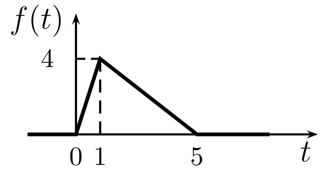
Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

04 Dicembre 2007 - Esercizi

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

a) Determinare la trasformata di Laplace $X_i(s)$ dei seguenti segnali temporali $x_i(t)$:



$$x_1(t) = \frac{t^2}{4}\, e^{-3\,t} + 5\,\cos(\pi\, t), \qquad x_2(t) = 6\, e^{(-2t+4)}\, \sin(3\,t - 6),$$

Soluzione:

$$X_1(s) = \frac{1}{2\,(s+3)^3} + \frac{5\,s}{s^2+\pi^2}, \qquad X_2(s) = \frac{18\, e^{-2s}}{(s+2)^2+9}, \qquad X_3(s) = \frac{1}{s^2}\left[4 - 5e^{-s} + e^{-5s}\right]$$

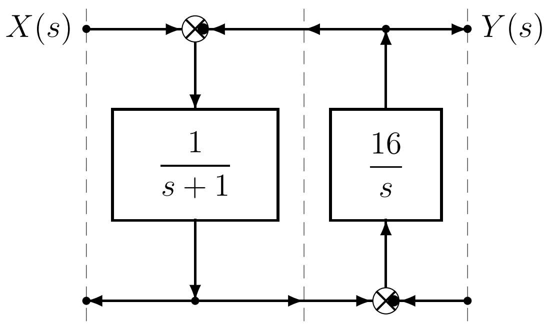
b) Calcolare la risposta impulsiva $g_i(t)$ delle seguenti funzioni di trasferimento $G_i(s)$:

$$G_1(s) = \frac{-2}{(s+3)\,(s-4)^2}, \qquad G_2(s) = \frac{7}{(s+5)^4}, \qquad G_3(s) = \frac{s-1}{(s+2)\,(s-3)\,(s+4)}$$

Soluzione:

$$g_1(t) = -\frac{2}{49}\, e^{-3\,t} + \frac{2}{49}\, e^{4\,t} - \frac{2}{7}\, t\, e^{4\,t}, \qquad g_2(t) = \frac{7}{6}\, t^3\, e^{-5t}, \qquad g_3(t) = \frac{3}{10}\, e^{-2\,t} + \frac{2}{35}\, e^{3\,t} - \frac{5}{14}\, e^{-4\,t}$$

c) Lo schema a blocchi riportato a fianco rappresenta un sistema dinamico del secondo ordine.



c.1) Utilizzando la formula di Mason, calcolare la funzione di trasferimento $G(s)$ che lega l'ingresso $X(s)$ all'uscita $Y(s)$:

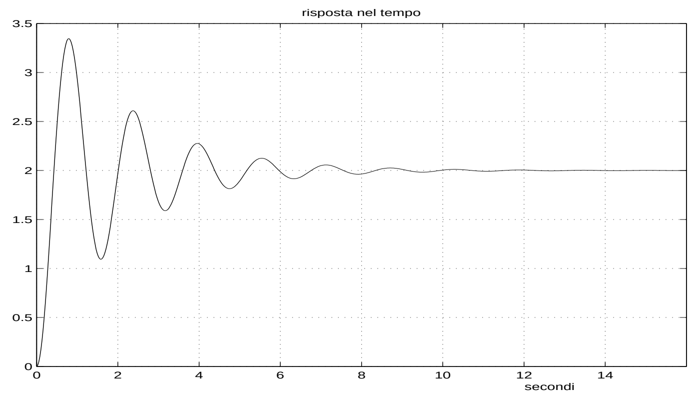
$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{16}{s^2 + 1\,s + 16}$$

c.2) Relativamente alla funzione di trasferimento $G(s)$ calcolare: 1) la parte reale σ e 2) la parte immaginaria ω dei poli dominanti del sistema; 3) la pulsazione naturale ω_n e 4) il coefficiente di smorzamento δ dei poli dominanti del sistema; 5) il guadagno statico K_0; 6) il tempo di assestamento T_a del sistema $G(s)$ alla risposta al gradino:

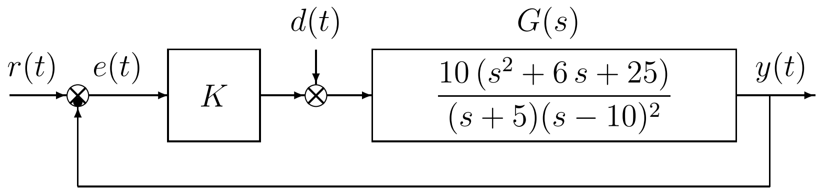
1) $\sigma = -\dfrac{1}{2}$ 3) $\omega_n = 4$ 5) $K_0 = 1$

2) $\omega = 3.96$ 4) $\delta = 0.125$ 6) $T_a = 6$

c.3) Sul disegno a quadretti riportato a fianco disegnare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ della funzione di trasferimento $G(s)$ al gradino in ingesso $x(t) = 2$.
Per quanto è possibile, disegnare l'andamento temporale in modo congruente con il valore dei parametri numerici determinati al punto c.2).



d) Sia dato il seguente sistema retroazionato:



d.1) Determinare per quali valori del parametro K il sistema retroazionato è asintoticamente stabile.

Soluzione: l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1+\frac{10K\,(s^2+6\,s+25)}{(s+5)(s-10)^2}=0 \qquad \to \qquad s^3+(10K-15)\,s^2+60K\,s+250K+500=0$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 60K \\ 2 & 10K-15 & 500+250K \\ 1 & 600K^2-1150K-500 & \\ 0 & 500+250K & \end{array}$$

Dalla riga 0 si ricava $K>-2$ mentre dalla riga 1:

$$600K^2-1150K-500>0 \to K_{1,2}=\frac{115\pm\sqrt{13225+12000}}{120} \to K_1=2.282, \quad K_2=-0.365$$

da cui: $K<-0.365$, $K>2.282$.

Dalla riga 2 si ottiene $K>1.5$.

Considerando i valori ammissibili di K ricavati dalle righe 0, 1 e 2, si ottiene che il sistema risulta asintoticamente stabile per:

$$K>K^*=2.282$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite $K^*=2.282$ è:

$$\omega^*=\sqrt{60K^*}=11.75$$

d.2) Determinare per quale valore positivo del parametro K si ha un errore a regime $|e_\infty(t)|<0.1$ quando sul sistema agiscono contemporaneamente il disturbo costante $d(t)=3$ e il riferimento costante $r(t)=2$.

<u>Soluzione</u>: Il valore a regime dell'errore è:

$$e_\infty=\frac{r+G(0)d}{1+K\,G(0)}<0.1$$

Il sistema $G(s)$è di tipo 0, ed il suo guadagno statico vale $G(0)=\frac{1}{2}$. Sostituendo i valori numerici si ottiene che il valore di K minimo che garantisce l'errore a regime richiesto è $K=68$.

d.3) Disegnare qualitativamente il diagramma di Nyquist "completo" della funzione di trasferimento $G(s)$. Calcolare esattamente la posizione σ_a degli eventuali asintoti, le eventuali intersezioni σ_i^* con l'asse reale e i corrispondenti valori delle pulsazioni ω_i^*. Determinare inoltre il margine di ampiezza M_α.

<u>Soluzione</u>: Il diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega\in[0,\ \infty]$ è mostrato in Fig. 1.

Il sistema é di tipo 0, percui non esiste nessun asintoto verticale.

