Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

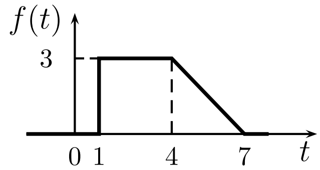
1 Aprile 2008 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

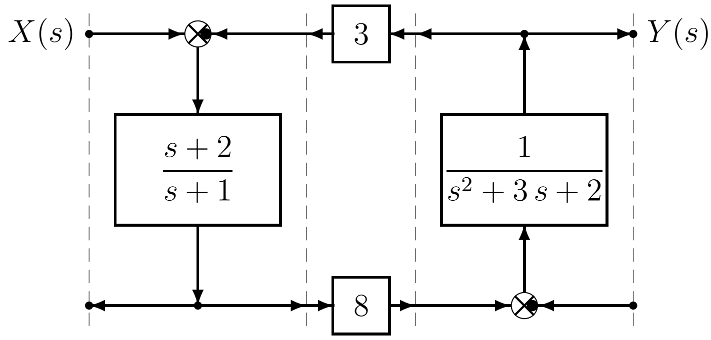
$$x_1(t) = t^3\, e^{(-2\,t+4)} + 5\,\cos(3\,t - 6), \qquad x_2(t) = 5\,e^{-2\,t}\,\sin(3\,t),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+3)\,(s-4)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{5}{(s-2)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+4)\,(s-5)\,(s+6)}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

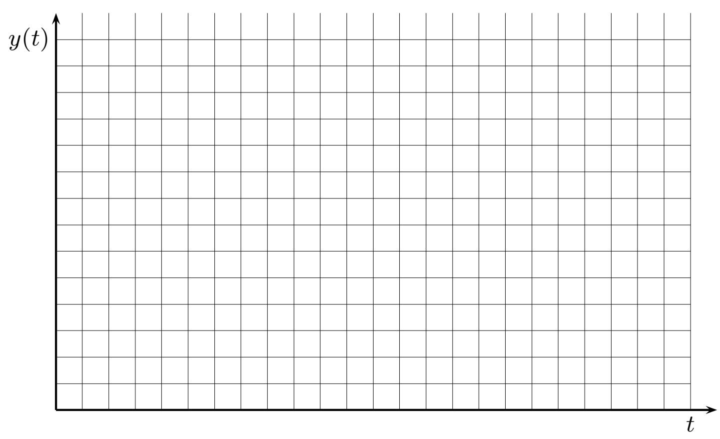
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

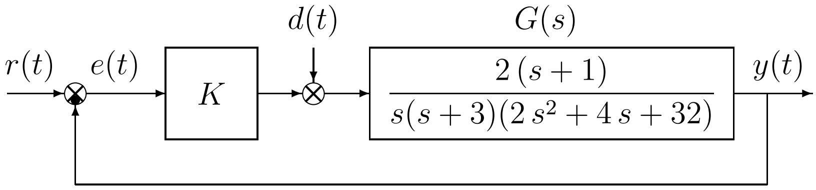
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 2$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

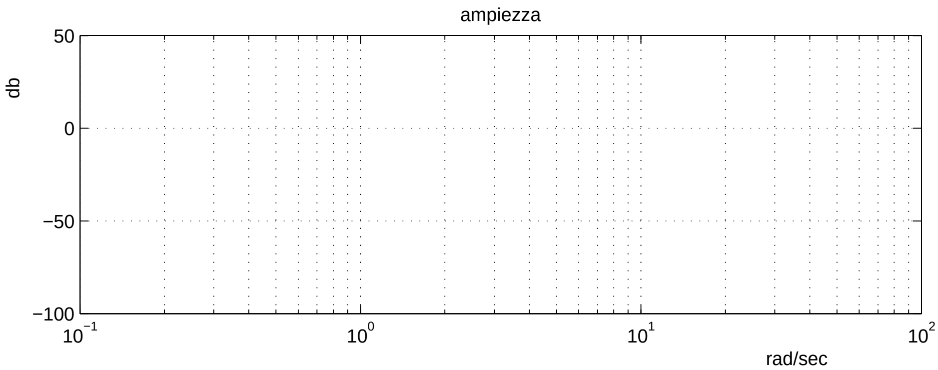
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.3\,d_0$.

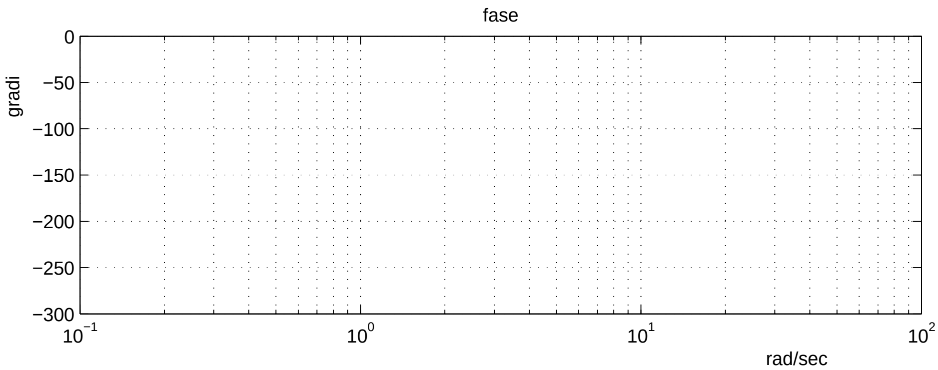
d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 2\,t$.

d.4) Posto $K = 10$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 10$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;





e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 3 + 4\,\cos(0.02\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08
1 Aprile 2008 - Domande Teoriche
Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di "tipo 2" è caratterizzato da:
   - ○ 2 poli nulli;
   - ○ 2 poli complessi coniugati;
   - ○ grado relativo $n - m = 2$.

2. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $0 < \delta < 1$ è caratterizzato da:
   - ○ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ○ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ○ due poli reali distinti a parte reale negativa;
   - ○ due poli reali distinti a parte reale positiva.

3. Il guadagno d'anello $G_a(s)$ di un sistema dinamico lineare presenta un polo a parte reale positiva. Il sistema chiuso in retroazione risulta stabile se il diagramma di Nyquist completo di $G_a(s)$:
   - ○ passa per il punto $-1 + j0$;
   - ○ circonda una volta in senso orario il punto $-1 + j0$;
   - ○ circonda una volta in senso antiorario il punto $-1 + j0$;
   - ○ non circonda ne passa per il punto $-1 + j0$.

