

## Diagrammi di Bode

- La funzione di risposta armonica  $F(\omega) = G(j\omega)$  è una funzione complessa nella variabile reale  $\omega$ . Pertanto fissato un valore di  $\omega = \bar{\omega}$ ,  $G(j\bar{\omega})$  è un numero complesso.
- $G(j\omega)$  è una funzione complessa nella variabile reale  $\omega$ , quindi ad ogni valore di  $\omega$  corrisponde un numero complesso dato da  $G(j\omega)$ . Per rappresentare una funzione complessa di variabile reale si seguono le rappresentazioni note per i numeri complessi:

- 1) Rappresentazione mediante parte reale e parte immaginaria, come nei *Diagrammi di Nyquist* e nei *Diagrammi di Nichols*. Ovviamente la parte reale e la parte immaginaria di  $G(j\omega)$  dipendono da  $\omega$ :

$$G(j\omega) = \text{Re}(G(j\omega)) + j\text{Im}(G(j\omega))$$

- 2) Rappresentazione mediante modulo e argomento come nei *Diagrammi di Bode*. Ovviamente modulo e argomento di  $G(j\omega)$  dipendono da  $\omega$ :

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| e^{j \arg G(j\omega)}$$

- I *Diagrammi di Bode* rappresentano  $G(j\omega)$  tramite due grafici:
  - 1) il diagramma delle ampiezze rappresenta il modulo  $|G(j\omega)|_{dB}$  (espresso solitamente in dB) in funzione del  $\log_{10} \omega$ ;
  - 2) il diagramma delle fasi rappresenta  $\arg G(j\omega)$  (in radianti o in gradi) in funzione del  $\log_{10} \omega$ ;
- Sono utilizzate scale logaritmiche sia per poter rappresentare meglio grandezze soggette a grandi variazioni (es:  $\omega = 0.1$ ,  $\omega = 10$ ,  $\omega = 1000, \dots$ ), che per alcune proprietà che facilitano la rappresentazione dei diagrammi.

Conversione in dB e viceversa

- Il *decibel* (dB) è un'unità logaritmica convenzionale che normalmente si impiega per esprimere il guadagno di amplificatori. Data una grandezza  $A$  il suo valore in decibel  $A_{dB}$  si calcola come:

$$A_{dB} = 20 \log_{10} A$$

- Alcune conversioni di uso frequente:

$A$	$A_{dB} = 20 \log_{10} A$
1	0
$\sqrt{2}$	3
2	6
5	14
10	20
20	26
50	34
100	40
1000	60
10000	80
0.5	-6
0.1	-20
0.01	-40

- Ogni 6 dB il valore di  $A$  raddoppia:

$$\begin{aligned} (2A)_{db} &= 20 \log_{10} (2A) = \\ &= 20 (\log_{10} 2 + \log_{10} A) \\ &= 6 \text{ dB} + A_{dB} \end{aligned}$$

- Ogni 20 dB il valore di  $A$  è moltiplicato per 10:

$$\begin{aligned} (10A)_{db} &= 20 \log_{10} (10A) = \\ &= 20 (\log_{10} 10 + \log_{10} A) \\ &= 20 \text{ dB} + A_{dB} \end{aligned}$$

- Si consideri una generica funzione di trasferimento:

$$G(s) = K_p \frac{s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^h (s^{n-h} + a_{n-1} s^{n-h-1} + \dots + a_{h+1} s + a_h)}$$

- Il fattore  $s^h$  corrisponde a un eventuale polo nell'origine avente ordine di molteplicità  $h$ : se la funzione di trasferimento non presenta poli nell'origine, è  $h=0$ .
- Forma fattorizzata a costanti di tempo:

$$G(s) = K_\tau \frac{(1 + \tau'_1 s) (1 + \tau'_2 s) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{s}{\omega'_{n1}} + \frac{s^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \dots}{s^h (1 + \tau_1 s) (1 + \tau_2 s) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{s}{\omega_{n1}} + \frac{s^2}{\omega_{n1}^2}\right) \dots}$$

- La funzione di risposta armonica si ottiene ponendo  $s = j\omega$ :

$$G(j\omega) = K_\tau \frac{(1 + j\omega\tau'_1) (1 + j\omega\tau'_2) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{j\omega}{\omega'_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \dots}{(j\omega)^h (1 + j\omega\tau_1) (1 + j\omega\tau_2) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}^2}\right) \dots}$$

- Il diagramma di Bode della funzione  $G(j\omega)$  si ottiene come somma dei diagrammi di Bode delle seguenti funzioni elementari:

$$\begin{aligned} & K_\tau \\ & (j\omega)^{-h} \\ & (1 + j\omega\tau)^{\pm 1} \\ & \left(1 + j 2 \delta \frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1} \end{aligned}$$

- Il diagramma di Bode delle ampiezze si ottiene come somma dei diagrammi di Bode delle ampiezze delle seguenti funzioni elementari:

$$\begin{aligned}
 & K_{\tau} \\
 & (j\omega)^{-h} \\
 & (1 + j\omega\tau)^{\pm 1} \\
 & \left(1 + j2\delta\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1}
 \end{aligned}$$

- Infatti il diagramma delle ampiezze rappresenta il modulo di  $G(j\omega)$  espresso in dB. Occorre dunque rappresentare la seguente funzione di  $\omega$ :

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left| K_{\tau} \frac{(1 + j\omega\tau'_1) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{j\omega}{\omega'_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \dots}{(j\omega)^h (1 + j\omega\tau_1) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}^2}\right) \dots} \right|$$

- Per le proprietà sul modulo dei numeri complessi:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log_{10} \left( \frac{|K_{\tau}| \left|1 + j\omega\tau'_1\right| \dots \left|1 + 2\delta'_1 \frac{j\omega}{\omega'_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega'^2_{n1}}\right| \dots}{|j\omega|^h |1 + j\omega\tau_1| \dots \left|1 + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}^2}\right| \dots} \right)$$

- Per le proprietà dei logaritmi:

$$\begin{aligned}
 |G(j\omega)|_{dB} = & |K_{\tau}|_{dB} + |1 + j\omega\tau'_1|_{dB} + \dots + \left|1 + 2\delta'_1 \frac{j\omega}{\omega'_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega'^2_{n1}}\right|_{dB} + \dots \\
 & - h|j\omega|_{dB} - |1 + j\omega\tau_1|_{dB} - \dots - \left|1 + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}^2}\right|_{dB} - \dots
 \end{aligned}$$

- Il diagramma di Bode delle fasi si ottiene come somma dei diagrammi di Bode delle fasi delle seguenti funzioni elementari:

$$\begin{aligned}
 & K_{\tau} \\
 & (j\omega)^{-h} \\
 & (1 + j\omega\tau)^{\pm 1} \\
 & \left(1 + j2\delta\frac{\omega}{\omega_n} - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^{\pm 1}
 \end{aligned}$$

- Infatti il diagramma delle fasi rappresenta l'argomento di  $G(j\omega)$ . Occorre dunque rappresentare la seguente funzione di  $\omega$ :

$$\arg G(j\omega) = \arg \left( \frac{K_{\tau} (1 + j\omega\tau'_1) \dots \left(1 + 2\delta'_1 \frac{j\omega}{\omega'_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega'^2_{n1}}\right) \dots}{(j\omega)^h (1 + j\omega\tau_1) \dots \left(1 + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}^2}\right) \dots} \right)$$

- Per le proprietà sugli argomenti dei numeri complessi:

$$\begin{aligned}
 \arg G(j\omega) = & \arg(K_{\tau}) + \arg(1 + j\omega\tau'_1) + \dots + \arg\left(1 + 2\delta'_1 \frac{j\omega}{\omega'_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega'^2_{n1}}\right) + \dots \\
 & -h \arg(j\omega) - \arg(1 + j\omega\tau_1) - \dots - \arg\left(1 + 2\delta_1 \frac{j\omega}{\omega_{n1}} - \frac{\omega^2}{\omega_{n1}^2}\right) - \dots
 \end{aligned}$$

- Useremo anche la notazione:

$$\angle G(j\omega) = \arg G(j\omega)$$

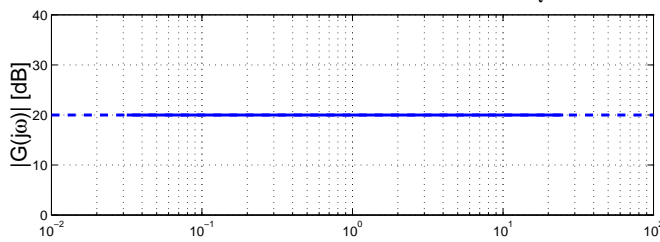
Guadagno costante:  $G(j\omega) = K_T$ .