Esiste un'unica intersezione σ^* con l'asse reale. Tale intersezione si determina facilmente dall'analisi di Routh svolta al punto d.1:

$$\sigma^*=-\frac{1}{K^*}=-0.435$$

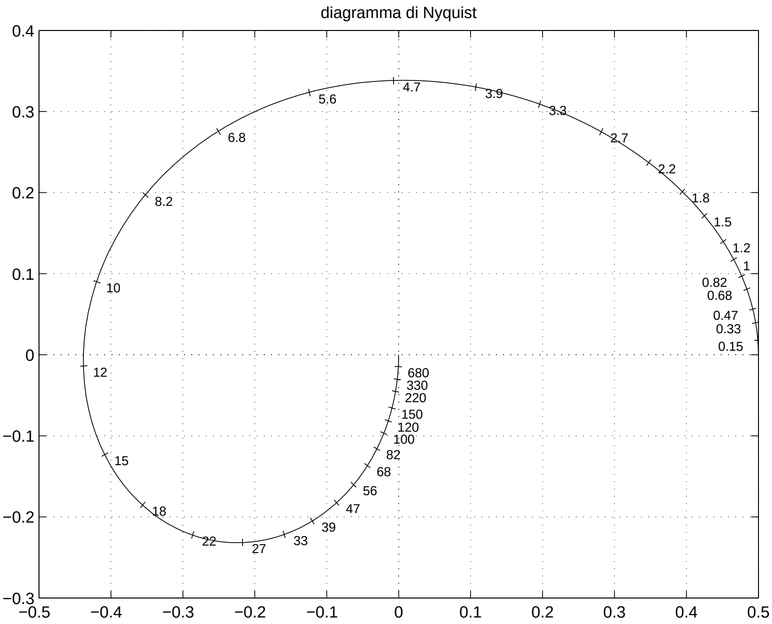


Figura 1: Diagramma di Nyquist della funzione $G(s)$ per $\omega \in [0,\ \infty]$.

Il corrispondente valore di ω^* è 11.75 mentre il margine di ampiezza è $M_a = \frac{1}{|\sigma^*|} = 2.282$.

d.4) In base al criterio di Nyquist, dire se il sistema $G(s)$ posto in retroazione negativa unitaria è stabile o instabile e spiegarne la motivazione.

Soluzione: Per $K < K^*$ il diagramma di Nyquist non circonda il punto -1. La presenza di due poli complessi coniugati a parte reale positiva rende il sistema in retroazione instabile.

Per $K > K^*$ il diagramma di Nyquist circonda il punto -1 due volte in senso antiorario. La presenza di due poli complessi coniugati a parte reale positiva rende il sistema in retroazione asintoticamente stabile.

Quindi è possibile affermare che il sistema chiuso in retroazione unitaria è instabile.

e) Con riferimento alla funzione di trasferimento $G(s)$ dell'esercizio precedente, si risponda alle seguenti domande:

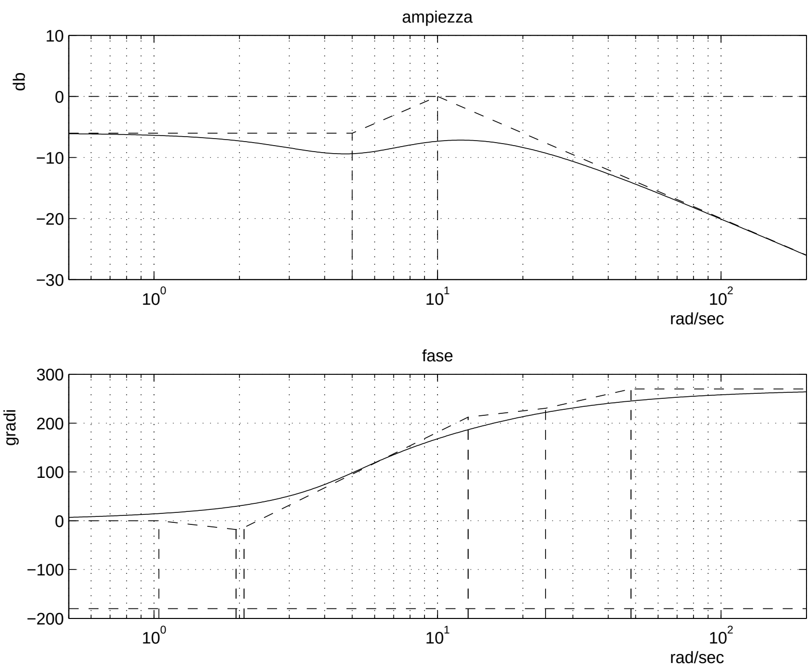
e.1) Tracciare qualitativamente i diagrammi di Bode delle ampiezze e della fasi della funzione di trasferimento $G(s)$;

