è:

   ◯ $X(s) = \frac{1}{s^2}$;
   ◯ $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
   ⊗ $X(s) = \frac{4}{s^3}$.

7. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+4\,s+33}$;

$$T_a = \frac{3}{2}$$

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   - $\otimes$ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to \infty$;
   - $\bigcirc$ di un segnale $x(t)$ che tende a 1 per $t \to 0$;
   - $\bigcirc$ del segnale $x(t) = t^2 e^{-(t-3)}$;
   - $\otimes$ del segnale $x(t) = t e^{-3t}$.

9. Il valore finale per $t \to \infty$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{2\,s+1}{s\,(s^2+4)}$ vale:

   - $\bigcirc$ $g(\infty) = 0$;
   - $\otimes$ $g(\infty) = 1/4$;
   - $\bigcirc$ $g(\infty) = 1$.

10. Il diagramma di Nyquist completo della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s+2}{s^2+4\,s+4}$:

    - $\otimes$ è una circonferenza;
    - $\bigcirc$ ha guadagno statico unitario;
    - $\bigcirc$ presenta un asintoto verticale;
    - $\otimes$ si evolve tutta nel semipiano positivo.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    - $\otimes$ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - $\bigcirc$ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - $\bigcirc$ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    - $\otimes$ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati a coefficiente di smorzamento δ costante è formato da:

    - $\otimes$ due semirette uscenti dall'origine;
    - $\bigcirc$ una retta parallela all'asse immaginario;
    - $\bigcirc$ due rette parallele all'asse reale.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Nella graficazione del contorno delle radici al variare del parametro τ, un asintoto può essere percorso dall'infinito al finito:

    - $\otimes$ solo se il grado relativo è negativo;
    - $\bigcirc$ solo se il grado relativo è positivo;
    - $\bigcirc$ anche se il grado relativo è nullo.

14. In corrispondenza di un punto di diramazione nel luogo delle radici di un sistema dinamico $G(s)$:

    - $\otimes$ vi sono radici multiple nell'equazione caratteristica del sistema;
    - $\otimes$ hanno origine rami che dividono il piano complesso in parti uguali;
    - $\bigcirc$ i rami del luogo delle radici sono costituiti da semirette;
    - $\bigcirc$ i rami del luogo delle radici sono perpendicolari fra di loro.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

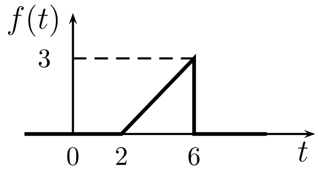
23 Luglio 2008 - Esercizi

Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 4\cos(3\,t - 15), \qquad x_2(t) = 3\,t^4\,e^{-2\,t} + 4\,\sin(5\,\pi\,t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{4\,s\,e^{-5s}}{s^2+9}, \qquad X_2(s) = \frac{72}{(s+2)^5} + \frac{20\,\pi}{s^2+25\,\pi^2}, \qquad X_3(s) = \frac{3}{s}\left[\frac{e^{-2s}}{4\,s} - e^{-6\,s} - \frac{e^{-6\,s}}{4\,s}\right]$$

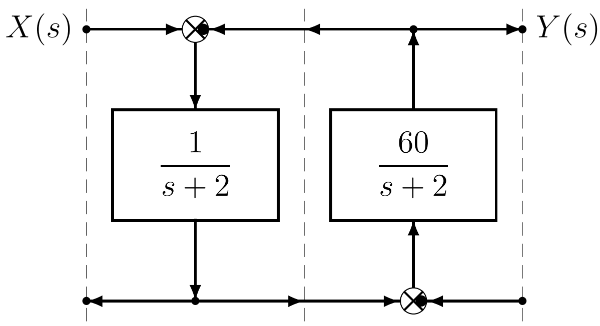
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{3}{(s+5)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{(s-5)^2}{(s-1)\,(s+2)\,(s+3)}, \qquad G_3(s) = \frac{s+1}{(s-2)\,(s+3)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{3}{2}\,t^2\,e^{-5\,t}, \qquad g_2(t) = \frac{4}{3}\,e^{t} - \frac{49}{3}\,e^{-2\,t} + 16\,e^{-3\,t}, \qquad g_3(t) = \frac{3}{25}\,e^{2\,t} - \frac{3}{25}\,e^{-3\,t} + \frac{2}{5}\,t\,e^{-3\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