4. La "costante di accelerazione" K_a di una funzione di trasferimento $G(s)$ è definita come:
   - ○ $K_a = \lim_{s\to 0} s^2\, G(s)$;
   - ○ $K_a = \lim_{s\to 0} s\, G(s)$;
   - ○ $K_a = \lim_{s\to \infty} s^2\, G(s)$.

5. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all'infinito:
   - ○ con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
   - ○ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   - ○ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   - ○ con una circonferenza percorsa in senso antiorario.

6. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati con tempo di assestamento costante è formato da:
   - ○ due semirette uscenti dall'origine;
   - ○ una retta parallela all'asse immaginario;
   - ○ due rette parallele all'asse reale.

7. La funzione complessa $X(s) = \frac{(s+2)^3}{s(s+4)^2}$ è la trasformata di Laplace:
   - ○ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{2}$ per $t \to \infty$;
   - ○ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{3}$ per $t \to \infty$;
   - ○ di un segnale $x(t)$ che tende a ∞ per $t \to 0$.

8. Il diagramma di Nyquist completo della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s+2}{s+4}$:
   - ◯ è una circonferenza percorsa in senso orario;
   - ◯ è una circonferenza percorsa in senso antiorario;
   - ◯ presenta un asintoto verticale;
   - ◯ si evolve tutta nel semipiano positivo.

9. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s+6}$;

$$T_a =$$

10. Sia $G(s)$ una funzione razionale fratta in s. La scomposizione in fratti semplici della funzione $G(s)$ mediante il metodo dei residui:
    - ◯ è sempre possibile;
    - ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è impropria;
    - ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è propria;
    - ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è strettamente propria.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:
    - ◯ una pendenza di $-20\, db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    - ◯ una pendenza di $-60\, db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con elevato guadagno statico d'anello;
    - ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$;
    - ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$;
    - ◯ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema;
    - ◯ presenta una forte attenuazione del segnale di riferimento.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il luogo delle radici:
    - ◯ ha tanti asintoti quante sono le radici (poli e zeri) del sistema;
    - ◯ ha tanti rami quanti sono i poli del sistema;
    - ◯ è simmetrico rispetto all'asse immaginario;
    - ◯ può avere rami che tendono all'origine del piano complesso.

14. Il teorema del baricentro si applica a sistemi:
    - ◯ con grado relativo ≥ 2;
    - ◯ con due o più poli nell'origine;
    - ◯ con due o più poli reali distinti.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

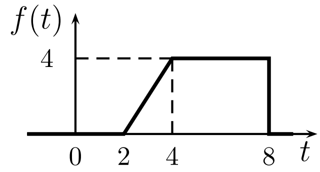
1 Aprile 2008 - Esercizi

Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:

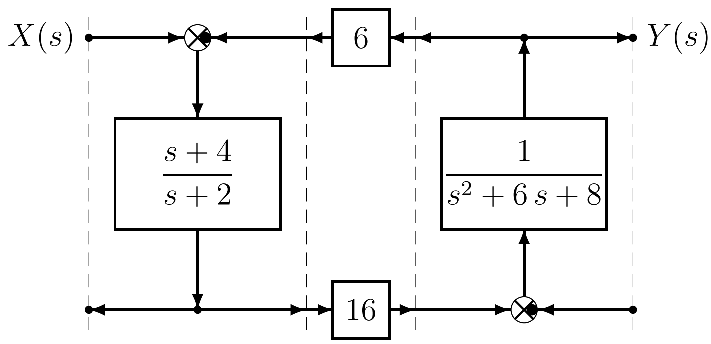
$$x_1(t) = 2\, e^{-3\,t}\, \cos(5\,t), \qquad x_2(t) = 2\,t^3\, e^{(-t+3)} + 4\, \sin(2\,t - 6),$$



b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{4}{(s+5)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{s-6}{(s-1)\,(s+2)\,(s+3)}, \qquad G_3(s) = \frac{(s+1)^2}{(s-3)\,(s+4)^2}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

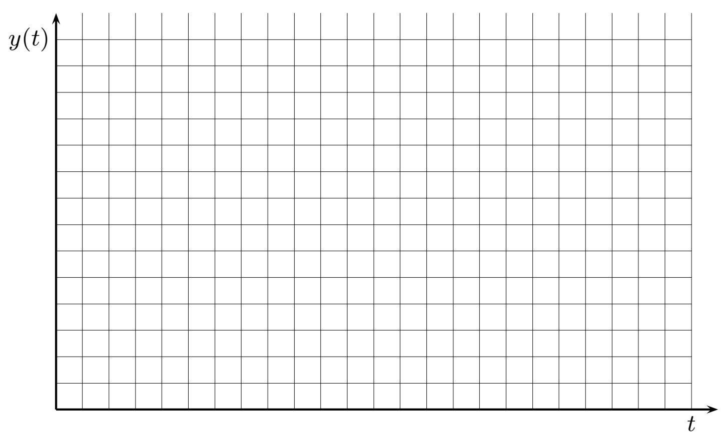
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} =$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

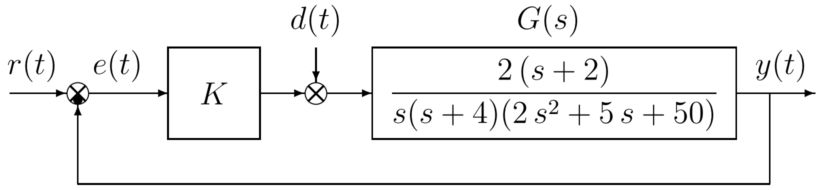
1) $\sigma = \ldots\ldots$ 3) $\omega_n = \ldots\ldots$ 5) $K_0 = \ldots\ldots$

2) $\omega = \ldots\ldots$ 4) $\delta = \ldots\ldots$ 6) $T_a = \ldots\ldots$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 3$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