e.2) Posto $K = 10$, fornire una stima della larghezza di banda del sistema retroazionato;

Soluzione: La banda passante del sistema può essere determinata dal punto di incrocio del diagramma di Bode delle ampiezze con l'asse 0 db. Una stima della banda passante del sistema è quindi $\omega_T = 100\, rad/s$.

e.3) Fornire una stima della risposta "a regime" $y_\infty(t)$ del sistema retroazionato quando il disturbo $d(t) = 0$ e in ingresso è presente il segnale $r(t) = 3 + 2\cos(5\,t)$.

Soluzione: L'uscita del sistema retroazionato risulta essere: $y(t) = 1 + 0.657\cos(5\,t + 1.4)$.



f) **Non è richiesto lo svolgimento di questo esercizio agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.**

Con riferimento al sistema descritto nell'esercizio d), tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato sia per valori positivi che per valori negativi del parametro K. Determinare esattamente i punti di intersezione con l'asse immaginario. Individuare solo qualitativamente la posizione degli eventuali punti di diramazione sull'asse reale.

Soluzione: vedi figure 5 e 6.

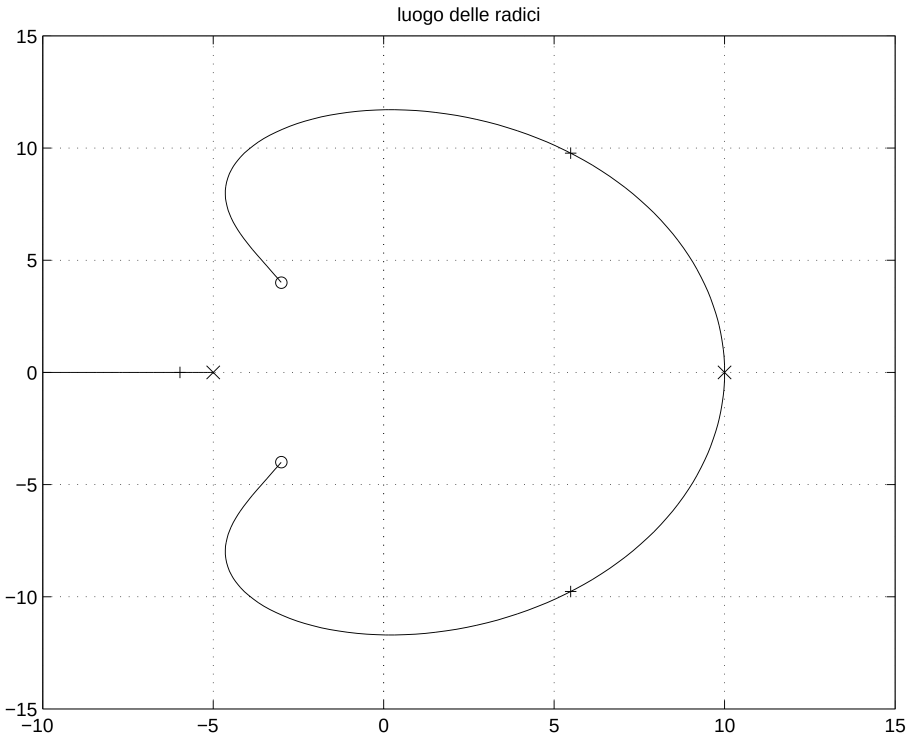


Figura 2: Luogo della radici di $G(s)$ per $K > 0$.