- I diagrammi del modulo e della fase sono indipendenti da  $\omega$ , cioè sono costanti:

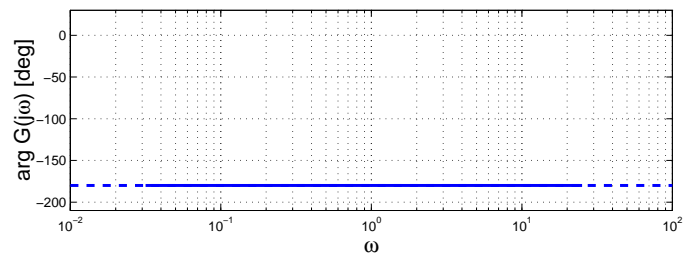
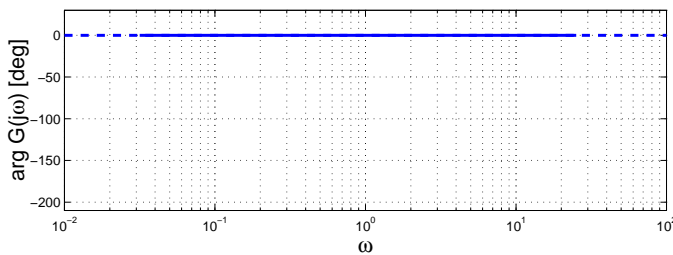
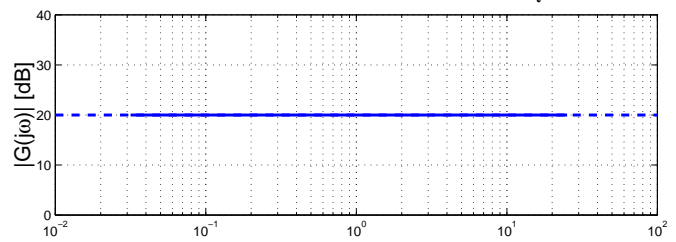
$$|G(j\omega)| = |K_T|$$

$$\arg G(j\omega) = \begin{cases} 0 & \text{se } K_T \geq 0 \\ -\pi & \text{se } K_T < 0 \end{cases}$$

Diagrammi di Bode costante positiva  $K_T=10$



Diagrammi di Bode costante negativa  $K_T = -10$



Poli o zeri nell'origine:  $G(j\omega) = (j\omega)^{-h} = \frac{1}{(j\omega)^h}$

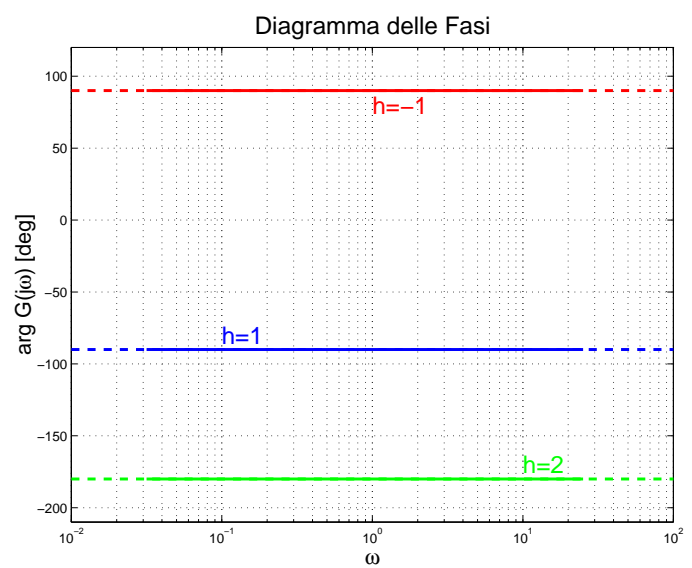
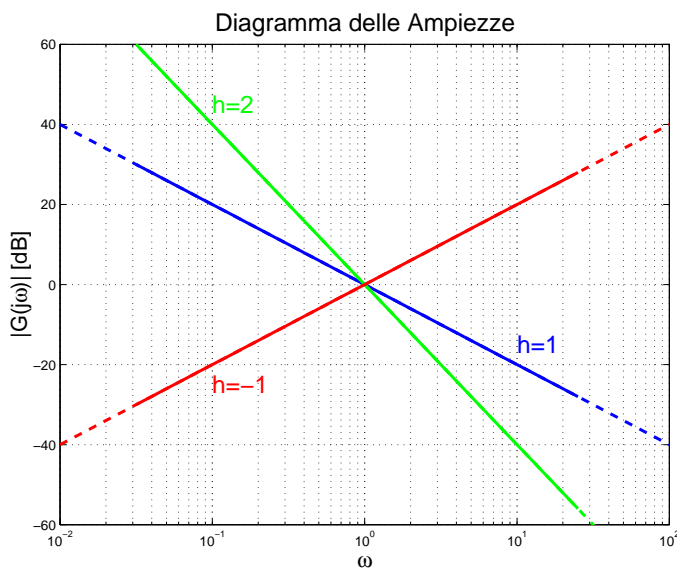
- Il diagramma di bode del modulo è una retta passante per l'origine con pendenza pari a  $-h$  db per decade:

$$|G(j\omega)| = |(j\omega)^{-h}| = |\omega|^{-h} = \omega^{-h}$$

$$|G(j\omega)|_{db} = 20 \log_{10}(\omega^{-h}) = -h 20 \log_{10}(\omega)$$

- Il diagramma di bode delle fasi è una retta orizzontale passante per  $-h \frac{\pi}{2}$ :

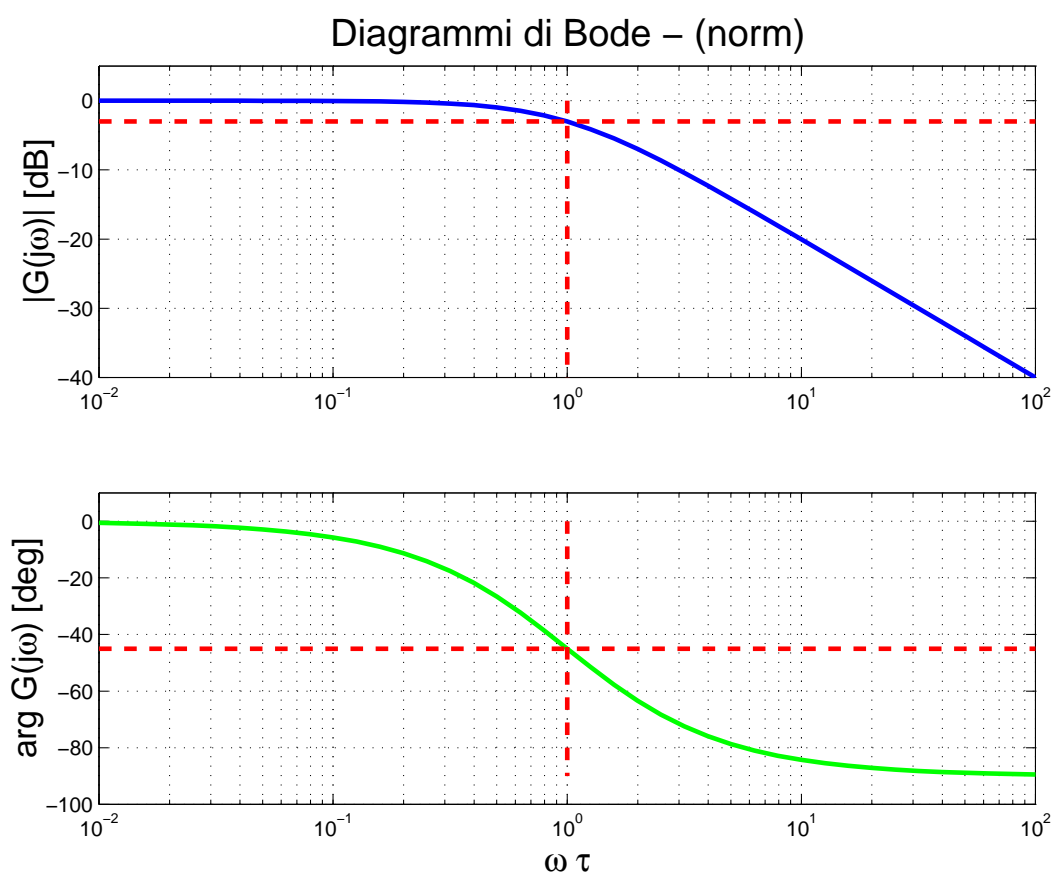
$$\arg G(j\omega) = \arg((j\omega)^{-h}) = -h \arg(j\omega) = -h \frac{\pi}{2}$$



Poli reali stabili ( $\tau > 0$ ):  $G(j\omega) = (1 + j\omega\tau)^{-1} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

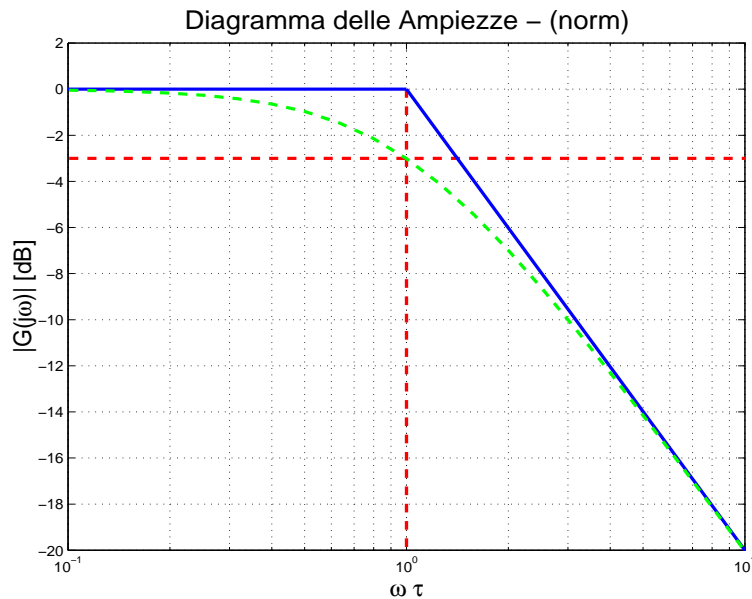
$$\arg G(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega\tau}{1}\right) = -\arctan(\omega\tau)$$



- La pulsazione  $\omega_0 = 1/\tau$  è detta *pulsazione critica* o *pulsazione di rottura* o *pulsazione di taglio*.
- Per  $\omega = \omega_0$  il diagramma delle ampiezze passa per -3dB che corrisponde a una ampiezza di  $1/\sqrt{2} = 0.707$ .
- Per  $\omega = \omega_0$  il diagramma delle fasi passa per  $-45^\circ$ .