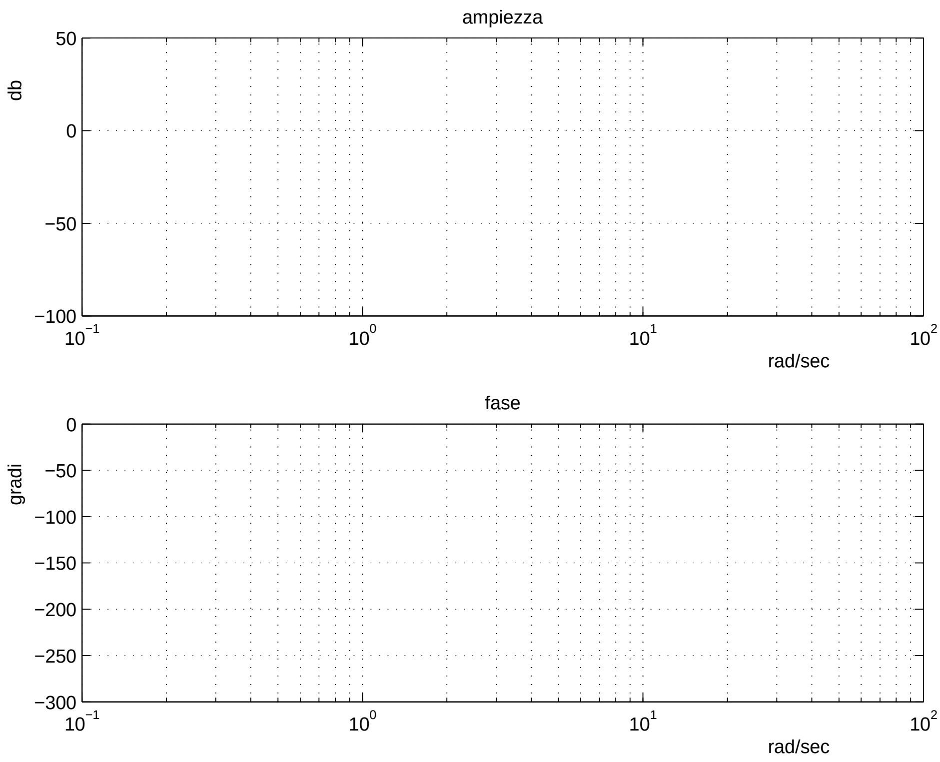
d.2) Posto $r(t) = 0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t) = d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty = 0.4\,d_0$.

d.3) Posto $d(t) = 0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t) = 3\,t$.

d.4) Posto $K = 20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 2 + 5\,\cos(0.01\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08
1 Aprile 2008 - Domande Teoriche
Compito Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di "tipo 2" è caratterizzato da:
   - ◯ grado relativo $n - m = 2$;
   - ◯ 2 poli complessi coniugati;
   - ◯ 2 poli nulli.

2. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $0 < \delta < 1$ è caratterizzato da:
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva;
   - ◯ due poli reali distinti a parte reale negativa.

3. Il guadagno d'anello $G_a(s)$ di un sistema dinamico lineare presenta un polo a parte reale positiva. Il sistema chiuso in retroazione risulta stabile se il diagramma di Nyquist completo di $G_a(s)$:
   - ◯ passa per il punto $-1 + j0$;
   - ◯ circonda una volta in senso antiorario il punto $-1 + j0$;
   - ◯ circonda una volta in senso orario il punto $-1 + j0$;
   - ◯ non circonda ne passa per il punto $-1 + j0$.

4. La "costante di accelerazione" K_a di una funzione di trasferimento $G(s)$ è definita come:
   - ◯ $K_a = \lim_{s\to\infty} s^2\, G(s)$;
   - ◯ $K_a = \lim_{s\to 0} s\, G(s)$;
   - ◯ $K_a = \lim_{s\to 0} s^2\, G(s)$.

5. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all'infinito:
   - ◯ con una circonferenza percorsa in senso antiorario;
   - ◯ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   - ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   - ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso orario.

6. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati con tempo di assestamento costante è formato da:
   - ◯ una retta parallela all'asse immaginario;
   - ◯ due rette parallele all'asse reale.
   - ◯ due semirette uscenti dall'origine;

7. La funzione complessa $X(s) = \frac{(s+3)^3}{s(s+9)^2}$ è la trasformata di Laplace:
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{2}$ per $t \to \infty$;
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{3}$ per $t \to \infty$;
   - ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a ∞ per $t \to 0$.

8. Il diagramma di Nyquist completo della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s+4}{s+2}$:

   ◯ è una circonferenza percorsa in senso antiorario;
   ◯ è una circonferenza percorsa in senso orario;
   ◯ si evolve tutta nel semipiano positivo;
   ◯ presenta un asintoto verticale.

9. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s+9}$;

$$T_a =$$

10. Sia $G(s)$ una funzione razionale fratta in s. La scomposizione in fratti semplici della funzione $G(s)$ mediante il metodo dei residui:

    ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è strettamente propria;
    ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è propria;
    ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è impropria;
    ◯ è sempre possibile.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    ◯ una pendenza di $-60\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$.

12. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con elevato guadagno statico d'anello;

    ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$;
    ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$;
    ◯ presenta una forte attenuazione del segnale di riferimento;
    ◯ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il luogo delle radici:

    ◯ può avere rami che tendono all'origine del piano complesso;
    ◯ ha tanti rami quanti sono i poli del sistema;
    ◯ ha tanti asintoti quante sono le radici (poli e zeri) del sistema;
    ◯ è simmetrico rispetto all'asse immaginario.

14. Il teorema del baricentro si applica a sistemi:

    ◯ con due o più poli nell'origine;
    ◯ con due o più poli reali distinti;
    ◯ con grado relativo ≥ 2.

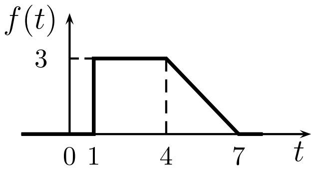
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

1 Aprile 2008 - Esercizi

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:



$$x_1(t) = t^3\, e^{(-2\,t+4)} + 5\, \cos(3\,t - 6), \qquad x_2(t) = 5\, e^{-2\,t}\, \sin(3\,t),$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{6\, e^4}{(s+2)^4} + \frac{5\, s\, e^{-2s}}{s^2+9}, \qquad X_2(s) = \frac{15}{(s+2)^2+9}, \qquad X_3(s) = \frac{1}{s}\left[3\, e^{-s} - \frac{e^{-4\,s}}{s} + \frac{e^{-7\,s}}{s}\right]$$

