Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

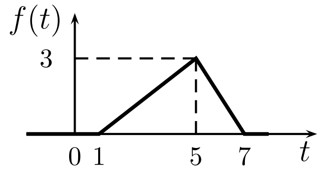
16 Giugno 2008 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

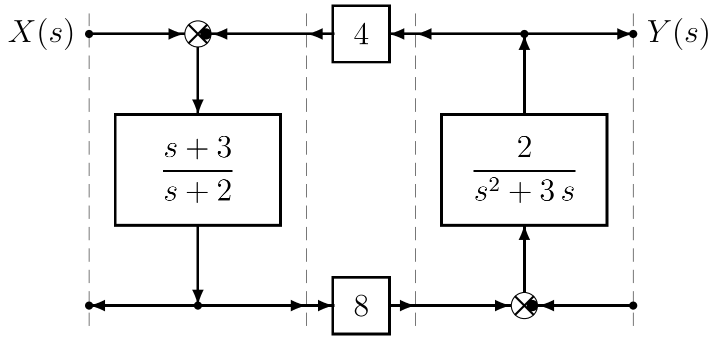
$$x_1(t) = t^2\, e^{(-3\,t+6)} + 5\,\cos(2\,t-4), \qquad x_2(t) = 3\,e^{-5\,t}\,\sin(2\,t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+1)\,(s-3)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{4}{(s-3)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{(3\,s+1)^2}{(s+3)\,(s-4)\,(s+2)}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

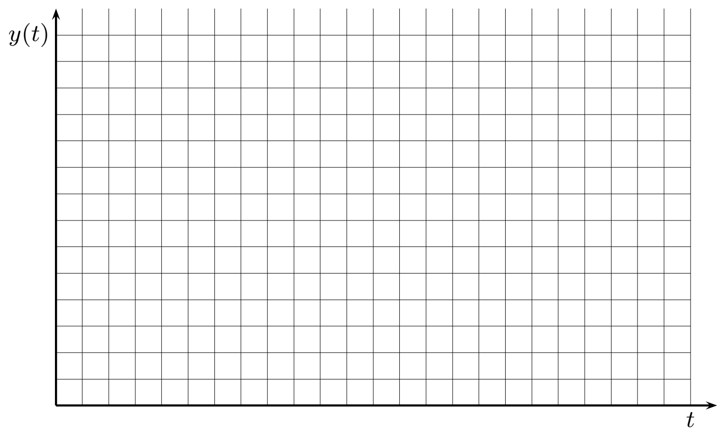
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

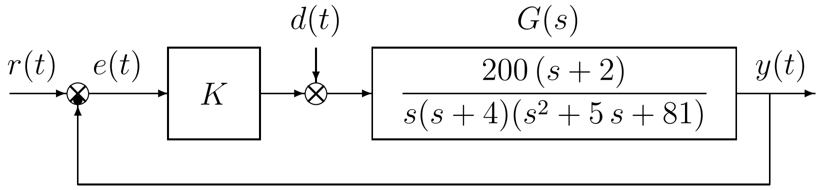
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 2$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

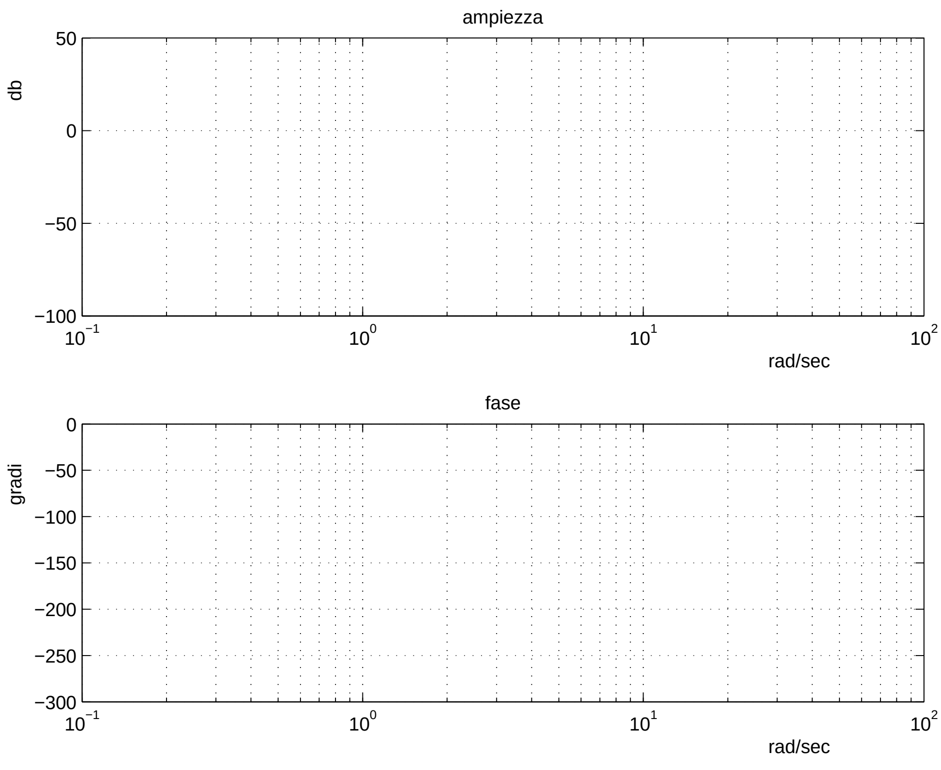
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.4\, d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 3 + 4\,\cos(0.02\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

16 Giugno 2008 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di "tipo 1" è caratterizzato da:
   - ◯ 1 polo nullo;
   - ◯ 1 polo a parte reale negativa;
   - ◯ grado relativo $n - m = 1$.

2. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

   $$\dddot{y}(t)+3\,\ddot{y}(t)+4\,\dot{y}(t)+5\,y(t) = \dot{x}(t)+2\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

3. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3° grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:
   - ◯ ha almeno una radice a parte reale negativa
   - ◯ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
   - ◯ ha solo una radice a parte reale positiva
   - ◯ ha almeno una radice a parte reale positiva

4. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $\delta > 1$ è caratterizzato da:
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale negativa;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva.