Poli reali stabili: approssimazione asintotica diagramma delle ampiezze

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \Rightarrow |G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$



- Per  $\omega \rightarrow 0$  risulta  $\omega\tau \rightarrow 0$  e quindi  $\omega\tau \ll 1$  da cui:

$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10} \left( \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right) \simeq -20 \log_{10}(1) = 0$$

- Per  $\omega \rightarrow 0$  il diagramma delle ampiezze tende asintoticamente a una retta orizzontale a 0dB.
- Per  $\omega \rightarrow \infty$  risulta  $\omega\tau \gg 1$  da cui:

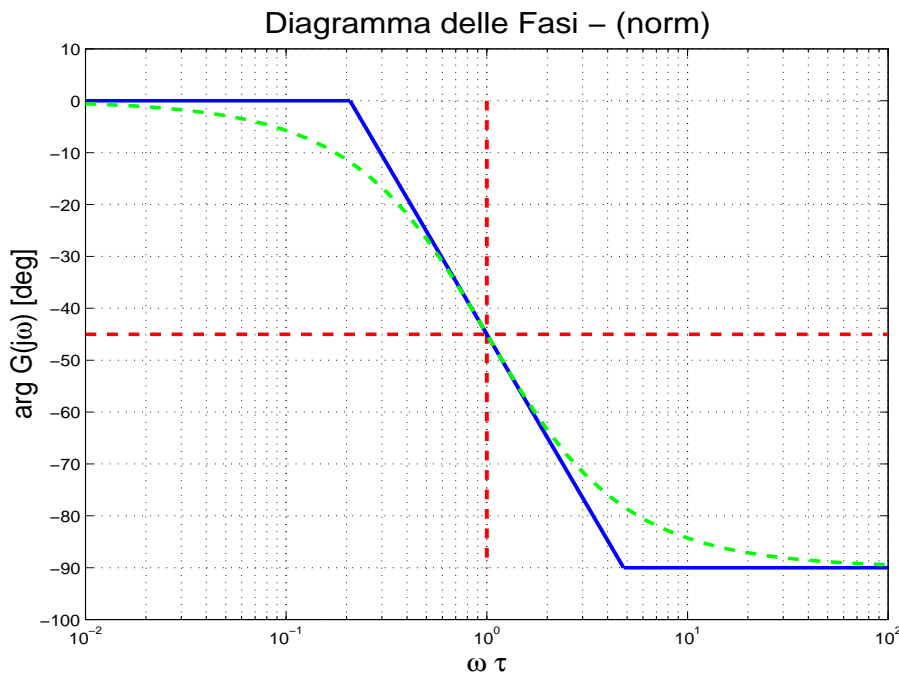
$$|G(j\omega)|_{dB} = -20 \log_{10} \left( \sqrt{1 + (\omega\tau)^2} \right) \simeq -20 \log_{10}(|\omega\tau|)$$

$$\simeq -20 \log_{10}(\omega) - 20 \log_{10}(|\tau|)$$

- Per  $\omega \rightarrow \infty$  il diagramma delle ampiezze tende asintoticamente ad una retta di pendenza  $-20\text{dB/decade}$  passante per  $(1/\tau, 0)$ .
- L'approssimazione asintotica è quindi data da due semirette:
  1. semiretta orizzontale a 0dB per  $\omega \leq \omega_0 = 1/\tau$
  2. semiretta con pendenza  $-20\text{dB/dec}$  passante  $(1/\tau, 0)$  per  $\omega > \omega_0$ .
- La massima differenza fra il diagramma reale e quello asintotico è di 3dB per  $\omega = \omega_0 = 1/\tau$ .

Poli reali stabili: approssimazione asintotica diagramma delle fasi

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} \Rightarrow \arg G(j\omega) = -\arctan(\omega\tau)$$



- Per  $\omega \rightarrow 0$  risulta  $\omega\tau \rightarrow 0$  e quindi  $\omega\tau \ll 1$  da cui:

$$\arg G(j\omega) = -\arctan(\omega\tau) \simeq 0$$

- Per  $\omega \rightarrow \infty$  risulta  $\omega\tau \gg 1$  da cui:

$$\arg G(j\omega) = -\arctan(\omega\tau) = \begin{cases} -\pi/2 & \text{se } \tau > 0 \\ +\pi/2 & \text{se } \tau < 0 \end{cases}$$

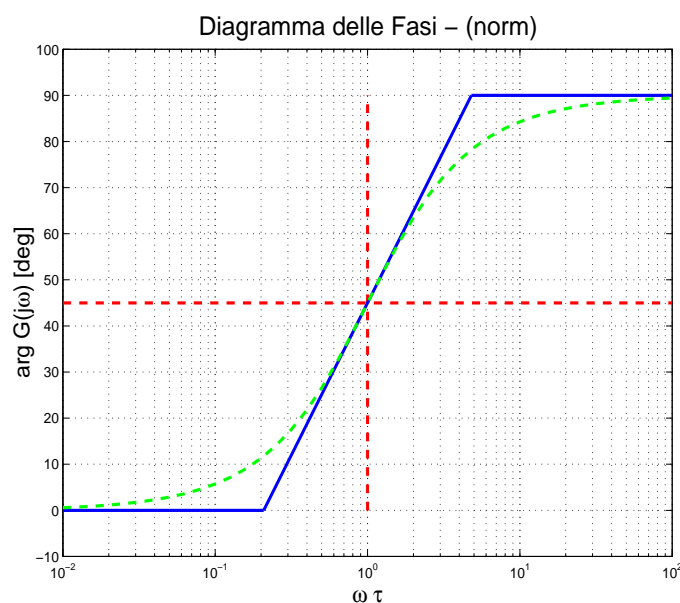
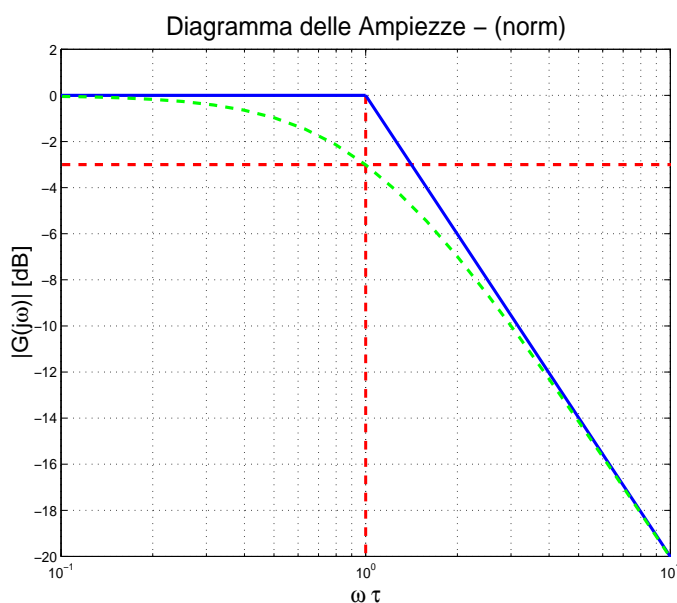
- Per  $\omega = 1/\tau$  si ha  $\arg G(j\omega) = -45^\circ$ . Si può calcolare che la retta tangente al diagramma delle fasi in  $\omega = 1/\tau$  passa per i due punti  $(\omega_a, 0)$  e  $(\omega_b, -90^\circ)$  con  $\omega_a = \omega_0/4.81$  e con  $\omega_b = 4.81 \omega_0$ .
- L'approssimazione asintotica è costituita da tre tratti:
  1. semiretta orizzontale a  $0^\circ$  per  $\omega \leq \omega_a$
  2. segmento passante per  $(\omega_a, 0)$ ,  $(\omega_0, -45^\circ)$  e  $(\omega_b, -90^\circ)$ .
  3. semiretta orizzontale a  $-90^\circ$  per  $\omega \geq \omega_b$

Poli reali instabili ( $\tau < 0$ )

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}$$

$$\arg G(j\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega\tau}{1}\right) = +\arctan(\omega|\tau|)$$



- I diagrammi delle ampiezze (reale e asintotico) coincidono con quelli calcolati per i poli stabili.
- I diagrammi delle fasi (reale e asintotico) sono simmetrici rispetto all'asse reale rispetto ai corrispondenti diagrammi dei poli stabili.