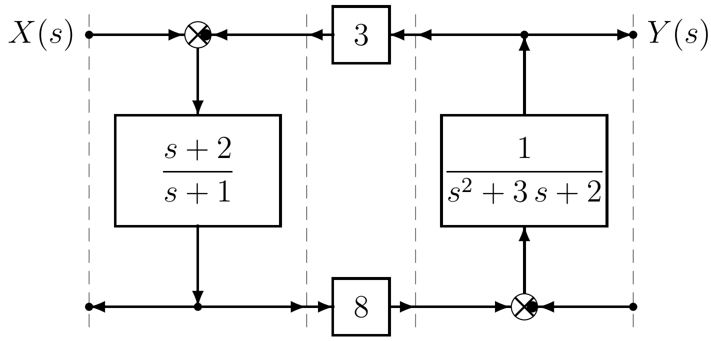
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{(s-1)^2}{(s+3)\,(s-4)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{5}{(s-2)^3}, \qquad G_3(s) = \frac{s+1}{(s+4)\,(s-5)\,(s+6)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = \frac{16}{49}\, e^{-3\,t} + \frac{33}{49}\, e^{4\,t} + \frac{9}{7}\, t\, e^{4\,t}, \qquad g_2(t) = \frac{5}{2}\, t^2\, e^{2t}, \qquad g_3(t) = \frac{1}{6}\, e^{-4\,t} + \frac{2}{33}\, e^{5\,t} - \frac{5}{22}\, e^{-6\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

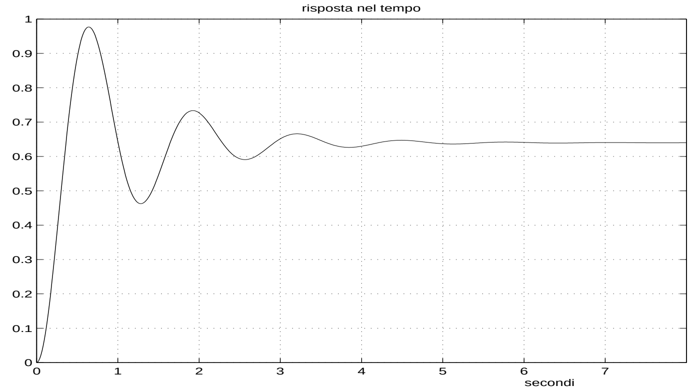
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{8}{s^2 + 2\,s + 25}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

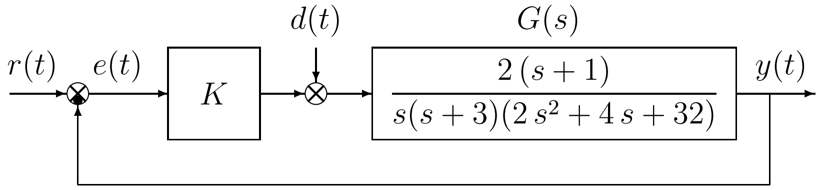
1) $\sigma = -1$ 3) $\omega_n = 5$ 5) $K_0 = 0.32$

2) ω =4.89   4) $\delta = 0.2$ 6) $T_a = 3$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 2$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+\frac{2K(s+1)}{s\,(s+3)\,(2\,s^2+4\,s+32)}=0 \qquad \rightarrow \qquad 2\,s^4+10\,s^3+44\,s^2+(96+2K)\,s+2K=0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 2 & 44 & 2K \\ 3 & 10 & (96+2K) & \\ 2 & 248-4K & 20K & \\ 1 & -8K^2-88K+23808 & & \\ 0 & 20K & & \end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K>0, \qquad\qquad K<49.33$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^*=49.33$ è:

$$\omega^*=\sqrt{\frac{96+2K^*}{10}}=4.41$$

d.2) Posto $r(t)=0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t)=d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty=0.3\,d_0$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t)=d_0$ è

$$y_\infty=\frac{G(0)\,d_0}{1+K\,G(0)}=\frac{d_0}{K}=0.3\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico è infinito $G(0)=\infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K=\frac{10}{3}$.

d.3) Posto $d(t)=0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t)=2\,t$.

<u>Soluzione</u>: L'errore a regime $e_\infty=\frac{2}{K_v}$ con $K_v=\frac{K}{48}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty=\frac{96}{K}.$$

d.4) Posto $K=10$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

<u>Soluzione</u>: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega\in[0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a=0.11$.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^*=-\frac{10}{K^*}=-\frac{10}{49.33}$$

Il corrispondente valore di ω^* è 4.41 mentre il margine di ampiezza è $M_a=\frac{1}{|\sigma^*|}=4.933$.

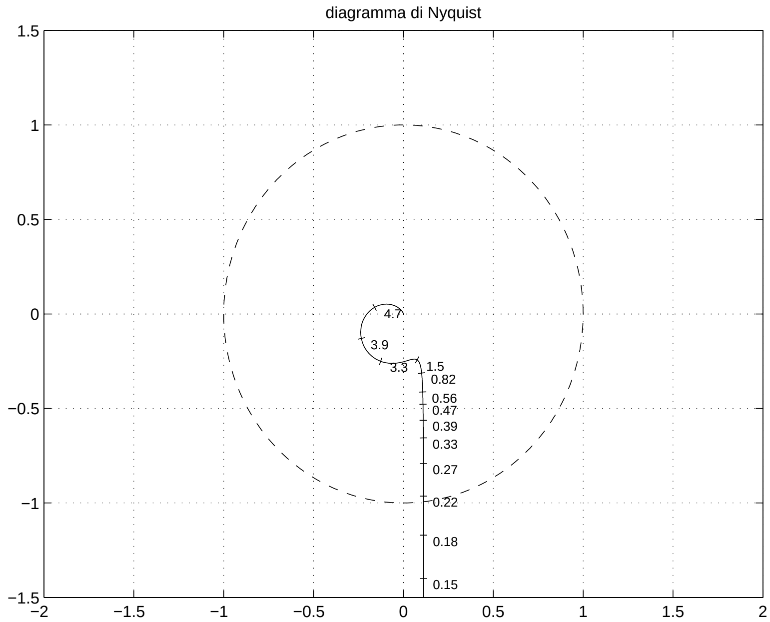
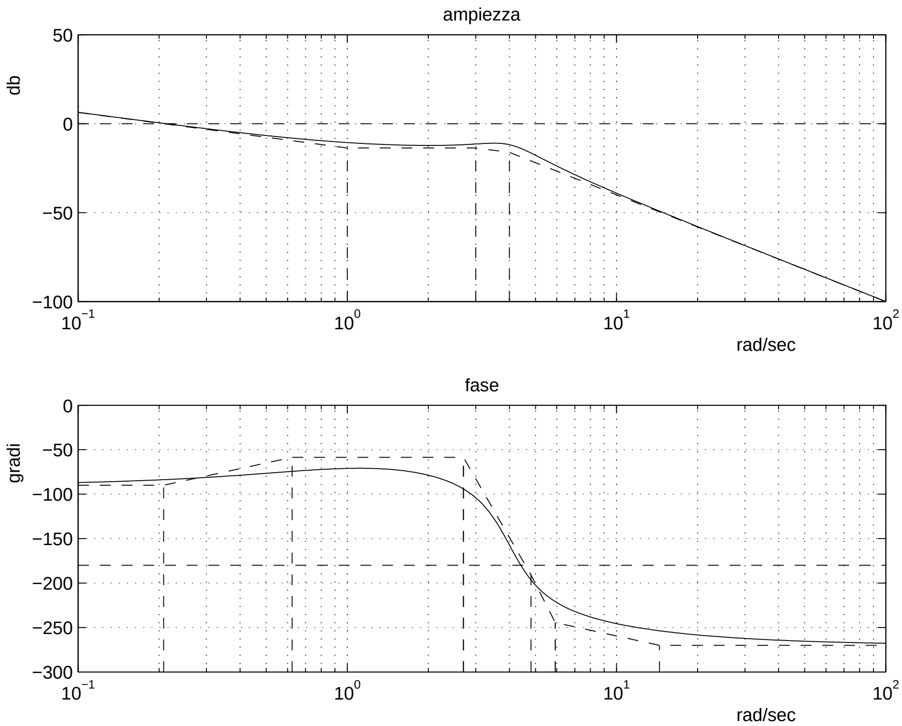