5. La "costante di velocità" K_v di una funzione di trasferimento $G(s)$ è definita come:
   - ◯ $K_v = \lim_{s\to 0} s^2\, G(s)$;
   - ◯ $K_v = \lim_{s\to 0} s\, G(s)$;
   - ◯ $K_v = \lim_{s\to \infty} s^2\, G(s)$.

6. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati con pulsazione naturale costante è formato da:
   - ◯ una circonferenza centrata nell'origine;
   - ◯ due semirette uscenti dall'origine;
   - ◯ una retta parallela all'asse immaginario;
   - ◯ due rette parallele all'asse reale.

7. La funzione complessa $X(s) = \frac{(s+4)^2}{s(2s+8)^2}$ è la trasformata di Laplace:
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{4}$ per $t \to \infty$;
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{2}$ per $t \to \infty$;
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a ∞ per $t \to 0$;
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{4}$ per $t \to 0$.

8. Il diagramma di Nyquist completo della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s+2}{s(s+4)}$:

   ◯ è una circonferenza percorsa in senso orario;
   ◯ è una circonferenza percorsa in senso antiorario;
   ◯ presenta un asintoto verticale;
   ◯ si evolve tutta nel semipiano positivo.

9. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{2}{s^2+4\,s+6}$;

$$T_a =$$

10. La banda passante di sistema retroazionato con guadagno d'anello $G_a(s)$ è determinata da l'intervallo di frequenze percui:

    ◯ $|G_a(j\omega)| >> 1$;
    ◯ $|G_a(j\omega)| \geq 1$;
    ◯ $\angle G_a(j\omega) > \frac{\pi}{2}$;
    ◯ $\angle G_a(j\omega) \leq \frac{\pi}{2}$.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    ◯ una pendenza di $-60\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Il diagramma di Nyquist di un sistema di tipo 2:

    ◯ è chiuso all'infinito da una semicirconferenza percorsa un senso orario;
    ◯ è chiuso all'infinito da una semicirconferenza percorsa un senso antiorario;
    ◯ è chiuso all'infinito da una circonferenza percorsa un senso orario;
    ◯ è chiuso all'infinito da una circonferenza percorsa un senso antiorario.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il luogo delle radici:

    ◯ ha un numero di asintoti pari al tipo del sistema;
    ◯ ha tanti rami quanti sono gli zeri del sistema;
    ◯ è simmetrico rispetto all'asse reale;
    ◯ può avere rami che tendono all'origine del piano complesso.

14. Un problema di contorno delle radici può essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici:

    ◯ sempre;
    ◯ per sistemi con grado relativo ≥ 2;
    ◯ se il parametro variabile entra linearmente nell'equazione caratteristica.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

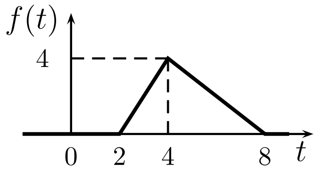
16 Giugno 2008 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

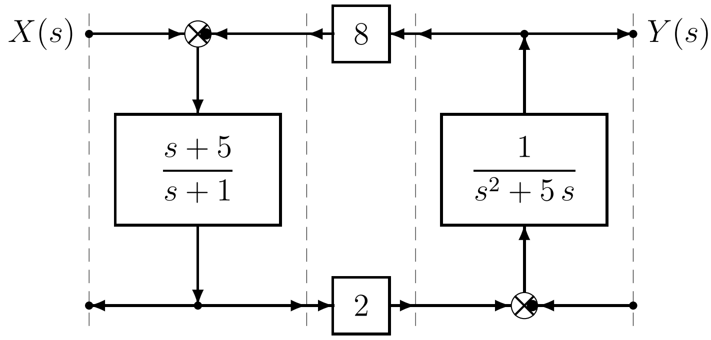
$$x_1(t) = 5\,e^{-2\,t}\,\cos(3\,t), \qquad x_2(t) = 3\,t^2\,e^{(-t+2)} + 6\,\sin(2\,t-4),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{5}{(s+4)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{(2\,s-3)^2}{(s-2)\,(s+4)\,(s+1)}, \qquad G_3(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-1)\,(s+3)^2}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

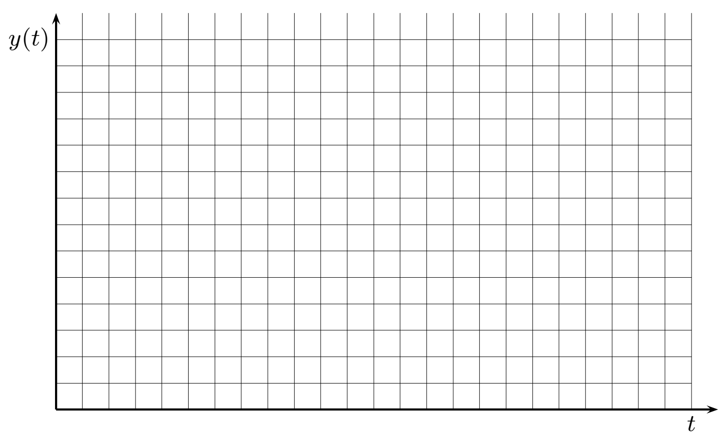
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

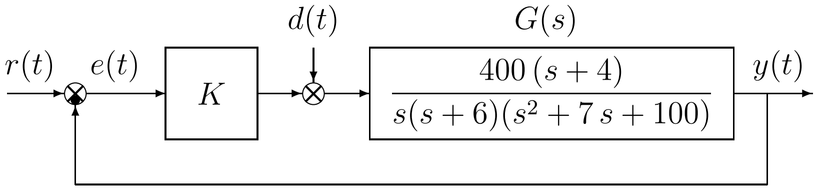
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 3$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