Poli complessi coniugati stabili ( $0 \leq \delta < 1$ ):

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\delta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} \quad \rightarrow \quad G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} + j 2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}$$

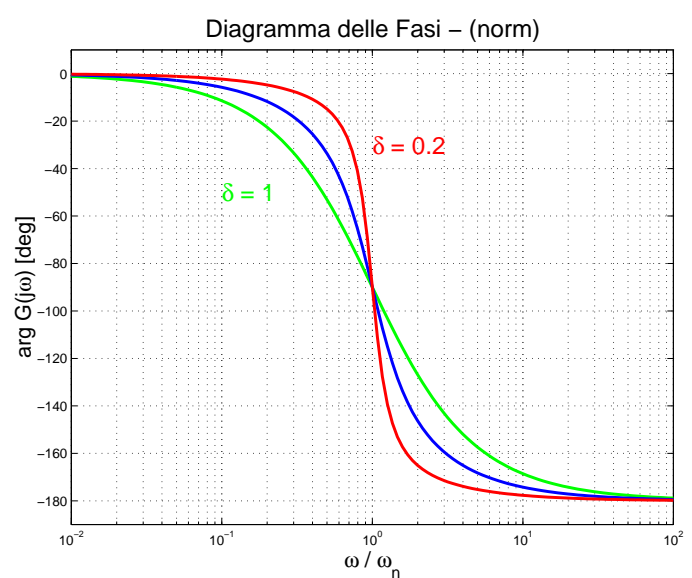
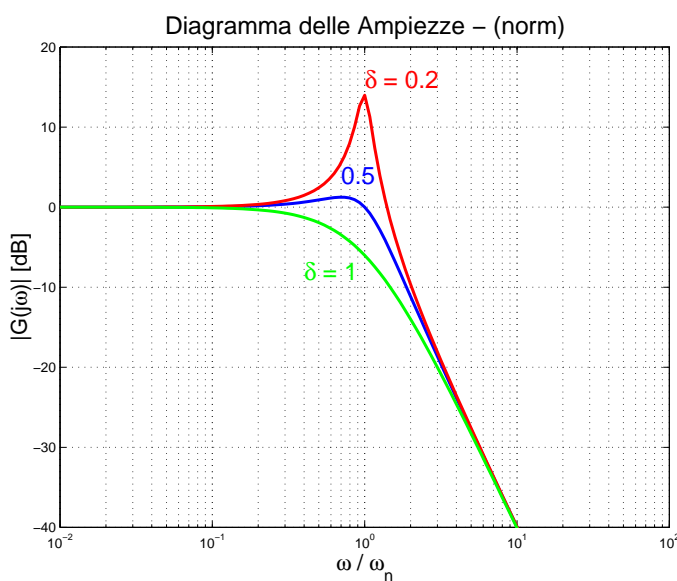
- Il modulo di  $G(j\omega)$  è dato da:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\delta \frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

- La fase di  $G(j\omega)$  risulta:

$$\arg(G(j\omega)) = \arctan2\left(\frac{2\delta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}\right) = \arctan2\left(\frac{2\delta \omega_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2}\right)$$

Per  $\omega < \omega_n$  la fase è compresa tra  $0$  e  $-90^\circ$ , per  $\omega = \omega_n$  la fase risulta  $-90^\circ$ , per  $\omega > \omega_n$  la fase è compresa tra  $-90^\circ$  e  $-180^\circ$ .





### Poli complessi coniugati stabili ( $0 \leq \delta < 1$ )

Approssimazione asintotica del diagramma delle ampiezze.

- Il modulo di  $G(j\omega)$  è dato da:

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}\right)^2 + \left(2\delta\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2}}$$

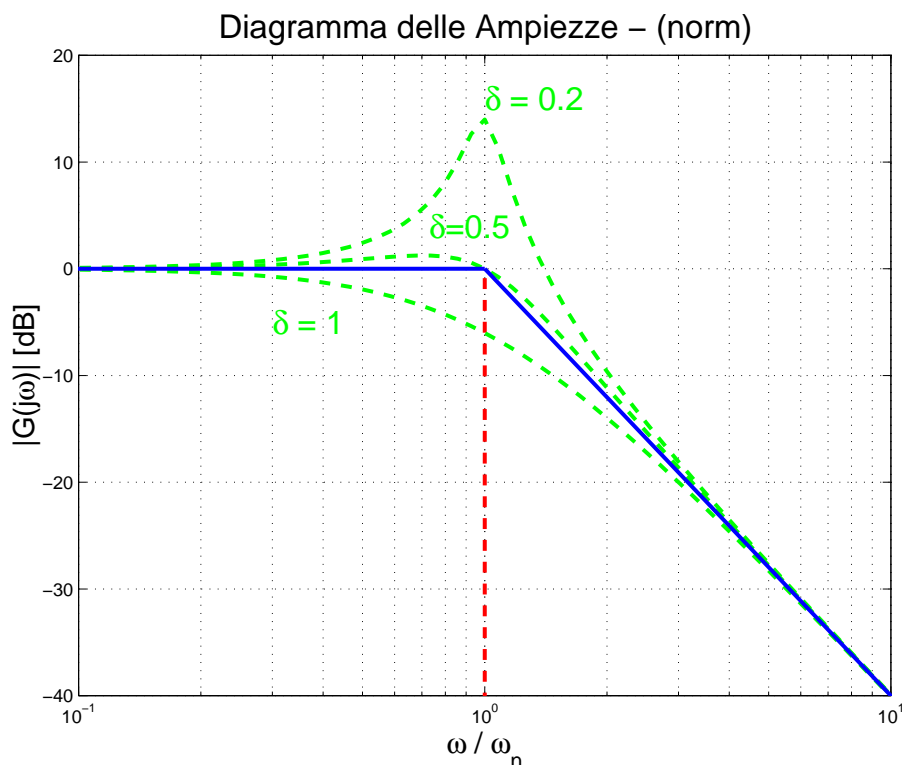
- Per  $\omega \rightarrow 0$  risulta  $\omega/\omega_n \rightarrow 0$  da cui

$$|G(j\omega)| \simeq 1 \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)|_{dB} \simeq 0$$

- Per  $\omega \rightarrow 0$  il diagramma delle ampiezze tende asintoticamente a una retta orizzontale a 0dB.
- Per  $\omega \rightarrow \infty$  il termine dominante sotto radice è  $(\omega/\omega_n)^4$  pertanto:

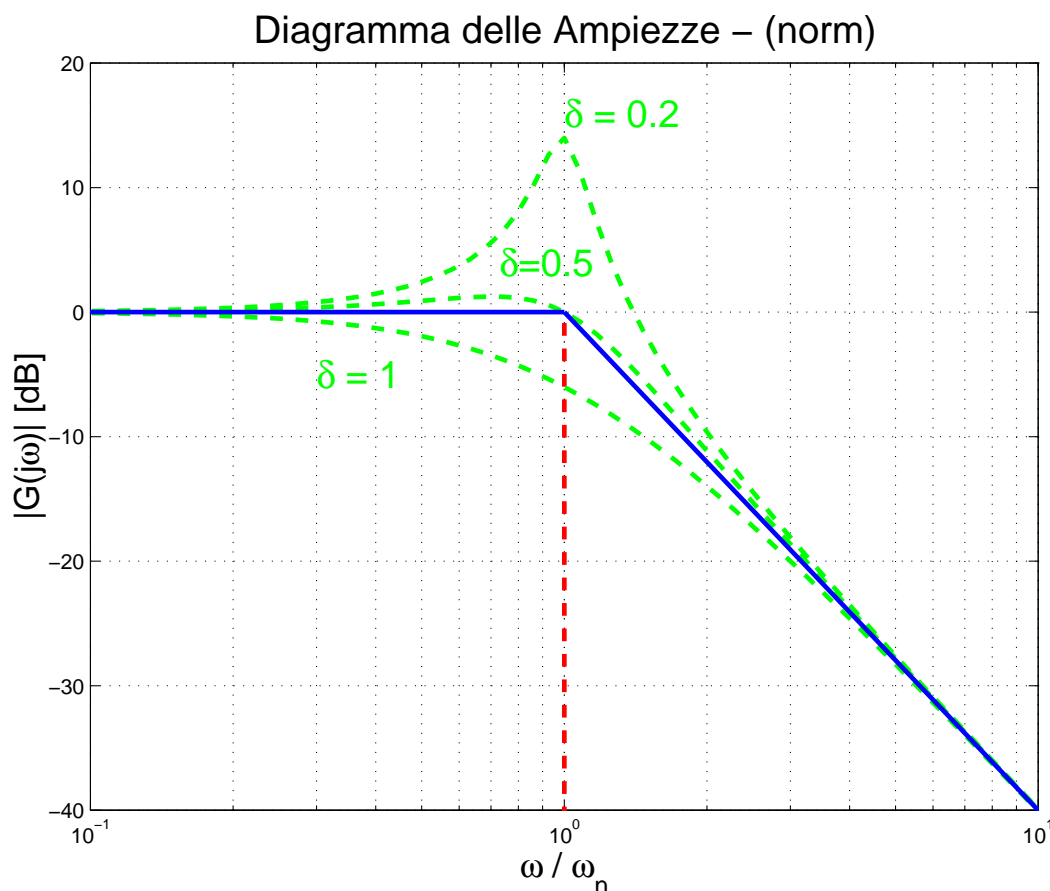
$$|G(j\omega)| \simeq \frac{\omega_n^2}{\omega^2} \quad \Rightarrow \quad |G(j\omega)|_{dB} \simeq 40 \log_{10}(\omega_n) - 40 \log_{10}(\omega)$$

- Per  $\omega \rightarrow \infty$  il diagramma delle ampiezze tende asintoticamente a una retta di pendenza -40dB/decade passante per  $(\omega_n, 0)$ .



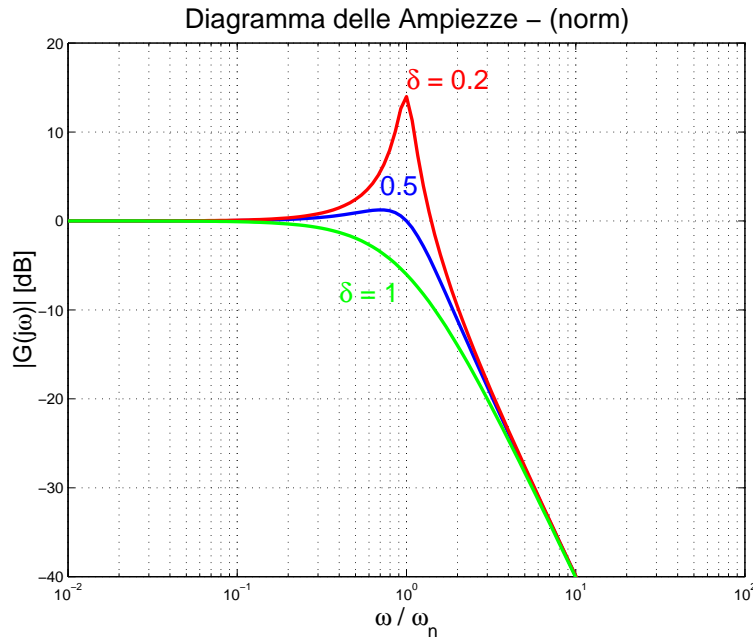
Poli complessi coniugati stabili ( $0 \leq \delta < 1$ )

Approssimazione asintotica del diagramma delle ampiezze.