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 10$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;
Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.22\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 3 + 4\,\cos(0.02\,t)$.
Soluzione: Essendo il sistema retroazionato di tipo passa-basso ed essendo la pulsazione del segnale di ingresso $\omega_r << \omega_T$, con buona approssimazione l'uscita risulta uguale al segnale d'ingresso, percui $y(t) = 3 + 4\,\cos(0.02\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

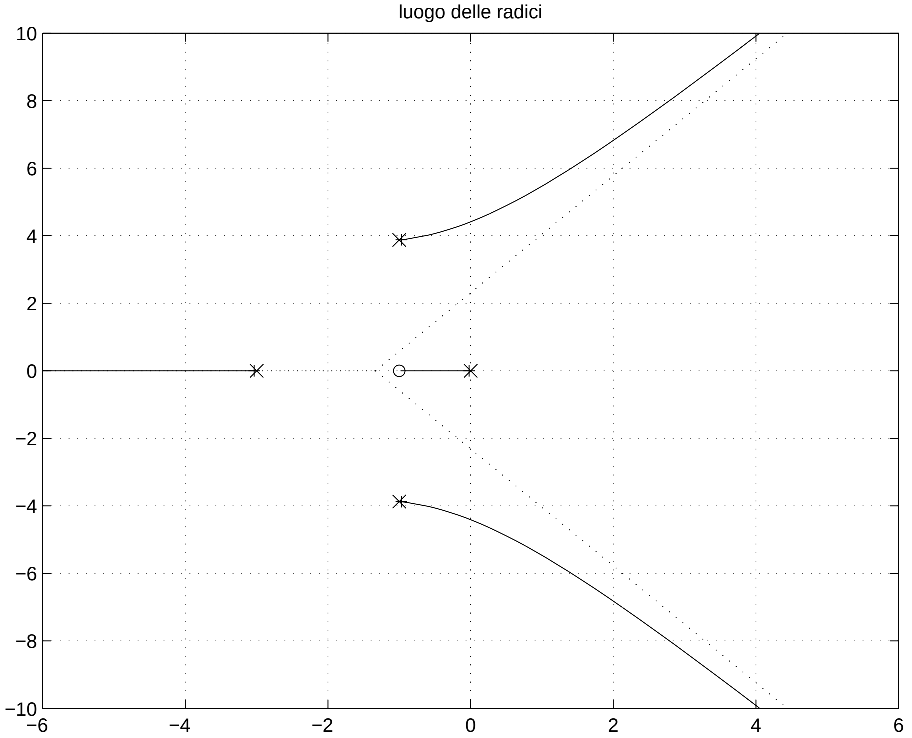


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione:

$$\sigma = -1.33$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 4.41\, i$$
$$K^* = 49.33$$

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08
1 Aprile 2008 - Domande Teoriche
Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di "tipo 2" è caratterizzato da:
   - ⊗ 2 poli nulli;
   - ○ 2 poli complessi coniugati;
   - ○ grado relativo $n - m = 2$.
2. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $0 < \delta < 1$ è caratterizzato da:
   - ○ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   - ⊗ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   - ○ due poli reali distinti a parte reale negativa;
   - ○ due poli reali distinti a parte reale positiva.
3. Il guadagno d'anello $G_a(s)$ di un sistema dinamico lineare presenta un polo a parte reale positiva. Il sistema chiuso in retroazione risulta stabile se il diagramma di Nyquist completo di $G_a(s)$:
   - ○ passa per il punto $-1 + j0$;
   - ○ circonda una volta in senso orario il punto $-1 + j0$;
   - ⊗ circonda una volta in senso antiorario il punto $-1 + j0$;
   - ○ non circonda ne passa per il punto $-1 + j0$.
4. La "costante di accelerazione" K_a di una funzione di trasferimento $G(s)$ è definita come:
   - ⊗ $K_a = \lim_{s\to 0} s^2\, G(s)$;
   - ○ $K_a = \lim_{s\to 0} s\, G(s)$;
   - ○ $K_a = \lim_{s\to \infty} s^2\, G(s)$.
5. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all'infinito:
   - ○ con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
   - ○ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   - ⊗ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   - ○ con una circonferenza percorsa in senso antiorario.
6. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati con tempo di assestamento costante è formato da:
   - ○ due semirette uscenti dall'origine;
   - ⊗ una retta parallela all'asse immaginario;
   - ○ due rette parallele all'asse reale.
7. La funzione complessa $X(s) = \frac{(s+2)^3}{s(s+4)^2}$ è la trasformata di Laplace:
   - ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{2}$ per $t \to \infty$;
   - ○ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{3}$ per $t \to \infty$;
   - ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a ∞ per $t \to 0$.

8. Il diagramma di Nyquist completo della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s+2}{s+4}$:

   $\otimes$ è una circonferenza percorsa in senso orario;

   ◯ è una circonferenza percorsa in senso antiorario;

   ◯ presenta un asintoto verticale;

   $\otimes$ si evolve tutta nel semipiano positivo.

9. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s+6}$;

$$T_a = \frac{1}{1}$$

10. Sia $G(s)$ una funzione razionale fratta in s. La scomposizione in fratti semplici della funzione $G(s)$ mediante il metodo dei residui:

    ◯ è sempre possibile;

    ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è impropria;

    ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è propria;

    $\otimes$ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è strettamente propria.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:

    ◯ una pendenza di $-20\, db/decade$ per $\omega \to 0$;

    $\otimes$ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to 0$;

    ◯ una pendenza di $-40\, db/decade$ per $\omega \to \infty$;

    $\otimes$ una pendenza di $-60\, db/decade$ per $\omega \to \infty$.

12. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con elevato guadagno statico d'anello;

    $\otimes$ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$;

    ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$;

    $\otimes$ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema;

    ◯ presenta una forte attenuazione del segnale di riferimento.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il luogo delle radici:

    ◯ ha tanti asintoti quante sono le radici (poli e zeri) del sistema;

    $\otimes$ ha tanti rami quanti sono i poli del sistema;

    ◯ è simmetrico rispetto all'asse immaginario;

    $\otimes$ può avere rami che tendono all'origine del piano complesso.

14. Il teorema del baricentro si applica a sistemi:

    $\otimes$ con grado relativo ≥ 2;

    ◯ con due o più poli nell'origine;

    ◯ con due o più poli reali distinti.

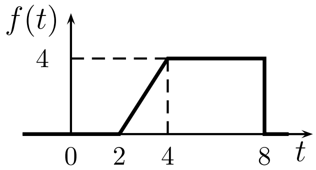
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

1 Aprile 2008 - Esercizi

Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:



$$x_1(t) = 2\,e^{-3\,t}\,\cos(5\,t), \qquad x_2(t) = 2\,t^3\,e^{(-t+3)} + 4\,\sin(2\,t-6),$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{2\,(s+3)}{(s+3)^2+25}, \qquad X_2(s) = \frac{12\,e^3}{(s+1)^4} + \frac{8\,e^{-3s}}{s^2+4}, \qquad X_3(s) = \frac{2}{s}\left[\frac{e^{-2s}}{s} - \frac{e^{-4\,s}}{s} - 2\,e^{-8\,s}\right]$$

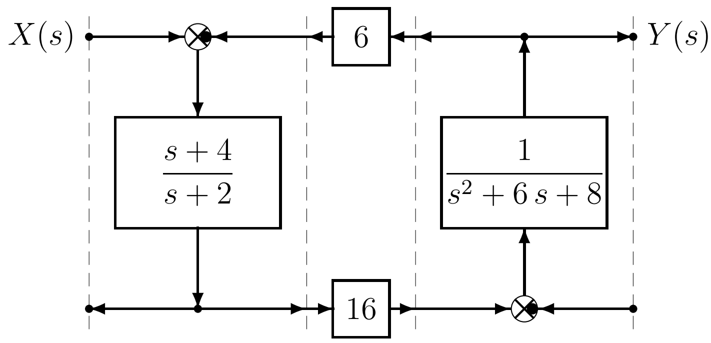
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = -\frac{4}{(s+5)^3}, \qquad G_2(s) = \frac{s-6}{(s-1)\,(s+2)\,(s+3)}, \qquad G_3(s) = \frac{(s+1)^2}{(s-3)\,(s+4)^2}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -2\,t^2\,e^{-5\,t}, \qquad g_2(t) = -\frac{5}{12}\,e^{t} + \frac{8}{3}\,e^{-2\,t} - \frac{9}{4}\,e^{-3\,t}, \qquad g_3(t) = \frac{16}{49}\,e^{3\,t} + \frac{33}{49}\,e^{-4\,t} - \frac{9}{7}\,t\,e^{-4\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



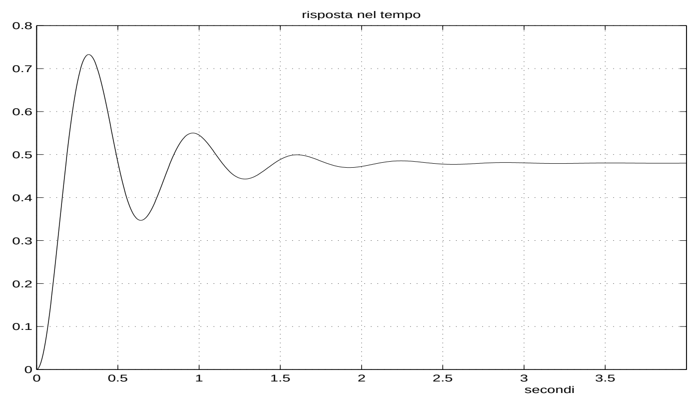
c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{16}{s^2+4\,s+100}$$

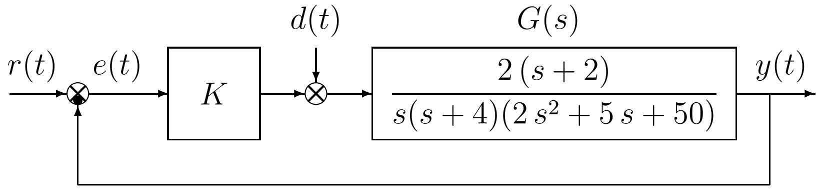
c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

1) $\sigma = -2$	3) $\omega_n = 10$	5) $K_0 = 0.16$
2) ω =9.8	4) $\delta = 0.2$	6) $T_a = 1.5$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 3$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+\frac{2K(s+2)}{s\,(s+4)\,(2\,s^2+5\,s+50)}=0 \qquad\rightarrow\qquad 2\,s^4+13\,s^3+70\,s^2+(200+2K)\,s+4K=0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 2 & 70 & 4K \\
3 & 13 & 200+2K & \\
2 & 510-4K & 52K & \\
1 & -8K^2-456K+102000 & & \\
0 & 52K & &
\end{array}$$

Dalla riga 1 e dalla riga 0 si ricavano i seguenti vincoli:

$$K>0, \qquad\qquad K<87.96$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^*=87.96$ è:

$$\omega^*=\sqrt{\frac{200+2K^*}{13}}=5.38$$

d.2) Posto $r(t)=0$, si determini il valore del parametro K tale da garantire che in presenza del disturbo costante $d(t)=d_0$, il valore a regime dell'uscita $y(t)$ sia $y_\infty=0.4\,d_0$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'uscita corrispondente all'applicazione del disturbo costante $d(t)=d_0$ è

$$y_\infty=\frac{G(0)\,d_0}{1+K\,G(0)}=\frac{d_0}{K}=0.4\,d_0$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 1 e quindi il suo guadagno statico è infinito $G(0)=\infty$. Il valore di uscita richiesto si ha per $K=\frac{5}{2}$.

d.3) Posto $d(t)=0$, calcolare, in funzione del parametro K, l'errore a regime $e_\infty(t)$ corrispondente all'applicazione del segnale di ingresso a rampa $r(t)=3\,t$.