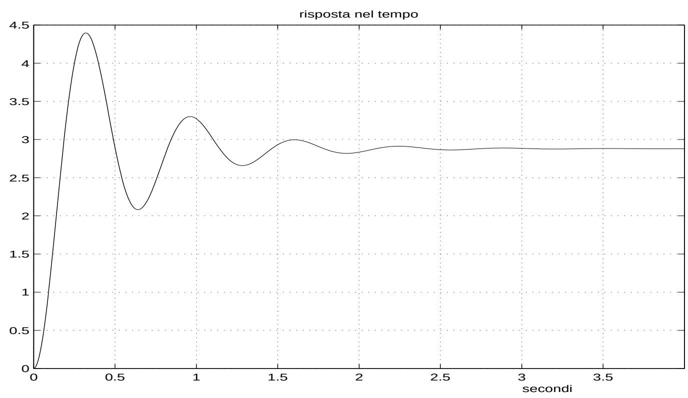
c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{60}{s^2 + 4\,s + 64}$$

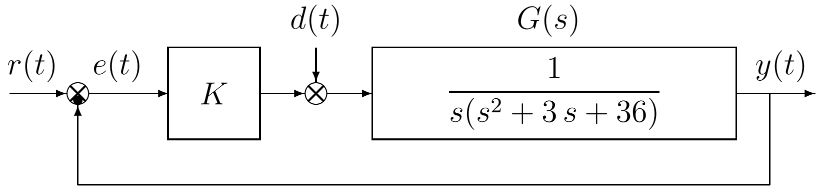
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

1) $\sigma = -2$	3) $\omega_n = 8$	5) $K_0 = 0.9375$
2) $\omega = 7.75$	4) $\delta = 0.25$	6) $T_a = 1.5$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 4$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2) indicando il valore della massima sovraelongazione percentuale, l'istante di massima sovraelongazione e il periodo delle oscillazioni.



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K}{s\,(s^2 + 3\,s + 36)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^3 + 3\,s^2 + 36\,s + K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 36 \\ 2 & 3 & K \\ 1 & 36 - \frac{K}{3} & \\ 0 & K & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 108$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 108$ è:

$$\omega^* = \sqrt{108} = 6$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.1\,d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1 + K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.1\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = 10$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 4\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty = \frac{4}{K_v}$ con $K_v = \frac{K}{36}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{144}{K}.$$

d.4) Posto $K = 50$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

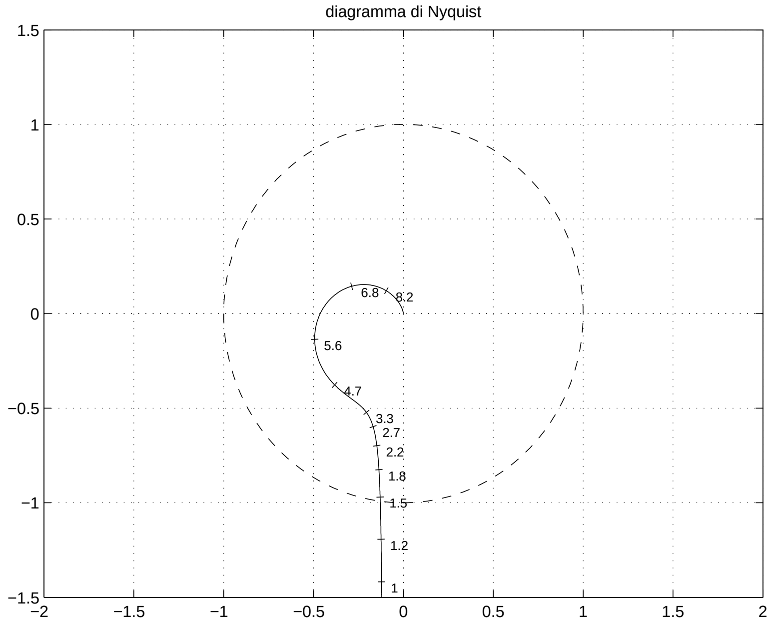


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = -0.1157$.