I punti di intersezione con l'asse immaginario si ricavano dall'analisi fatta con la tabella di Routh fatta al punto d.1) e corrispondono ai punti $\pm j11.75$. I punti diramazione sull'asse reale si verificano in corrispondenza di radici multiple, quindi nel punto 10 per $K = 0$ e nel punto -1.774 per $K = 2.555$.

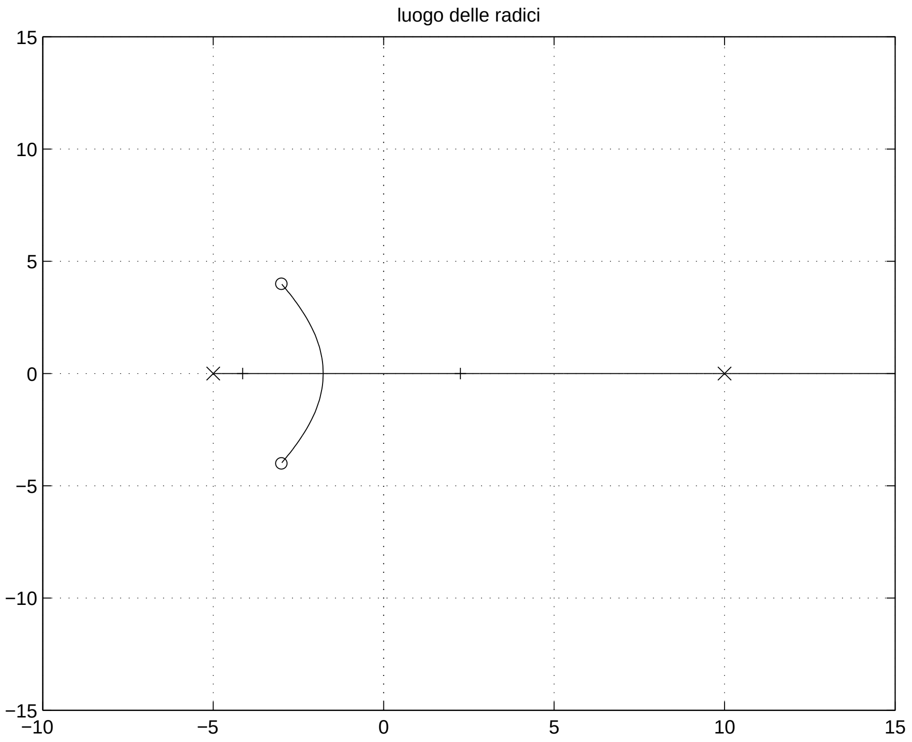


Figura 3: Luogo della radici di $G(s)$ per $K < 0$.

Fondamenti di Controlli Automatici - A.A. 2007/08

04 Dicembre 2007 - Domande Teoriche

Compito A Nr.

Nome:	
Nr. Mat.	
Firma:	

Per ciascuno dei test a soluzione multipla segnare con una crocetta tutte le affermazioni che si ritengono giuste.

1. Per $\omega \in [-\infty, \infty]$, il diagramma di Nyquist "completo" di un sistema $G(s)$ di tipo 1 deve essere chiuso all'infinito:

   ⊗ con una semicirconferenza percorsa in senso orario;
   ○ con una semicirconferenza percorsa in senso antiorario;
   ○ con una circonferenza percorsa in senso orario;
   ○ con una circonferenza percorsa in senso antiorario.

2. Un sistema lineare $G(s)$ avente solo poli semplici, tutti posizionati sull'asse immaginario è:

   ○ instabile;
   ⊗ semplicemente stabile;
   ○ stabile ingresso limitato - uscita limitata.

3. Sia $G(s)$ una funzione razionale fratta in s. La scomposizione in fratti semplici della funzione $G(s)$ mediante il metodo dei residui:

   ○ è sempre possibile;
   ○ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è propria;
   ⊗ è possibile solo se la funzione $G(s)$ è strettamente propria.