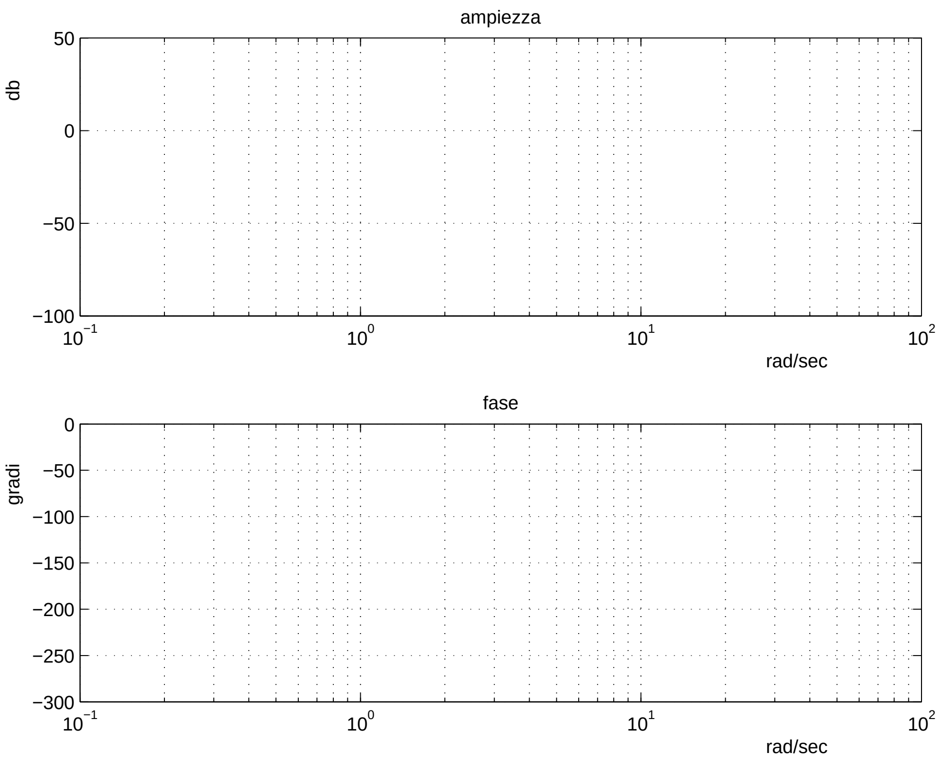
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.5\,d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 6\,t$.

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 2 + 5\,\cos(0.01\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

16 Giugno 2008 - Domande Teoriche

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di "tipo 1" è caratterizzato da:
   - ◯ grado relativo $n - m = 1$;
   - ◯ 1 polo a parte reale negativa;
   - ◯ 1 polo nullo.

2. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$5\,\dddot{x}(t)+4\,\ddot{x}(t)+3\,\dot{x}(t)+2\,x(t) = \dot{u}(t)+2\,u(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} =$$

3. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3° grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:
   - ◯ ha solo una radice a parte reale positiva
   - ◯ ha almeno una radice a parte reale positiva
   - ◯ ha almeno una radice a parte reale negativa
   - ◯ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva

4. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $\delta > 1$ è caratterizzato da:
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale negativa.

5. La "costante di velocità" K_v di una funzione di trasferimento $G(s)$ è definita come:
   - ◯ $K_v = \lim_{s\to\infty} s^2\, G(s)$;
   - ◯ $K_v = \lim_{s\to 0} s\, G(s)$;
   - ◯ $K_v = \lim_{s\to 0} s^2\, G(s)$.

6. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati con pulsazione naturale costante è formato da:
   - ◯ una retta parallela all'asse immaginario;
   - ◯ due rette parallele all'asse reale;
   - ◯ due semirette uscenti dall'origine;
   - ◯ una circonferenza centrata nell'origine.

7. La funzione complessa $X(s) = \frac{(s+6)^2}{s(3s+9)^2}$ è la trasformata di Laplace:
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{2}{3}$ per $t \to \infty$;
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{4}{9}$ per $t \to \infty$;
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{9}$ per $t \to 0$;
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a ∞ per $t \to 0$.

8. Il diagramma di Nyquist completo della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s+4}{s(s+8)}$:

- ◯ si evolve tutta nel semipiano positivo;
- ◯ presenta un asintoto verticale;
- ◯ è una circonferenza percorsa in senso antiorario;
- ◯ è una circonferenza percorsa in senso orario.

9. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{3}{s^2+8\,s+9}$;

$$T_a =$$

10. La banda passante di sistema retroazionato con guadagno d'anello $G_a(s)$ è determinata da l'intervallo di frequenze percui:

- ◯ $|G_a(j\omega)| \geq 1$;
- ◯ $|G_a(j\omega)| >> 1$;
- ◯ $\angle G_a(j\omega) > \frac{\pi}{2}$;
- ◯ $\angle G_a(j\omega) \leq \frac{\pi}{2}$.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

- ◯ una pendenza di $-60\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
- ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
- ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
- ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$.

12. Il diagramma di Nyquist di un sistema di tipo 2:

- ◯ è chiuso all'infinito da una circonferenza percorsa un senso orario;
- ◯ è chiuso all'infinito da una circonferenza percorsa un senso antiorario;
- ◯ è chiuso all'infinito da una semicirconferenza percorsa un senso orario;
- ◯ è chiuso all'infinito da una semicirconferenza percorsa un senso antiorario.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il luogo delle radici:

- ◯ è simmetrico rispetto all'asse reale;
- ◯ può avere rami che tendono all'origine del piano complesso;
- ◯ ha un numero di asintoti pari al tipo del sistema;
- ◯ ha tanti rami quanti sono gli zeri del sistema.

14. Un problema di contorno delle radici può essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici:

- ◯ se il parametro variabile entra linearmente nell'equazione caratteristica;
- ◯ per sistemi con grado relativo ≥ 2;
- ◯ sempre.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

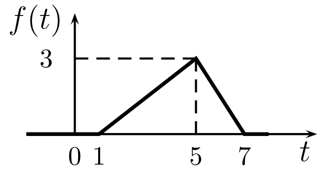
16 Giugno 2008 - Esercizi

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = t^2\, e^{(-3\,t+6)} + 5\,\cos(2\,t-4), \qquad x_2(t) = 3\,e^{-5\,t}\,\sin(2\,t),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{2\,e^6}{(s+3)^3} + \frac{5\,s\,e^{-2s}}{s^2+4}, \qquad X_2(s) = \frac{6}{(s+5)^2+4}, \qquad X_3(s) = \frac{3\,e^{-s}}{4\,s^2} - \frac{9\,e^{-5\,s}}{4\,s^2} + \frac{3\,e^{-7\,s}}{2\,s^2}$$