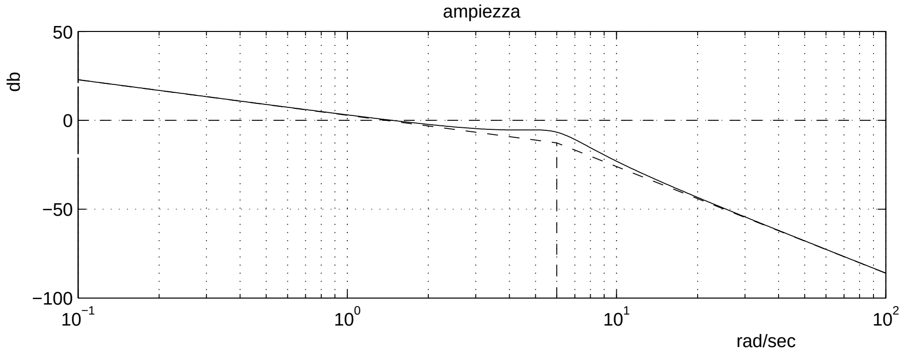
Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

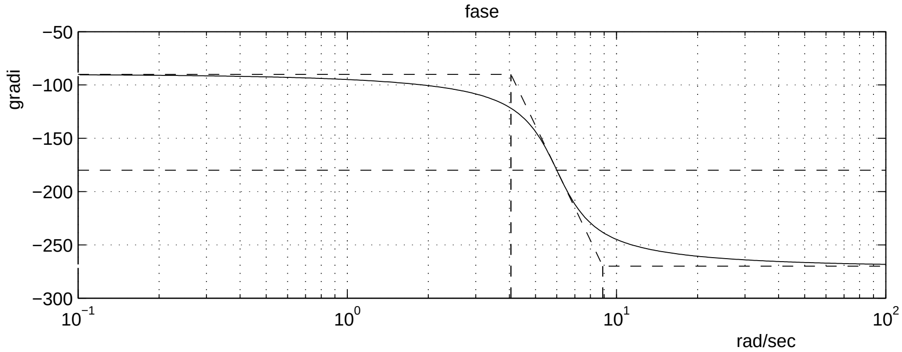
$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{50}{108}$$

Il corrispondente valore di ω^* è 6 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 2.16$ ed il margine di fase è $M_f = 82$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 50$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;





e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 1.5\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima del modulo della risposta "a regime" $|y_\infty(t)|$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 5\,\cos(1.5\,t)$.

Soluzione: La pulsazione $\omega_T = 1.5\, rad/s$ corrisponde alla banda passante del sistema retroazionato. Il corrispondente guadagno del sistema retroazionato è pari a $\frac{1}{2}$. Il modulo del segnale d'uscita risulta quindi essere $|y_\infty(t)| = 2.5$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione:

$$
\begin{gathered}
\sigma = -1 \\
\phi = 60,\ 180,\ 300 \\
s^* = 6\,i \\
K^* = 2.16
\end{gathered}
$$