4. Scrivere la funzione di trasferimento $G(s)$ corrispondente alla seguente equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + 7\,\dot{y}(t) + 3\,y(t) = 2\,\ddot{x}(t) + 4\,\dot{x}(t) + x(t) \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2\,s^2 + 4\,s + 1}{s^2 + 7\,s + 3}$$

5. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati di sistemi del secondo ordine con tempo di assestamento costante è formato da:

   ○ due semirette uscenti dall'origine;
   ⊗ una retta parallela all'asse immaginario;
   ○ una semicirconferenza nel semipiano reale negativo centrata nell'origine;
   ○ due rette parallele all'asse reale.

6. Sia $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Vale la relazione:

   ⊗ $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s}F(s)$;
   ○ $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = \frac{1}{s^2}F(s)$;
   ○ $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau)d\tau\right] = s\,F(s)$.

7. Il luogo dei punti del piano complesso determinato da poli complessi coniugati di sistemi del secondo ordine stabili con pulsazione naturale costante è formato da:

   ○ due semirette uscenti dall'origine;
   ○ una retta parallela all'asse immaginario;
   ⊗ una semicirconferenza nel semipiano reale negativo centrata nell'origine;
   ○ due rette parallele all'asse reale.

8. Un sistema dinamico lineare è asintoticamente stabile se e solo se la sua funzione di trasferimento:

   ○ ha tutti i poli a parte reale negativa;
   ⊗ ha tutti i poli a parte reale strettamente negativa;
   ○ ha tutti i poli a parte reale positiva;
   ○ ha tutti i poli a parte reale strettamente positiva.

9. L'istante di massima sovraelongazione t_M della risposta al gradino di un sistema del secondo ordine con poli complessi coniugati è determinato da:

   ○ $t_M = \frac{\pi}{\omega\sqrt{1-\delta^2}}$;
   ⊗ $t_M = \frac{\pi}{\omega}$;
   ⊗ $t_M = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}$;
   ○ $t_M = \frac{\pi}{\omega_n}$.

10. Sia $\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $f(t)$. Il teorema del valore iniziale afferma che:

   ○ $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$;
   ○ $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} F(s)$;
   ○ $\lim_{t\to 0^-} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$;
   ⊗ $\lim_{t\to 0^+} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$.

11. Un sistema $G(s)$ a fase minima di tipo 1 e con grado relativo 2 presenta nel diagramma asintotico di Bode delle fasi:

   ○ una fase di $-\pi$ per $\omega \to 0$;
   ⊗ una fase di $-\frac{\pi}{2}$ per $\omega \to 0$;
   ⊗ una fase di $-\pi$ per $\omega \to \infty$;
   ○ una fase di $-\frac{3\pi}{2}$ per $\omega \to \infty$.

12. L'errore a regime di un sistema $G(s)$ con ingresso del tipo $u(t) = \frac{R_0}{2}t^2$ si può determinare come $e_a = \frac{R_0}{K_e}$, dove K_e vale:

   ○ $K_e = \lim_{s\to 0} G(s)$;
   ○ $K_e = \lim_{s\to 0} s\, G(s)$;
   ⊗ $K_e = \lim_{s\to 0} s^2\, G(s)$.

   Non è richiesto lo svolgimento delle seguenti domande agli iscritti ad Ingegneria Ambientale.

13. Il luogo delle radici di un generico sistema dinamico lineare gode delle seguenti proprietà:

   ⊗ è simmetrico rispetto all'asse reale;
   ○ è simmetrico rispetto all'asse immaginario;
   ○ ha un numero di asintoti pari al numero di poli del sistema;
   ⊗ ha un numero di asintoti pari al grado relativo del sistema.

14. Il teorema del baricentro del luogo delle radici si applica a sistemi dinamici lineari aventi funzione di trasferimento:

   ○ di tipo maggiore o uguale a due;
   ⊗ con grado relativo maggiore o uguale a due;
   ○ strettamente propria.