<u>Soluzione</u>: L'errore a regime $e_\infty=\frac{3}{K_v}$ con $K_v=\frac{K}{50}$. Si ottiene quindi che:

$$e_\infty=\frac{150}{K}.$$

d.4) Posto $K=20$, disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" del guadagno d'anello $K\,G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a dell'asintoto verticale, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α. Indicare sul diagramma di Nyquist il margine di fase M_ϕ.

<u>Soluzione</u>: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega\in[0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 3.

Il sistema é di tipo 1 per cui esiste un asintoto verticale in $K_\tau\,\Delta_a=0.06$.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^*=-\frac{20}{K^*}=-\frac{20}{87.96}$$

Il corrispondente valore di ω^* è 5.38 mentre il margine di ampiezza è $M_a=\frac{1}{|\sigma^*|}=4.398$.

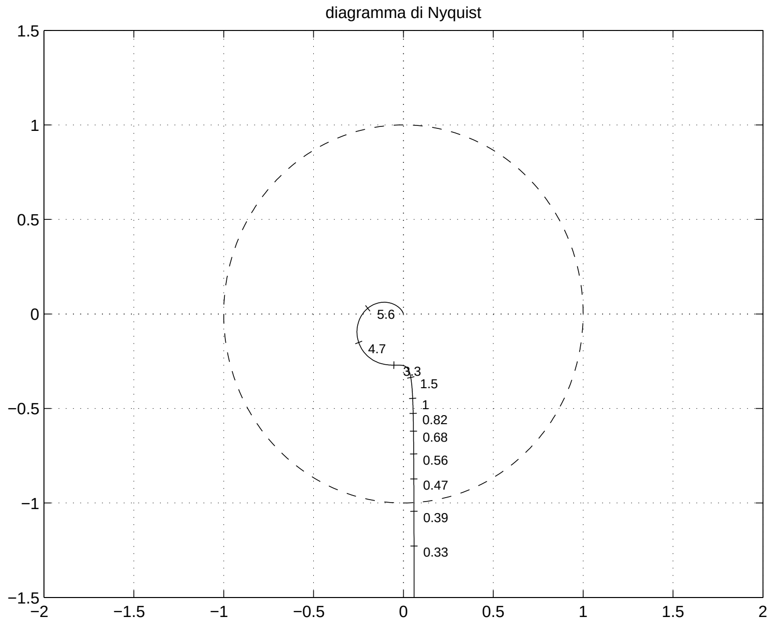
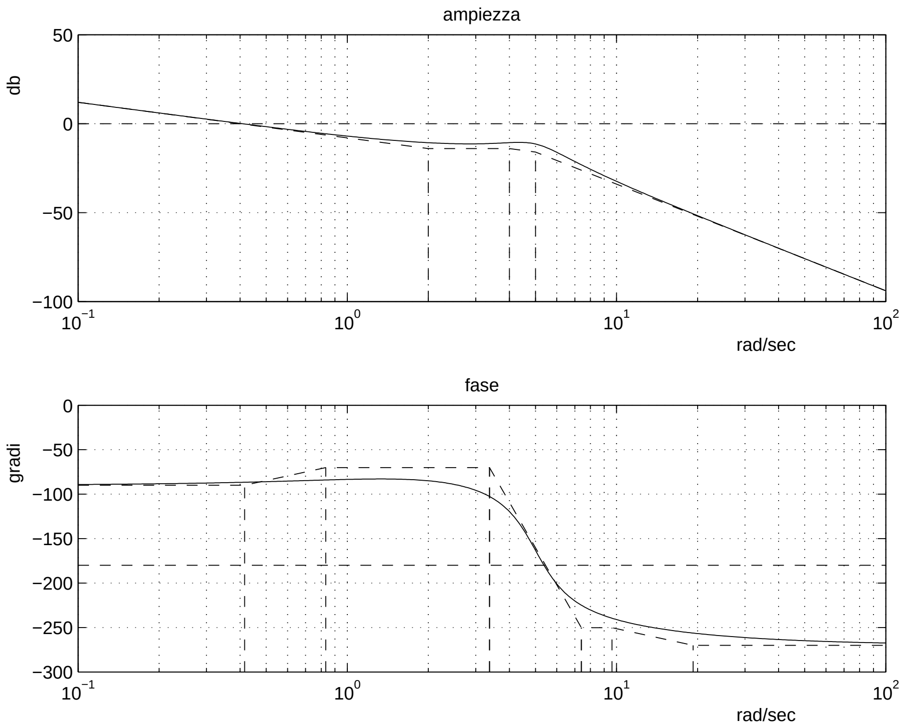


Figura 3: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

e) Si faccia riferimento al sistema retroazionato dell'esercizio precedente e si ponga $K = 20$:

e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi del guadagno di anello $K\,G(s)$;



e.2) Fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;
<u>Soluzione</u>: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 0.4\,rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 2 + 5\,\cos(0.01\,t)$.
<u>Soluzione</u>: Essendo il sistema retroazionato di tipo passa-basso ed essendo la pulsazione del segnale di ingresso $\omega_r << \omega_T$, con buona approssimazione l'uscita risulta uguale al segnale d'ingresso, percui $y(t) = 2 + 5\,\cos(0.01\,t)$.

f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Si faccia riferimento al sistema descritto nell'esercizio d):

f.1) Tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato per valori positivi del parametro K. Determinare qualitativamente i punti di diramazione. Soluzione: vedi figura 4.