- L'approssimazione asintotica è quindi data da due semirette:
  1. semiretta orizzontale a 0dB per  $\omega \leq \omega_n$
  2. semiretta con pendenza  $-40\text{dB/dec}$  passante  $(\omega_n, 0)$  per  $\omega > \omega_n$ .
- Il diagramma effettivo si può discostare sensibilmente da quello asintotico: in particolare, per  $\delta=0$  e in corrispondenza della pulsazione di rottura  $\omega_n$ , lo scostamento è infinito.
- Il diagramma delle ampiezze ha le seguenti proprietà:
  - 1) per  $0 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$ , presenta un massimo;
  - 2) per  $0 \leq \delta \leq 1/2$ , interseca l'asse a destra del punto  $\omega = \omega_n$ ;
  - 3) per  $1/2 \leq \delta \leq 1/\sqrt{2}$ , interseca l'asse a sinistra del punto  $\omega = \omega_n$ ;
  - 4) per  $1/\sqrt{2} \leq \delta \leq 1$ , non interseca l'asse delle ascisse ed è pertanto tutta al di sotto della sua approssimazione asintotica.

### Poli complessi coniugati stabili: Picco e pulsazione di risonanza.



- Pulsazione di risonanza  $\omega_R$ . Posto  $u = \omega/\omega_n$ , il massimo dell'ampiezza corrisponde ad un minimo della funzione

$$(1 - u^2)^2 + 4 \delta^2 u^2$$

Derivando e uguagliando a zero la derivata, si ottiene

$$-4(1 - u^2)u + 8\delta^2 u = 0$$

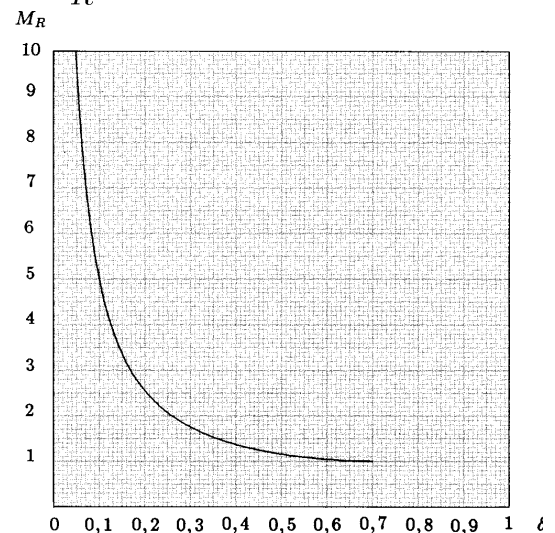
Trascurando la soluzione nulla si ottiene

$$u_R = \sqrt{1 - 2\delta^2} \quad \rightarrow \quad \boxed{\omega_R = \omega_n \sqrt{1 - 2\delta^2}}$$

- Picco di risonanza  $M_R$ : si calcola come modulo della funzione di risposta armonica in corrispondenza della pulsazione  $\omega_R$ :

$$M_R = \frac{1}{\sqrt{(1 - 1 - 2\delta^2)^2 + 4\delta^2(1 - 2\delta^2)}}$$

$$\boxed{M_R = \frac{1}{2\delta\sqrt{1 - \delta^2}}}$$



### Poli complessi coniugati stabili

#### Approssimazione asintotica del diagramma delle fasi.

- La fase di  $G(j\omega)$  risulta:

$$\arg(G(j\omega)) = \arctan2 \left( \frac{2 \delta \omega_n \omega}{\omega_n^2 - \omega^2} \right)$$

- Per  $\omega \rightarrow 0$  il diagramma delle fasi tende asintoticamente a una retta orizzontale a 0 gradi:

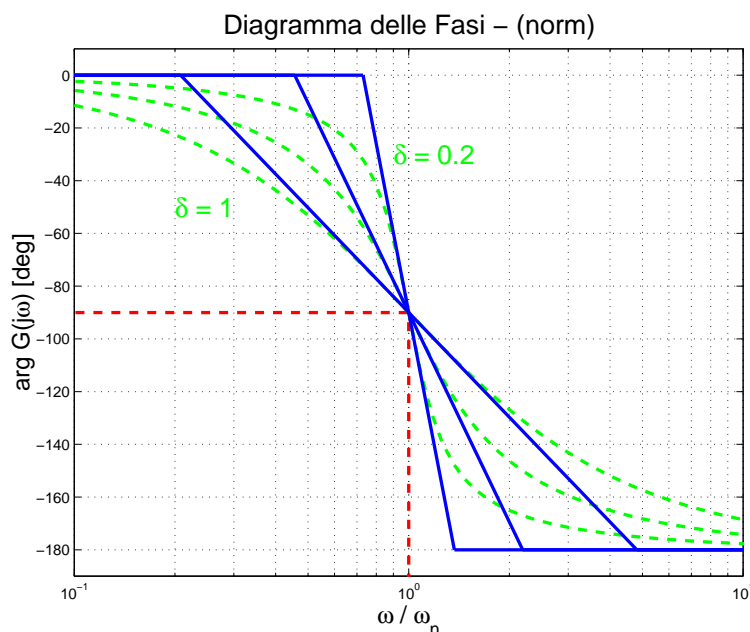
$$\arg(G(j\omega)) \simeq \arctan \left( \frac{0}{\omega_n^2} \right) = 0$$

- Per  $\omega \rightarrow \infty$  il diagramma delle fasi tende asintoticamente a una retta orizzontale a -180 gradi:

$$\arg(G(j\omega)) \simeq \arctan2 \left( \frac{2 \delta \omega_n}{-\omega} \right) \simeq -180^\circ$$

- Per  $\omega = \omega_n$  il diagramma delle fasi è tangente alla retta passante per i punti  $(\omega_a, 0)$ ,  $(\omega_n, -90^\circ)$  e  $(\omega_b, -180^\circ)$  con  $\omega_a = \omega_n/4.81^\delta$  e con  $\omega_b = 4.81^\delta \omega_n$ .
- L'approssimazione asintotica è costituita da tre tratti:

1. semiretta orizzontale a  $0^\circ$  per  $\omega \leq \omega_a$
2. segmento passante per  $(\omega_a, 0)$ ,  $(\omega_n, -90^\circ)$  e  $(\omega_b, -180^\circ)$ .
3. semiretta orizzontale a  $-180^\circ$  per  $\omega \geq \omega_b$

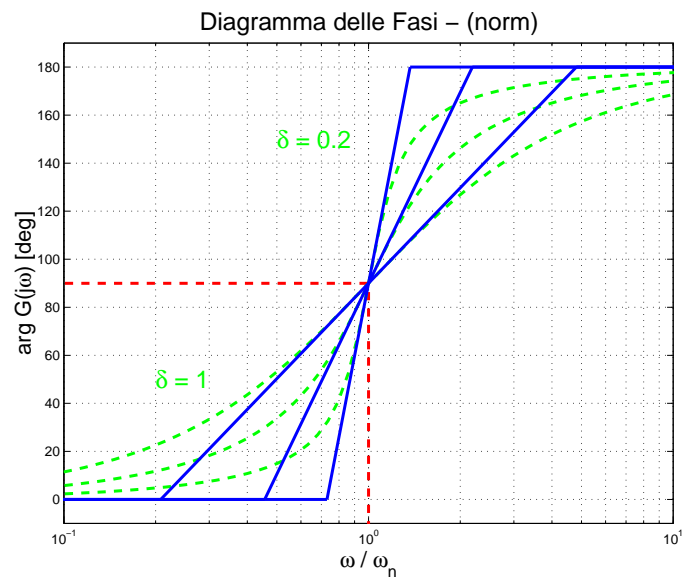
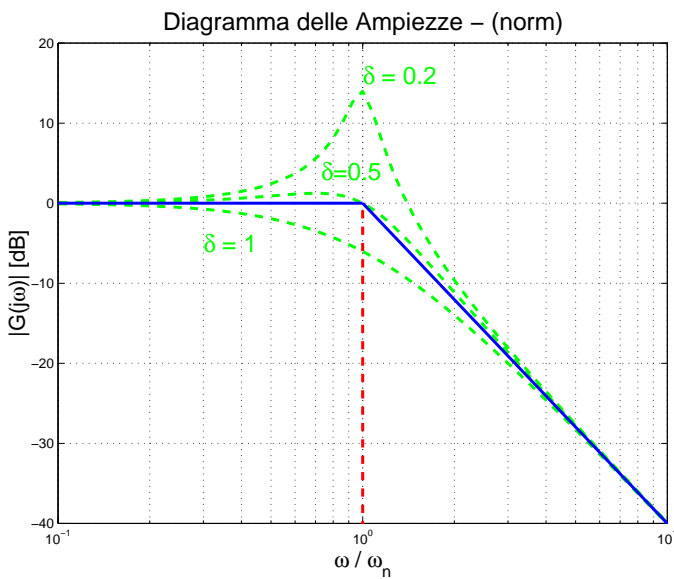


### Poli complessi coniugati instabili ( $0 > \delta > -1$ )

$$G(s) = \frac{1}{1 + \frac{2\delta}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}} = \frac{1}{1 - \frac{2|\delta|}{\omega_n}s + \frac{s^2}{\omega_n^2}}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} - j 2|\delta| \frac{\omega}{\omega_n}}$$

- I diagrammi delle ampiezze (reale e asintotico) coincidono con quelli calcolati per i poli complessi stabili.
- I diagrammi delle fasi (reale e asintotico) sono simmetrici rispetto all'asse reale rispetto ai corrispondenti diagrammi dei poli complessi stabili.