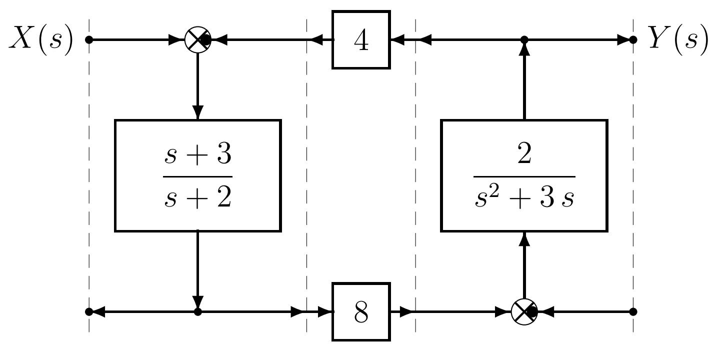
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{(s-2)^2}{(s+1)\,(s-3)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{4}{(s-3)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{(3\,s+1)^2}{(s+3)\,(s-4)\,(s+2)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{9}{16}\,e^{-t} + \frac{7}{16}\,e^{3\,t} + \frac{1}{4}\,t\,e^{3\,t}, \qquad g_2(t) = 2\,t^2\,e^{3t}, \qquad g_3(t) = \frac{64}{7}\,e^{-3\,t} + \frac{169}{42}\,e^{4\,t} - \frac{25}{6}\,e^{-2\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

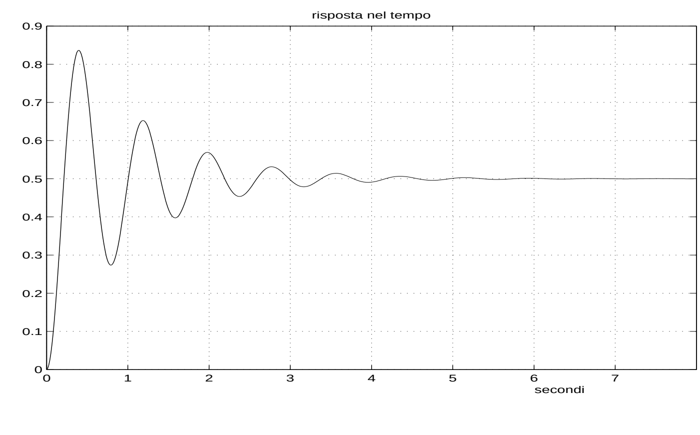
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{16}{s^2+2\,s+64}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

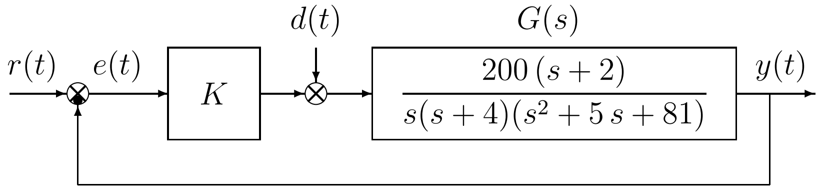
1) $\sigma = -1$ 3) $\omega_n = 8$ 5) $K_0 = 0.25$

2) ω =7.94 4) $\delta = 0.125$ 6) $T_a = 3$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 2$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{200K(s+2)}{s\,(s+4)\,(s^2+5\,s+81)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 9\,s^3 + 101\,s^2 + (324+200K)\,s + 400K = 0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 101 & 400K \\
3 & 9 & (324+200K) & \\
2 & 65 - \frac{200}{9}K & 400K & \\
1 & -\frac{40000}{9}K^2 + 2200K + 21060 & & \\
0 & 400K & &
\end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K > 0, \qquad\qquad K < 2.438$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^* = 2.438$ è:

$$\omega^* = \sqrt{\frac{324+200K^*}{9}} = 9.48$$

d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.4\,d_0$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t) = d_0$ è

$$y_\infty = \frac{G(0)\,d_0}{1 + K\,G(0)} = \frac{d_0}{K} = 0.4\,d_0$$

Il sistema $G(s)$ è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico è infinito $G(0) = \infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K = \frac{5}{2}$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

<u>Soluzione</u>: L'errore a regime $e_\infty = \frac{3}{K_v}$ con $K_v = \frac{400\,K}{324}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty = \frac{972}{400\,K}.$$

d.4) Posto $K = 1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

<u>Soluzione</u>: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a = 0.23$.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = 0.41$$

Il corrispondente valore di ω^* è 9.48 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 2.438$.