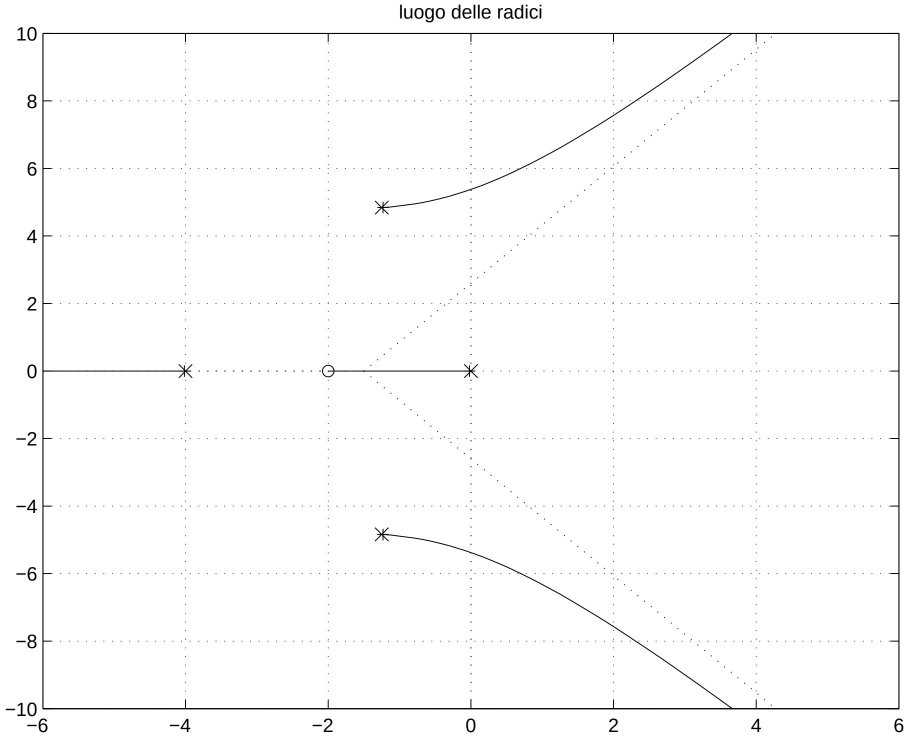


Figura 4: Luogo della radici di $G(s)$.

f.2) Determinare il centro degli asintoti, gli angoli che gli asintoti formano rispetto all'asse reale positivo, le intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del parametro K.

Soluzione:

$$\sigma = -1.5$$
$$\phi = 60,\ 180,\ 300$$
$$s^* = 5.38\, i$$
$$K^* = 87.96$$

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08
1 Aprile 2008 - Domande Teoriche
Compito B Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Un sistema di "tipo 2" è caratterizzato da:

   ◯ grado relativo $n - m = 2$;
   ◯ 2 poli complessi coniugati;
   ⊗ 2 poli nulli.

2. Un sistema del secondo ordine che presenta un coefficiente di smorzamento $0 < \delta < 1$ è caratterizzato da:

   ⊗ due poli complessi coniugati a parte reale positiva;
   ◯ due poli complessi coniugati a parte reale negativa;
   ◯ due poli reali distinti a parte reale positiva;
   ◯ due poli reali distinti a parte reale negativa.

3. Il guadagno d'anello $G_a(s)$ di un sistema dinamico lineare presenta un polo a parte reale positiva. Il sistema chiuso in retroazione risulta stabile se il diagramma di Nyquist completo di $G_a(s)$:

   ◯ passa per il punto $-1 + j0$;
   ⊗ circonda una volta in senso antiorario il punto $-1 + j0$;
   ◯ circonda una volta in senso orario il punto $-1 + j0$;
   ◯ non circonda ne passa per il punto $-1 + j0$.

4. La "costante di accelerazione" K_a di una funzione di trasferimento $G(s)$ è definita come:

   ◯ $K_a = \lim_{s\to\infty} s^2\, G(s)$;
   ◯ $K_a = \lim_{s\to 0} s\, G(s)$;
   ⊗ $K_a = \lim_{s\to 0} s^2\, G(s)$.

5. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 2 deve essere chiuso all'infinito:

   ◯ con una circonferenza percorsa in senso antiorario;
   ⊗ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   ◯ con una semicirconferenza percorsa in senso orario.

6. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati con tempo di assestamento costante è formato da:

   ⊗ una retta parallela all'asse immaginario;
   ◯ due rette parallele all'asse reale.
   ◯ due semirette uscenti dall'origine;

7. La funzione complessa $X(s) = \frac{(s+3)^3}{s(s+9)^2}$ è la trasformata di Laplace:

   ◯ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{2}$ per $t \to \infty$;
   ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a $\frac{1}{3}$ per $t \to \infty$;
   ⊗ di un segnale $x(t)$ che tende a ∞ per $t \to 0$.

8. Il diagramma di Nyquist completo della funzione di trasferimento $G(s) = \frac{s+4}{s+2}$:
   - ◯ è una circonferenza percorsa in senso antiorario;
   - ⊗ è una circonferenza percorsa in senso orario;
   - ⊗ si evolve tutta nel semipiano positivo;
   - ◯ presenta un asintoto verticale.
9. Determinare il tempo di assestamento del sistema $G(s) = \frac{1}{s+9}$;

$$T_a = \frac{2}{3}$$

10. Sia $G(s)$ una funzione razionale fratta in s. La scomposizione in fratti semplici della funzione $G(s)$ mediante il metodo dei residui:
    - ⊗ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è strettamente propria;
    - ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è propria;
    - ◯ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è impropria;
    - ◯ è sempre possibile.
11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 2 e con grado relativo 3 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle ampiezze:
    - ⊗ una pendenza di $-60\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    - ◯ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to \infty$;
    - ⊗ una pendenza di $-40\,db/decade$ per $\omega \to 0$;
    - ◯ una pendenza di $-20\,db/decade$ per $\omega \to 0$.
12. Un sistema in retroazione negativa avente $G(s)$ sul ramo diretto, $H(s)$ sul ramo di retroazione e con elevato guadagno statico d'anello;
    - ◯ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $H(s)$;
    - ⊗ è poco sensibile alle variazioni parametriche di $G(s)$;
    - ◯ presenta una forte attenuazione del segnale di riferimento;
    - ⊗ presenta una forte attenuazione dei disturbi costanti agenti sul sistema.

Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il luogo delle radici:
    - ⊗ può avere rami che tendono all'origine del piano complesso;
    - ⊗ ha tanti rami quanti sono i poli del sistema;
    - ◯ ha tanti asintoti quante sono le radici (poli e zeri) del sistema;
    - ◯ è simmetrico rispetto all'asse immaginario.
14. Il teorema del baricentro si applica a sistemi:
    - ◯ con due o più poli nell'origine;
    - ◯ con due o più poli reali distinti;
    - ⊗ con grado relativo ≥ 2.