### Diagrammi di Bode degli zeri:

- I diagrammi di bode delle ampiezze (reale e asintotico) degli zeri (semplici o complessi e coniugati) sono simmetrici rispetto all'asse orizzontale rispetto ai corrispondenti diagrammi delle ampiezze dei poli.
- I diagrammi di bode delle fasi (reale e asintotico) degli zeri (semplici o complessi e coniugati) sono simmetrici rispetto all'asse orizzontale rispetto ai corrispondenti diagrammi delle fasi dei poli.

### Diagrammi di Bode di poli o zeri instabili:

- I diagrammi di bode delle ampiezze (reale e asintotico) di poli o zeri (semplici o complessi e coniugati) instabili coincidono con i corrispondenti diagrammi di poli o zeri stabili.
- I poli (semplici o complessi e coniugati) introducono sempre un'attenuazione alle alte frequenze (rispetto alla pulsazione critica o alla pulsazione naturale).
- Gli zeri (semplici o complessi e coniugati) introducono sempre un'amplificazione alle alte frequenze (rispetto alla pulsazione critica o alla pulsazione naturale).
- I diagrammi di bode delle fasi (reale e asintotico) di poli o zeri (semplici o complessi e coniugati) instabili sono simmetrici rispetto all'asse orizzontale rispetto ai corrispondenti diagrammi delle fasi di poli o zeri stabili.
- I poli stabili (semplici o complessi e coniugati) e gli zeri instabili (semplici o complessi e coniugati) introducono un ritardo di fase.
- I poli instabili (semplici o complessi e coniugati) e gli zeri stabili (semplici o complessi e coniugati) introducono un anticipo di fase.

## Funzioni approssimanti

- Sia nei diagrammi di Bode, sia in quelli di Nyquist il comportamento di una generica  $G(s)$  per  $s \rightarrow 0^+$  e per  $s \rightarrow \infty$  si può studiare considerando rispettivamente le funzioni approssimanti  $G_0(s)$  e  $G_\infty(s)$ .
- Consideriamo l'esempio:

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+0.2)(s^2+15s+100)} = \frac{3}{2} \frac{\left(1 + \frac{s}{3}\right)}{s(1+5s) \left(1 + \frac{3s}{20} + \frac{s^2}{100}\right)}$$

La costante di guadagno nella forma a costanti di tempo  $K_\tau$  è  $3/2$ , la costante di guadagno nella forma a poli e zeri  $K_p$  è 10.

- $G_0(s)$  è la funzione approssimante di  $G(s)$  per  $s \rightarrow 0^+$ . Si ottiene trascurando tutti i termini in  $s$  ad esclusione dei poli nell'origine, QUALUNQUE sia la forma di  $G(s)$ :

$$G_0(s) = \frac{10(\cancel{s} + 3)}{s(\cancel{s} + 0.2)(\cancel{s}^2 + 15\cancel{s} + 100)} = \frac{30}{20s} = \frac{3}{2s}$$

$$G_0(s) = \frac{3}{2} \frac{\left(1 + \frac{\cancel{s}}{3}\right)}{s(1 + \cancel{s}) \left(1 + \frac{\cancel{s}}{20} + \frac{\cancel{s}^2}{100}\right)} = \frac{3}{2s}$$

- In generale  $G_0(s)$  risulta:

$$G_0(s) = K_\tau \frac{1}{s^h}$$

dove  $h$  è il numero di poli nell'origine di  $G(s)$  (il tipo di sistema).

- $G_\infty(s)$  è la funzione approssimante di  $G(s)$  per  $s \rightarrow \infty$ . Si ottiene considerando solo le potenze di  $s$  dominanti all'interno di ogni fattore, QUALUNQUE sia la forma di  $G(s)$ :

$$G_\infty(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+0.2)(s^2+15s+100)} = \frac{10s}{s s s^2} = \frac{10}{s^3}$$

$$G_\infty(s) = \frac{3}{2} \frac{\left(1 + \frac{s}{3}\right)}{s(1+5s) \left(1 + \frac{3s}{20} + \frac{s^2}{100}\right)} = \frac{3}{2} \frac{\left(\frac{s}{3}\right)}{s(5s) \left(\frac{s^2}{100}\right)} = \frac{10}{s^3}$$

- In generale  $G_\infty(s)$  risulta:

$$G_\infty(s) = K_p \frac{1}{s^r}$$

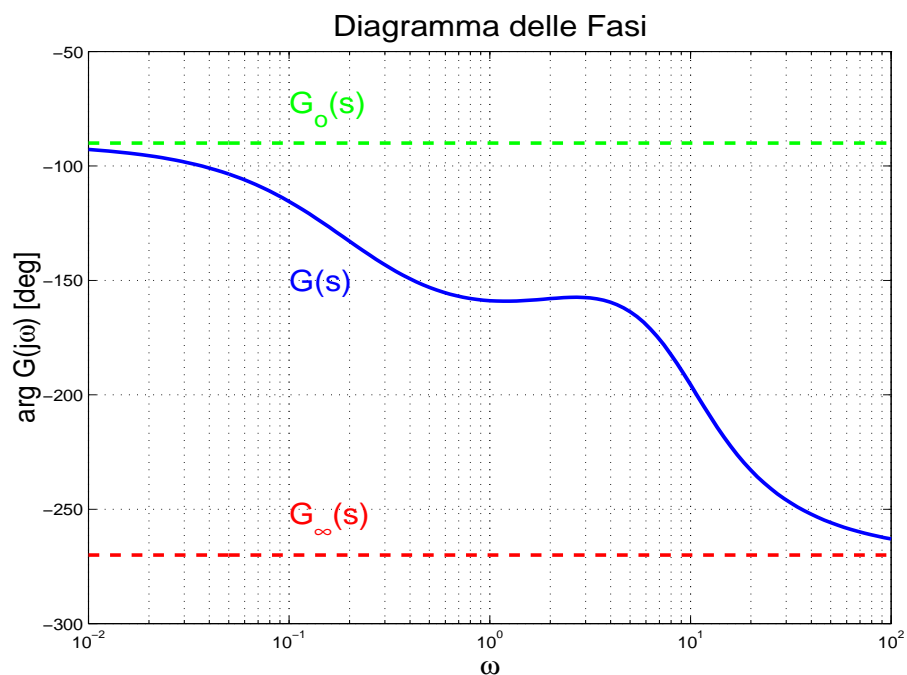
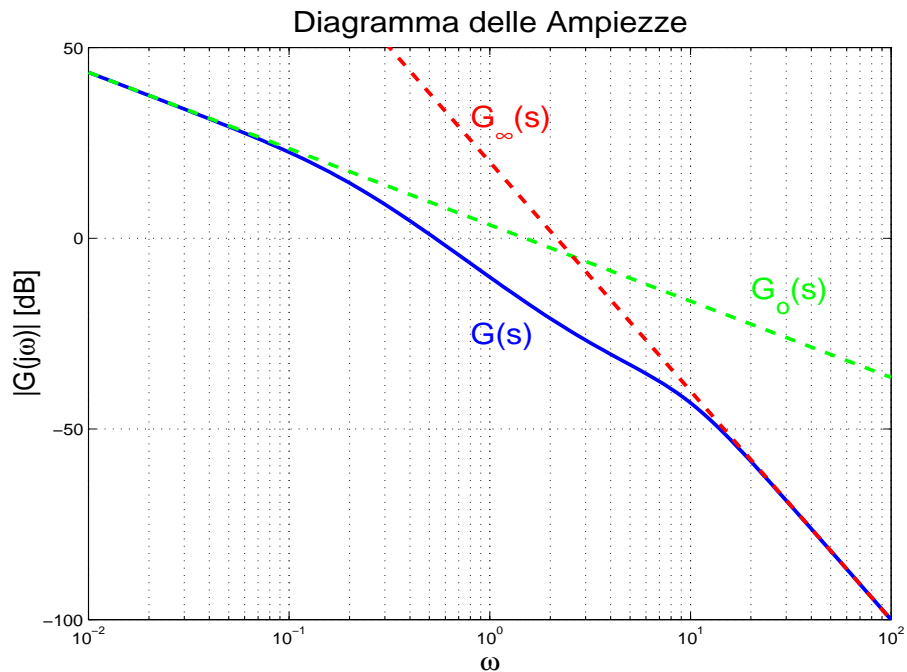
dove  $r = n - m$  è il grado relativo di  $G(s)$ .

- Le funzioni approssimanti  $G_0(s)$  e  $G_\infty(s)$  si possono usare per determinare velocemente i punti di partenza e di arrivo sia dei diagrammi di Nyquist sia di quelli di Bode perchè sono caratterizzate solo da costanti moltiplicative e da eventuali poli nell'origine. Esempio:

$$G_0(s) = \frac{3}{2s} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0^+} = \infty \\ \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$G_\infty(s) = \frac{10}{s^3} \Rightarrow \begin{cases} |G(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = 0 \\ \varphi_\infty = -3\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

- La funzione approssimante  $G_0(s)$  coincide con i diagrammi asintotici di  $G(s)$  per tutte le pulsazioni  $\omega$  che precedono il primo cambio di pendenza. Da qui si ottiene la formula per ricavare il punto  $\beta$  corrispondente al primo cambio di pendenza nel diagramma delle ampiezze.
- La funzione approssimante  $G_\infty(s)$  coincide con i diagrammi asintotici di  $G(s)$  per tutte le pulsazioni  $\omega$  che seguono l'ultimo cambio di pendenza.