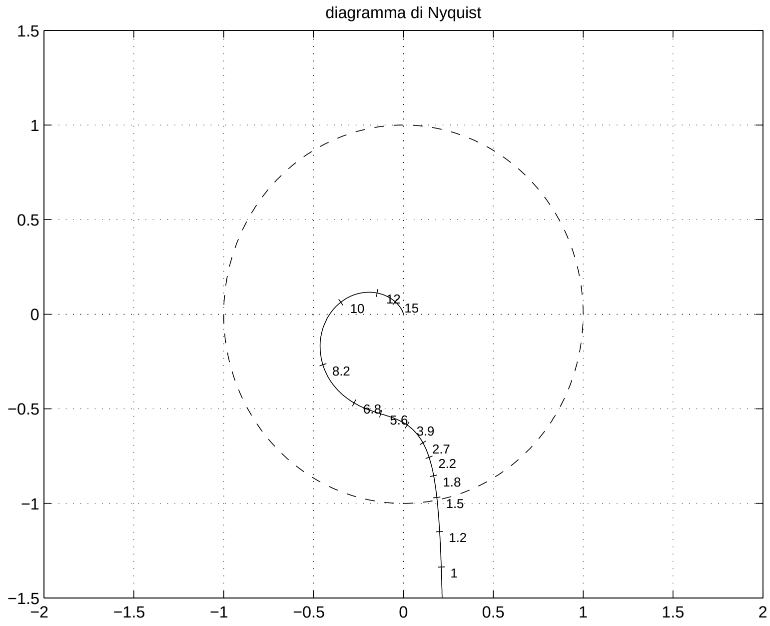
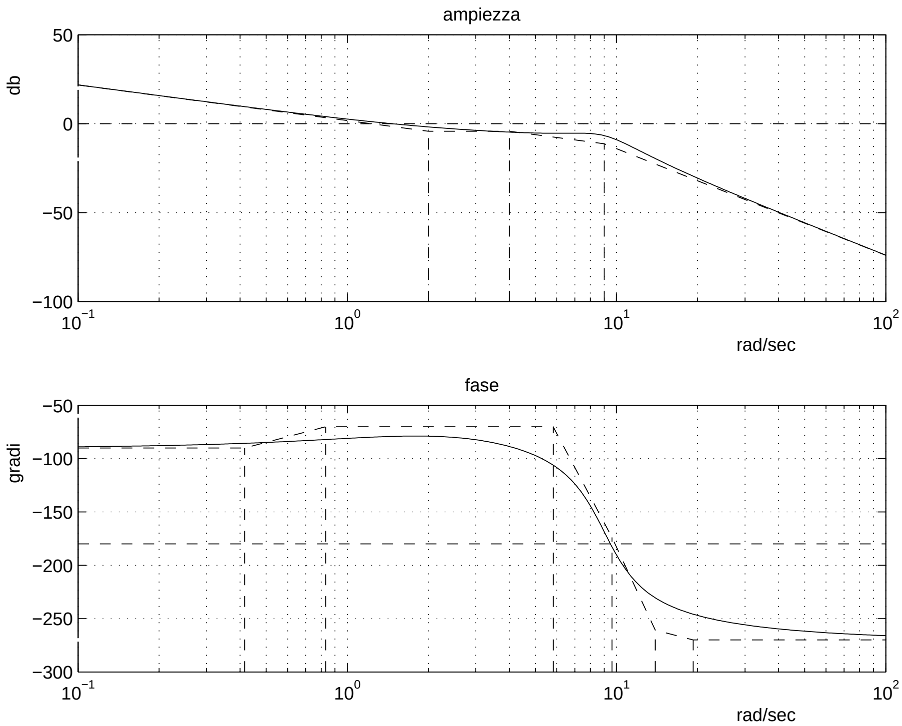


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;
<u>Soluzione</u>: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 1.5\,rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 3 + 4\,\cos(0.02\,t)$.
<u>Soluzione</u>: Essendo il sistema retroazionato di tipo passa-basso ed essendo la pulsazione del segnale di ingresso $\omega_r << \omega_T$, con buona approssimazione l'uscita risulta uguale al segnale d'ingresso, percui $y(t) = 3 + 4\,\cos(0.02\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

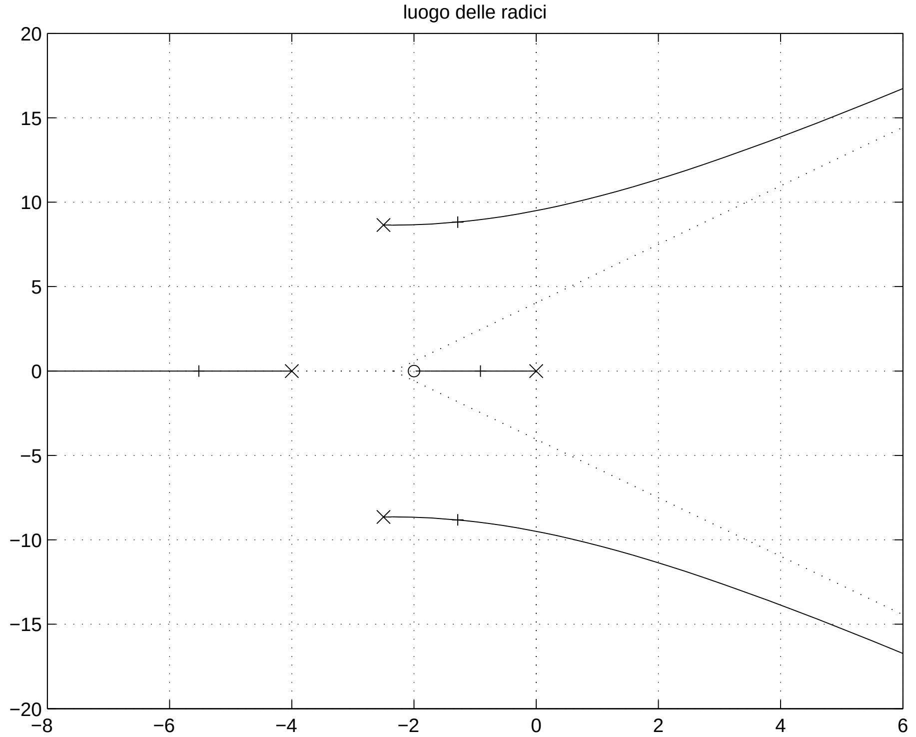


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione:

$$\sigma = -2.33$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 9.48\, i$$
$$K^* = 2.438$$

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

16 Giugno 2008 - Domande Teoriche

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di "tipo 1" è caratterizzato da:

   ⊗ 1 polo nullo;
   ◯ 1 polo a parte reale negativa;
   ◯ grado relativo $n - m = 1$.

2. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\dddot{y}(t) + 3\,\ddot{y}(t) + 4\,\dot{y}(t) + 5\,y(t) = \dot{x}(t) + 2\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1\,s + 2}{s^3 + 3\,s^2 + 4\,s + 5}$$

3. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3° grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:

   ⊗ ha almeno una radice a parte reale negativa
   ⊗ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva
   ◯ ha solo una radice a parte reale positiva
   ⊗ ha almeno una radice a parte reale positiva

4. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $\delta > 1$ è caratterizzato da:

   ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   ◯ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   ⊗ due poli reali distinti a parte reale negativa;
   ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva.

5. La "costante di velocità" K_v di una funzione di trasferimento $G(s)$ è definita come:

   ◯ $K_v = \lim_{s\to 0} s^2\, G(s)$;
   ⊗ $K_v = \lim_{s\to 0} s\, G(s)$;
   ◯ $K_v = \lim_{s\to \infty} s^2\, G(s)$.

6. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati con pulsazione naturale costante è formato da:

   ⊗ una circonferenza centrata nell'origine;
   ◯ due semirette uscenti dall'origine;
   ◯ una retta parallela all'asse immaginario;
   ◯ due rette parallele all'asse reale.

7. La funzione complessa $X(s) = \frac{(s+4)^2}{s(2s+8)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{4}$ per $t \to \infty$;
   ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{2}$ per $t \to \infty$;
   ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a ∞ per $t \to 0$;
   ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{4}$ per $t \to 0$.

8. Il diagramma di Nyquist completo della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s+2}{s(s+4)}$:

   ◯ è una circonferenza percorsa in senso orario;

   ◯ è una circonferenza percorsa in senso antiorario;

   ⊗ presenta un asintoto verticale;

   ⊗ si evolve tutta nel semipiano positivo.

9. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{2}{s^2+4\,s+6}$;

$$T_a = \frac{3}{2}$$

10. La banda passante di sistema retroazionato con guadagno d'anello $G_a(s)$ è determinata da l'intervallo di frequenze percui:

    ◯ $|G_a(j\omega)| >> 1$;

    ⊗ $|G_a(j\omega)| \geq 1$;

    ◯ $\angle G_a(j\omega) > \frac{\pi}{2}$;

    ◯ $\angle G_a(j\omega) \leq \frac{\pi}{2}$.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    ⊗ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$;

    ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;

    ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;

    ⊗ una pendenza di $-60\,db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Il diagramma di Nyquist di un sistema di tipo 2:

    ◯ è chiuso all'infinito da una semicirconferenza percorsa un senso orario;

    ◯ è chiuso all'infinito da una semicirconferenza percorsa un senso antiorario;

    ⊗ è chiuso all'infinito da una circonferenza percorsa un senso orario;

    ◯ è chiuso all'infinito da una circonferenza percorsa un senso antiorario.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il luogo delle radici:

    ◯ ha un numero di asintoti pari al tipo del sistema;

    ◯ ha tanti rami quanti sono gli zeri del sistema;

    ⊗ è simmetrico rispetto all'asse reale;

    ⊗ può avere rami che tendono all'origine del piano complesso.

14. Un problema di contorno delle radici può essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici:

    ◯ sempre;

    ◯ per sistemi con grado relativo ≥ 2;

    ⊗ se il parametro variabile entra linearmente nell'equazione caratteristica.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

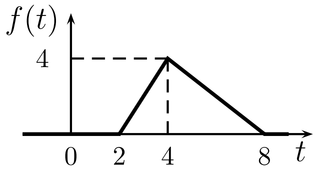
16 Giugno 2008 - Esercizi

Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

$$x_1(t) = 5\, e^{-2\,t}\, \cos(3\,t), \qquad x_2(t) = 3\,t^2\, e^{(-t+2)} + 6\, \sin(2\,t-4),$$



Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{5\,(s+2)}{(s+2)^2+9}, \qquad X_2(s) = \frac{6\,e^2}{(s+1)^3} + \frac{12\,e^{-2s}}{s^2+4}, \qquad X_3(s) = \frac{2\,e^{-2s}}{s^2} - \frac{3\,e^{-4\,s}}{s^2} + \frac{e^{-8\,s}}{s^2}$$

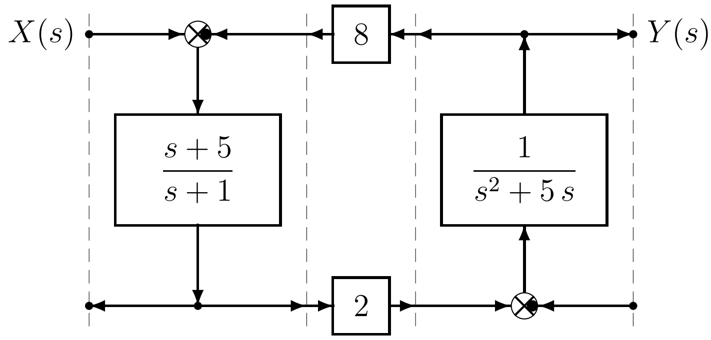
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{5}{(s+4)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{(2\,s-3)^2}{(s-2)\,(s+4)\,(s+1)}, \qquad G_3(s) = \frac{(s+2)^2}{(s-1)\,(s+3)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{5}{2}\,t^2\,e^{-4\,t}, \qquad g_2(t) = \frac{1}{18}\,e^{2\,t} + \frac{121}{18}\,e^{-4\,t} - \frac{25}{9}\,e^{-t}, \qquad g_3(t) = \frac{9}{16}\,e^{t} + \frac{7}{16}\,e^{-3\,t} - \frac{1}{4}\,t\,e^{-3\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

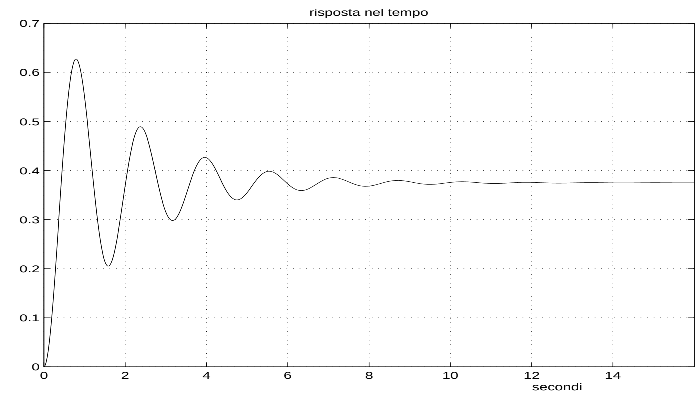
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s^2+s+16}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

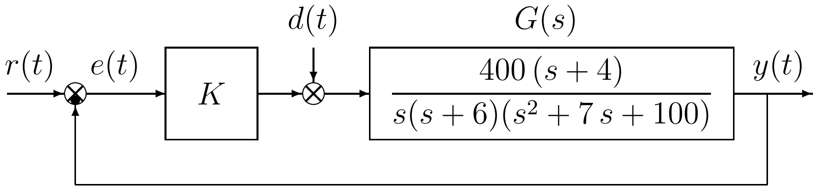
1) $\sigma = -0.5$ 3) $\omega_n = 4$ 5) $K_0 = 0.125$

2) ω =3.97   4) $\delta = 0.125$ 6) $T_a = 6$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 3$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+\frac{400K(s+4)}{s\,(s+6)\,(s^2+7\,s+100)}=0 \qquad \rightarrow \qquad s^4+13\,s^3+142\,s^2+(600+400K)\,s+1600K=0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 142 & 1600K \\
3 & 13 & 600+400K & \\
2 & 1246-400K & 20800K & \\
1 & -160000K^2-12000K+747600 & & \\
0 & 20800K & &
\end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K>0, \qquad\qquad K<2.124$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^*=87.96$ è:

$$\omega^*=\sqrt{\frac{600+400K^*}{13}}=10.56$$

d.2) Posto $r(t)=0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t)=d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty=0.5\,d_0$.