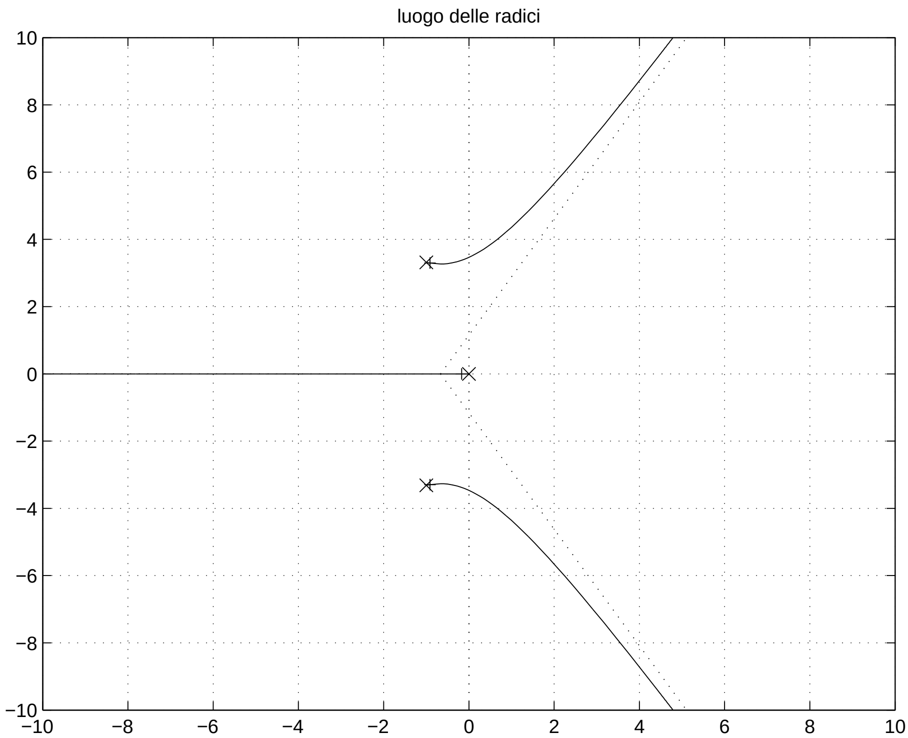


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08
23 Luglio 2008 - Domande Teoriche
Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3 grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:

   ◯ ha solo una radice a parte reale positiva
   ⊗ ha almeno una radice a parte reale positiva
   ⊗ ha almeno una radice a parte reale negativa
   ⊗ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva

2. Il picco di risonanza M_R per un sistema del 2 ordine è:

   ◯ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-\delta^2}}$
   ◯ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-2\delta^2}}$
   ⊗ $M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1-\delta^2}}$
   ◯ $M_R = \frac{\delta}{2\sqrt{1-2\delta^2}}$

3. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $-1 < \delta < 0$ è caratterizzato da:

   ⊗ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva;
   ◯ due poli reali distinti a parte reale negativa.

4. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$5\,\dddot{x}(t) + 4\,\ddot{x}(t) + 3\,\dot{x}(t) + 2\,x(t) = \dot{u}(t) + 2\,u(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{5\,s^3 + 4\,s^2 + 3\,s + 2}$$

5. Un sistema di tipo 1

   ◯ ha uno zero nell'origine;
   ⊗ ha un polo nell'origine;
   ◯ ha un errore a regime nullo nella risposta alla rampa;
   ⊗ ha un errore a regime nullo nella risposta al gradino.

6. La trasformata di Laplace del segnale $x(t) = t^2$ è:

   ◯ $X(s) = \frac{4}{s^3}$;
   ⊗ $X(s) = \frac{2}{s^3}$;
   ◯ $X(s) = \frac{1}{s^2}$.

7. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s^2+5\,s+49}$;

$$T_a = \frac{6}{5}$$

8. La funzione complessa $X(s) = \frac{1}{(s+3)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   ○ del segnale $x(t) = t^2 e^{-(t-3)}$;
   ⊗ del segnale $x(t) = te^{-3t}$;
   ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a zero per $t \to 0$;
   ○ di un segnale $x(t)$ che tende a 1 per $t \to \infty$.

9. Il valore iniziale per $t = 0^+$ della risposta all'impulso $g(t)$ del sistema $G(s) = \frac{4\,s+5}{2\,s^3+1}$ vale:

   ⊗ $g(0^+) = 0$;
   ○ $g(0^+) = 1/4$;
   ○ $g(0^+) = 1$.

10. Il diagramma di Nyquist completo della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s+2}{s^2+4\,s+4}$:

    ○ ha guadagno statico unitario;
    ○ presenta un asintoto verticale;
    ⊗ si evolve tutta nel semipiano positivo;
    ⊗ è una circonferenza.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    ○ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ⊗ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ⊗ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    ○ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati a coefficiente di smorzamento δ costante è formato da:

    ○ una retta parallela all'asse immaginario;
    ○ due rette parallele all'asse reale.
    ⊗ due semirette uscenti dall'origine;

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Nella graficazione del contorno delle radici al variare del parametro τ, un asintoto può essere percorso dall'infinito al finito:

    ○ solo se il grado relativo è positivo;
    ⊗ solo se il grado relativo è negativo;
    ○ anche se il grado relativo è nullo.

14. In corrispondenza di un punto di diramazione nel luogo delle radici di un sistema dinamico $G(s)$:

    ○ i rami del luogo delle radici sono costituiti da semirette;
    ○ i rami del luogo delle radici sono perpendicolari fra di loro;
    ⊗ vi sono radici multiple nell'equazione caratteristica del sistema;
    ⊗ hanno origine rami che dividono il piano complesso in parti uguali.