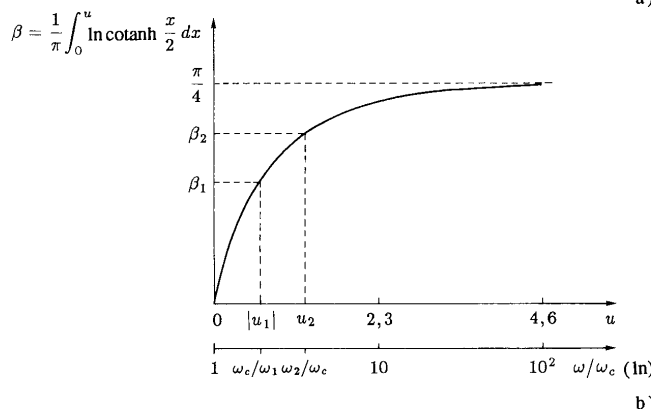
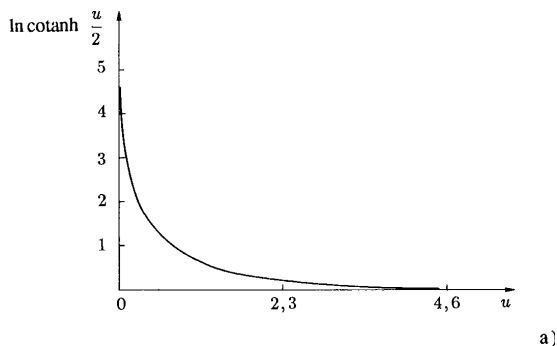
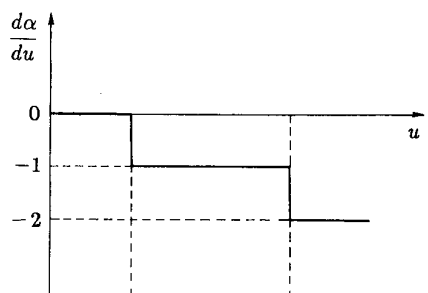
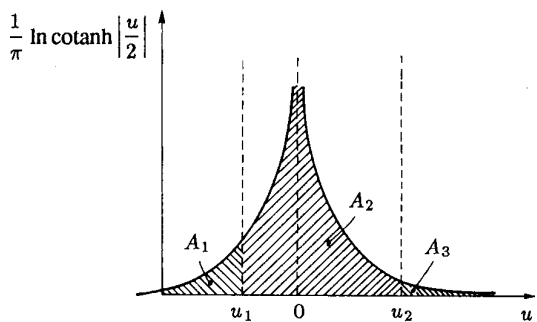
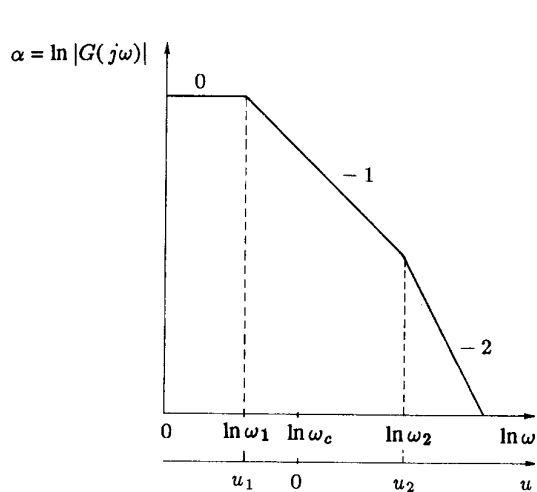


# La formula di Bode

- Una funzione di trasferimento razionale fratta è a a fase minima se non ha né poli né zeri nel semipiano destro del piano  $s$ .
- Per sistemi a fase minima, detta  $\omega_c$  la pulsazione in corrispondenza della quale si vuole calcolare la fase  $\beta_c$ , vale la formula di Bode:

$$\beta_c = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\alpha}{du} \ln \operatorname{coth} \left| \frac{u}{2} \right| du$$

in cui si è posto  $\alpha := \ln |G(j\omega)|$ ,  $u := \ln \frac{\omega}{\omega_c} = \ln \omega - \ln \omega_c$ .

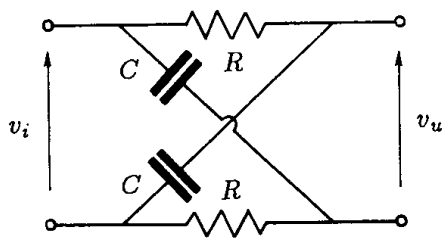


- La fase  $\beta_c$  in corrispondenza di una data pulsazione  $\omega_c$  dipende essenzialmente dalla pendenza  $\frac{d\alpha}{du}$  del diagramma delle ampiezze nell'intorno di quella pulsazione  $\omega_c$ .

- Esempio:  $\beta_c = 0 \cdot A_1 - 1 \cdot A_2 - 2 \cdot A_3$  dove:

$$A_1 = \frac{\pi}{4} - \beta_1, \quad A_2 = \beta_1 + \beta_2, \quad A_3 = \frac{\pi}{4} - \beta_2$$

- Significato della variabile di integrazione  $u$ : se il diagramma  $\alpha$  è riferito ai logaritmi naturali, la variabile  $u$  non è altro che l'ascissa  $\ln \omega$  con l'origine traslata in  $\ln \omega_c$ .
- La condizione necessaria e sufficiente per la validità della formula di Bode, cioè che la funzione di trasferimento sia a fase minima, è soddisfatta per la quasi totalità dei sistemi che normalmente si considerano.
- Esempio di rete elettrica a fase non minima:



a)

- Funzione di trasferimento

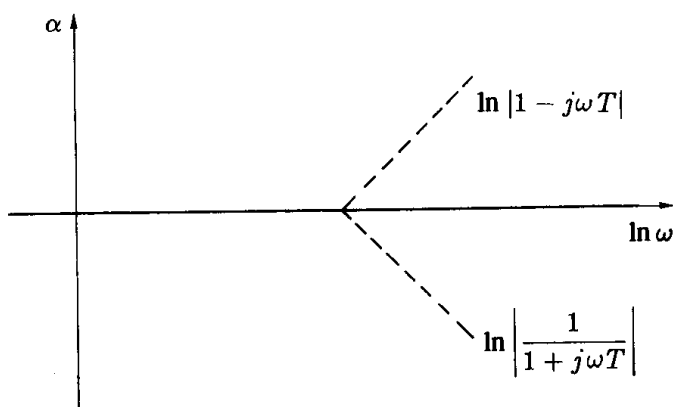
$$V_u(s) = \frac{1/Cs - R}{R + 1/Cs} V_i(s)$$

che, posto  $T := RC$ , diventa

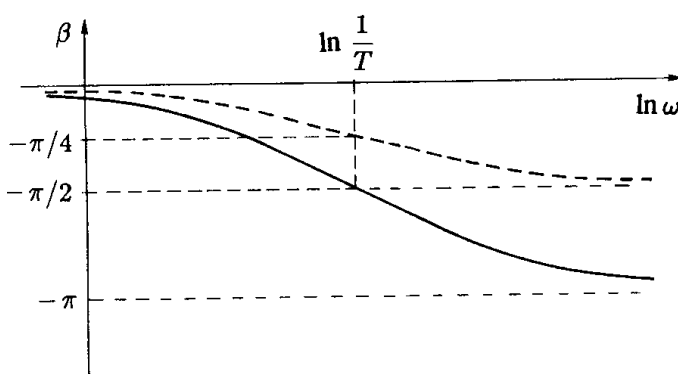
$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1 - Ts}{1 + Ts},$$

cioè una funzione non a fase minima;

- Diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi: il diagramma delle ampiezze è costante  $\alpha = 0$  ( $|G(j\omega)| = 1$ ), mentre il diagramma delle fasi varia gradualmente da  $0^\circ$  a  $-180^\circ$ .



b)



c)

- È chiaro che applicando la formula di Bode all'esempio si sarebbe invece dedotta una fase identicamente nulla.

- La funzione di trasferimento trascendente

$$G(s) = e^{-t_0 s}$$

che rappresenta un ritardo finito di valore  $t_0$ , non è a fase minima.