Soluzione: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t)=d_0$ è

$$y_\infty=\frac{G(0)\,d_0}{1+K\,G(0)}=\frac{d_0}{K}=0.5\,d_0$$

Il sistema $G(s)$ è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico è infinito $G(0)=\infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K=2$.

d.3) Posto $d(t)=0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t)=6\,t$.

Soluzione: L'errore a regime $e_\infty=\frac{6}{K_v}$ con $K_v=\frac{16\,K}{6}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty=\frac{9}{4\,K}.$$

d.4) Posto $K=1$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

Soluzione: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega\in[0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a=0.036$.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^*=-\frac{1}{K^*}=0.47$$

Il corrispondente valore di ω^* è 10.56 mentre il margine di ampiezza è $M_a=\frac{1}{|\sigma^*|}=2.124$.

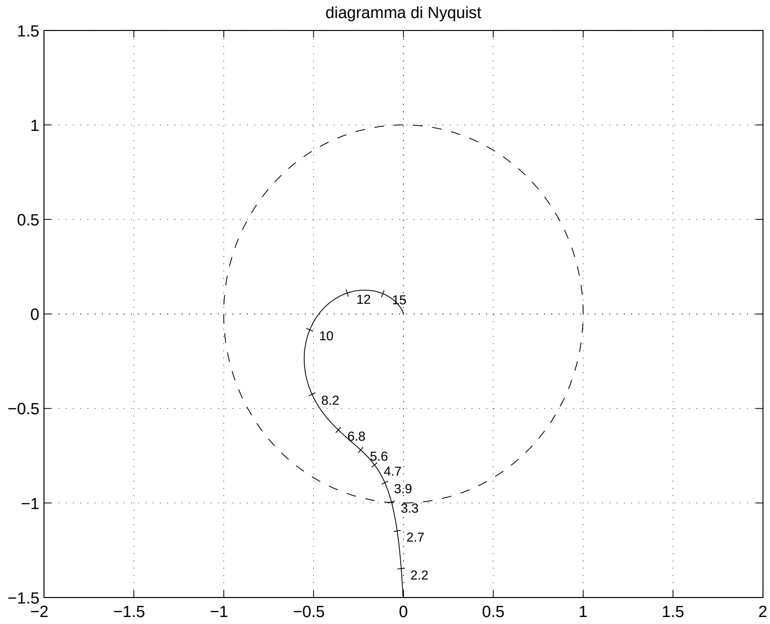
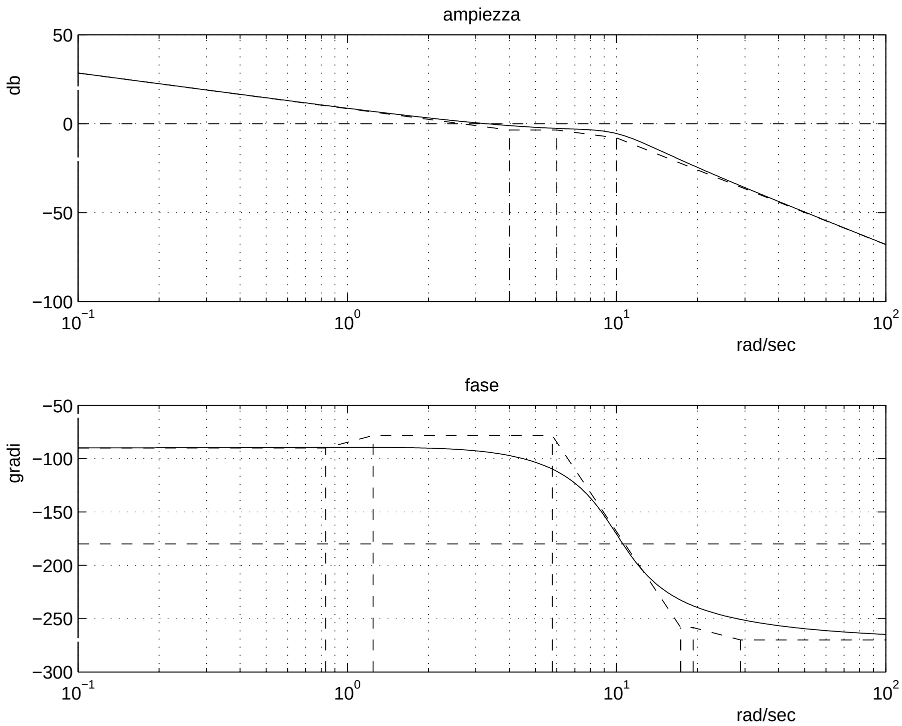


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 1$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;
Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 3\,rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 2 + 5\,\cos(0.01\,t)$.
Soluzione: Essendo il sistema retroazionato di tipo passa-basso ed essendo la pulsazione del segnale di ingresso $\omega_r << \omega_T$, con buona approssimazione l'uscita risulta uguale al segnale d'ingresso, percui $y(t) = 2 + 5\,\cos(0.01\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

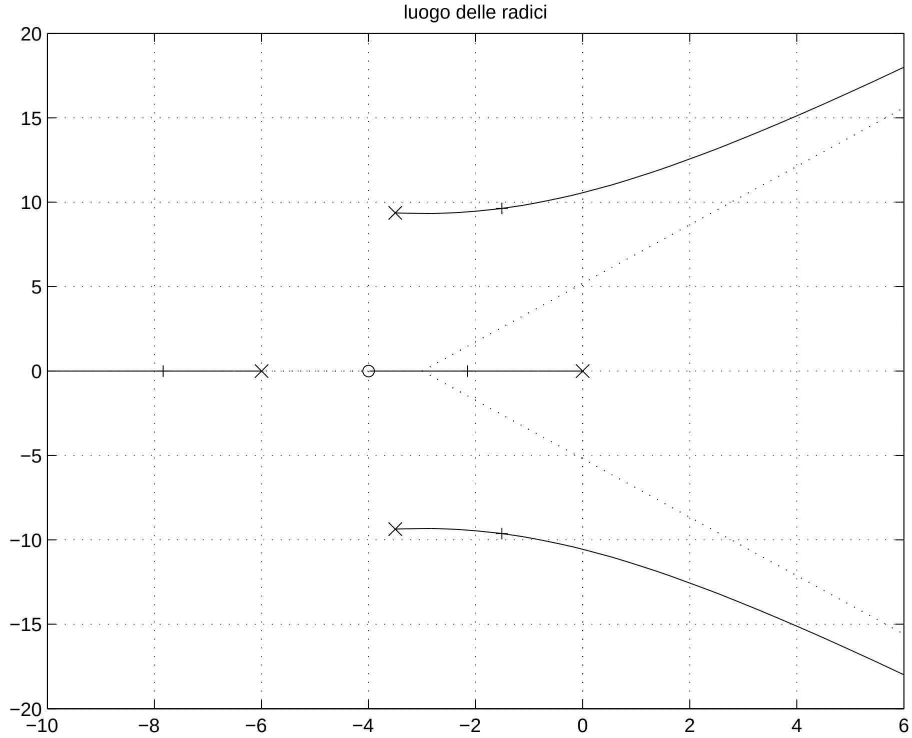


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione:

$$\sigma = -3$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 10.56\, i$$
$$K^* = 2.124$$

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

16 Giugno 2008 - Domande Teoriche

Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di "tipo 1" è caratterizzato da:

   ○ grado relativo $n - m = 1$;
   ○ 1 polo a parte reale negativa;
   ⊗ 1 polo nullo.

2. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$5\,\dddot{x}(t) + 4\,\ddot{x}(t) + 3\,\dot{x}(t) + 2\,x(t) = \dot{u}(t) + 2\,u(t) \quad \rightarrow \quad G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{5\,s^3 + 4\,s^2 + 3\,s + 2}$$

3. Se gli elementi della prima colonna della tabella di Routh di una equazione caratteristica di 3° grado ha tutti gli elementi positivi tranne uno che è negativo, ne segue che l'equazione caratteristica:

   ○ ha solo una radice a parte reale positiva
   ⊗ ha almeno una radice a parte reale positiva
   ⊗ ha almeno una radice a parte reale negativa
   ⊗ può avere una coppia di radici complesse coniugate a parte reale positiva

4. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $\delta > 1$ è caratterizzato da:

   ○ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   ○ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   ○ due poli reali distinti a parte reale positiva;
   ⊗ due poli reali distinti a parte reale negativa.

5. La "costante di velocità" K_v di una funzione di trasferimento $G(s)$ è definita come:

   ○ $K_v = \lim_{s\to\infty} s^2\, G(s)$;
   ⊗ $K_v = \lim_{s\to 0} s\, G(s)$;
   ○ $K_v = \lim_{s\to 0} s^2\, G(s)$.

6. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati con pulsazione naturale costante è formato da:

   ○ una retta parallela all'asse immaginario;
   ○ due rette parallele all'asse reale;
   ○ due semirette uscenti dall'origine;
   ⊗ una circonferenza centrata nell'origine.

7. La funzione complessa $X(s) = \frac{(s+6)^2}{s(3s+9)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   ○ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{2}{3}$ per $t \to \infty$;
   ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{4}{9}$ per $t \to \infty$;
   ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{9}$ per $t \to 0$;
   ○ di un segnale $x(t)$ che tende a ∞ per $t \to 0$.

8. Il diagramma di Nyquist completo della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s+4}{s(s+8)}$:

   - $\otimes$ si evolve tutta nel semipiano positivo;
   - $\otimes$ presenta un asintoto verticale;
   - $\bigcirc$ è una circonferenza percorsa in senso antiorario;
   - $\bigcirc$ è una circonferenza percorsa in senso orario.

9. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{3}{s^2+8\,s+9}$;

$$T_a = \frac{3}{4}$$

10. La banda passante di sistema retroazionato con guadagno d'anello $G_a(s)$ è determinata da l'intervallo di frequenze percui:

    - $\otimes$ $|G_a(j\omega)| \geq 1$;
    - $\bigcirc$ $|G_a(j\omega)| >> 1$;
    - $\bigcirc$ $\angle G_a(j\omega) > \frac{\pi}{2}$;
    - $\bigcirc$ $\angle G_a(j\omega) \leq \frac{\pi}{2}$.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    - $\otimes$ una pendenza di $-60\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    - $\bigcirc$ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    - $\bigcirc$ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - $\otimes$ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$.

12. Il diagramma di Nyquist di un sistema di tipo 2:

    - $\otimes$ è chiuso all'infinito da una circonferenza percorsa un senso orario;
    - $\bigcirc$ è chiuso all'infinito da una circonferenza percorsa un senso antiorario;
    - $\bigcirc$ è chiuso all'infinito da una semicirconferenza percorsa un senso orario;
    - $\bigcirc$ è chiuso all'infinito da una semicirconferenza percorsa un senso antiorario.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il luogo delle radici:

    - $\otimes$ è simmetrico rispetto all'asse reale;
    - $\otimes$ può avere rami che tendono all'origine del piano complesso;
    - $\bigcirc$ ha un numero di asintoti pari al tipo del sistema;
    - $\bigcirc$ ha tanti rami quanti sono gli zeri del sistema.

14. Un problema di contorno delle radici può essere ricondotto ad un problema di luogo delle radici:

    - $\otimes$ se il parametro variabile entra linearmente nell'equazione caratteristica;
    - $\bigcirc$ per sistemi con grado relativo ≥ 2;
    - $\bigcirc$ sempre.