- Essendo

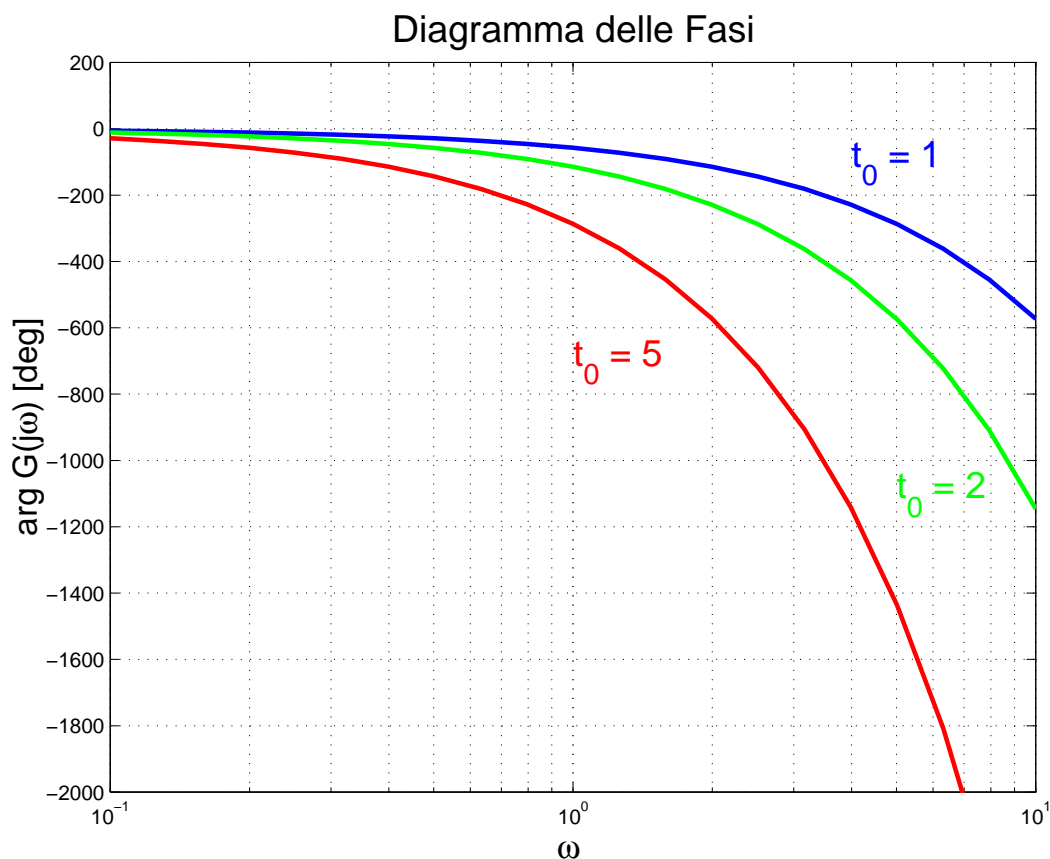
$$G(j\omega) = e^{-j\omega t_0} = \cos \omega t_0 - j \sin \omega t_0 ,$$

la funzione di risposta armonica ha modulo identicamente unitario e fase decrescente linearmente con la frequenza.

- Per ricavare i diagrammi di Bode, si scrive

$$\arg(G(j\omega)) = \arctan\left(\frac{-\sin(t_0\omega)}{\cos(t_0\omega)}\right) = -t_0 \omega = -t_0 e^{\ln \omega} = -t_0 10^{\log_{10} \omega}$$

relazione dalla quale si deduce che il diagramma delle fasi riportato su scala logaritmica ha un andamento esponenziale. Anche in questo caso l'applicazione della formula di Bode avrebbe condotto ad un risultato errato ( $\beta = 0$ ).



## Graficazione dei diagrammi di Bode delle ampiezze

Consideriamo come esempio la seguente funzione  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+0.2)(s^2+15s+100)} = \frac{3}{2} \frac{\left(1 + \frac{s}{3}\right)}{s(1+5s) \left(1 + \frac{3s}{20} + \frac{s^2}{100}\right)}$$

1. Ordinare per  $\omega$  crescente tutte le pulsazioni CRITICHE ovvero quelle corrispondenti a poli e zeri reali e alle pulsazioni naturali  $\omega_n$  dei poli e degli zeri complessi e coniugati, non consideriamo in questa lista i poli nell'origine:

$$\omega_1 = 0.2 \text{ (polo)} \quad \omega_2 = 3 \text{ (zero)} \quad \omega_3 = 10 \text{ (polo cc)}$$

queste sono le pulsazioni in corrispondenza delle quali il diagramma di Bode delle ampiezze cambia pendenza.

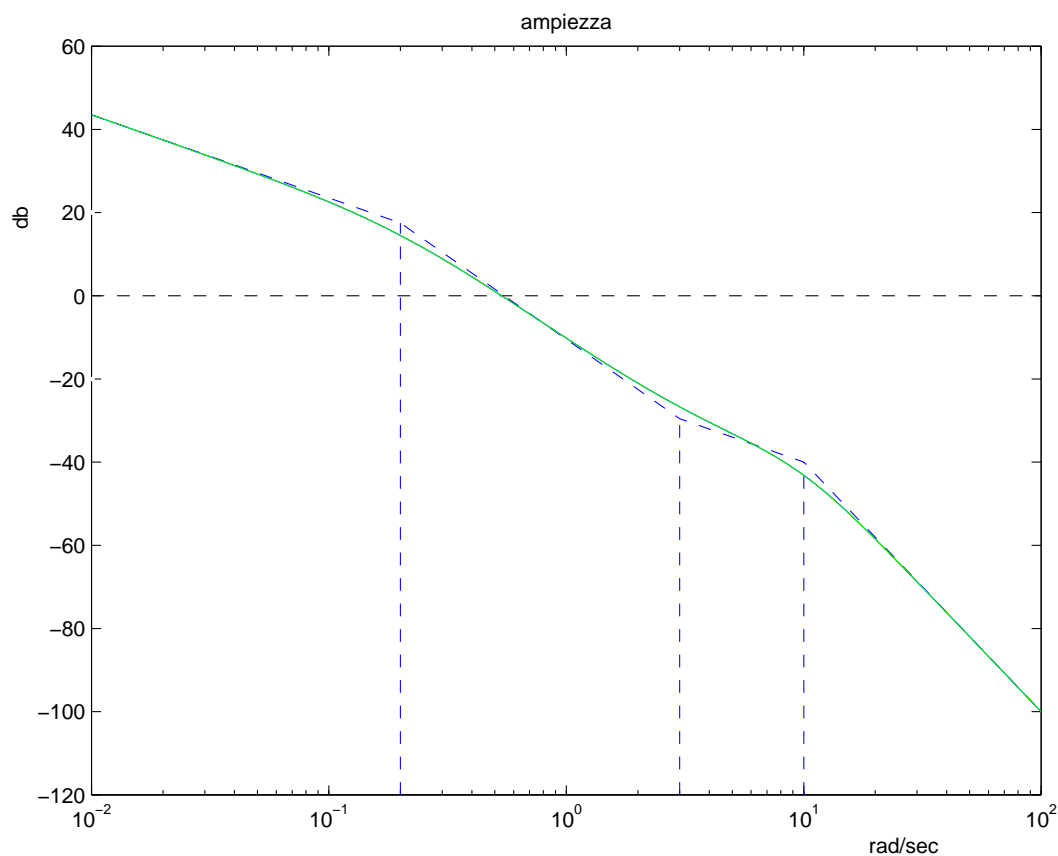
2. Determinare la posizione verticale del diagramma. Detto  $K_\tau$  il guadagno di  $G(s)$  nella forma a costanti di tempo, per un sistema di tipo  $h$  si determina il punto  $\beta$  attraversato dal diagramma asintotico per  $\omega = \omega_1$  (la prima pulsazione alla quale si ha un cambio di pendenza) secondo la formula:

$$\beta = \left| \frac{K_\tau}{\omega_1^h} \right| = \frac{\frac{3}{2}}{0.2^1} = \frac{15}{2} \simeq 17.5 \text{db}$$

Se il sistema è di tipo 0 (nessun polo nell'origine) la formula sopra restituisce esattamente il guadagno statico  $\beta = K_0 = G(0)$  del sistema.

3. Per  $\omega < \omega_1$  la pendenza del diagramma di bode è  $-h$ .
4. A partire dal punto  $(\omega_1, \beta)$ , tenendo conto che gli zeri reali o complessi determinano un incremento di pendenza di  $+20\text{db/dec}$  o  $+40\text{db/dec}$  rispettivamente e che i poli reali o complessi determinano un decremento di pendenza pari a  $-20\text{db/dec}$  o  $-40\text{db/dec}$  rispettivamente, si traccia il diagramma asintotico spostandosi verso  $\omega$  crescenti e aggiornando la pendenza in corrispondenza a ogni pulsazione critica.

- Le maggiori differenze tra il diagramma reale e quello asintotico si hanno intorno alle pulsazioni critiche ovvero in corrispondenza dei cambiamenti di pendenza del diagramma asintotico. Queste differenze possono essere elevate in corrispondenza a poli o zeri complessi e coniugati con basso coefficiente di smorzamento (esempio: picchi di risonanza).



## Graficazione dei diagrammi di Bode delle fasi

Consideriamo come esempio la seguente funzione  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+0.2)(s^2+15s+100)} = \frac{3}{2} \frac{\left(1 + \frac{s}{3}\right)}{s(1+5s) \left(1 + \frac{3s}{20} + \frac{s^2}{100}\right)}$$

1. Determinare la fase iniziale  $\varphi_0$  per  $\omega \rightarrow 0_+$ . Detto  $K_\tau$  il guadagno di  $G(s)$  nella forma a costanti di tempo (nell'esempio  $K_\tau = 3/2$ ) e dato un sistema di tipo  $h$ , la fase iniziale  $\varphi_0$  si calcola come (nell'esempio  $\varphi_0 = -h\frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$ ):

$$\begin{aligned} K_\tau > 0 & \quad \varphi_0 = -h\frac{\pi}{2} \\ K_\tau < 0 & \quad \varphi_0 = -\pi - h\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La fase iniziale coincide (a meno di un eventuale multiplo intero di  $2\pi$ ) con la fase della funzione approssimante  $G_0(s)$ .

2. Detto  $K_p$  il guadagno del sistema nella forma poli-zeri, per una funzione  $G(s)$  di grado relativo  $r$ , la fase  $\varphi_\infty$  per  $\omega \rightarrow \infty$  risulta: (nell'esempio  $K_p = 10$ ,  $\varphi_\infty = -\frac{3}{2}\pi$ ):

$$\begin{aligned} K_p > 0 & \quad \varphi_\infty = -r\frac{\pi}{2} \\ K_p < 0 & \quad \varphi_\infty = -\pi - r\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

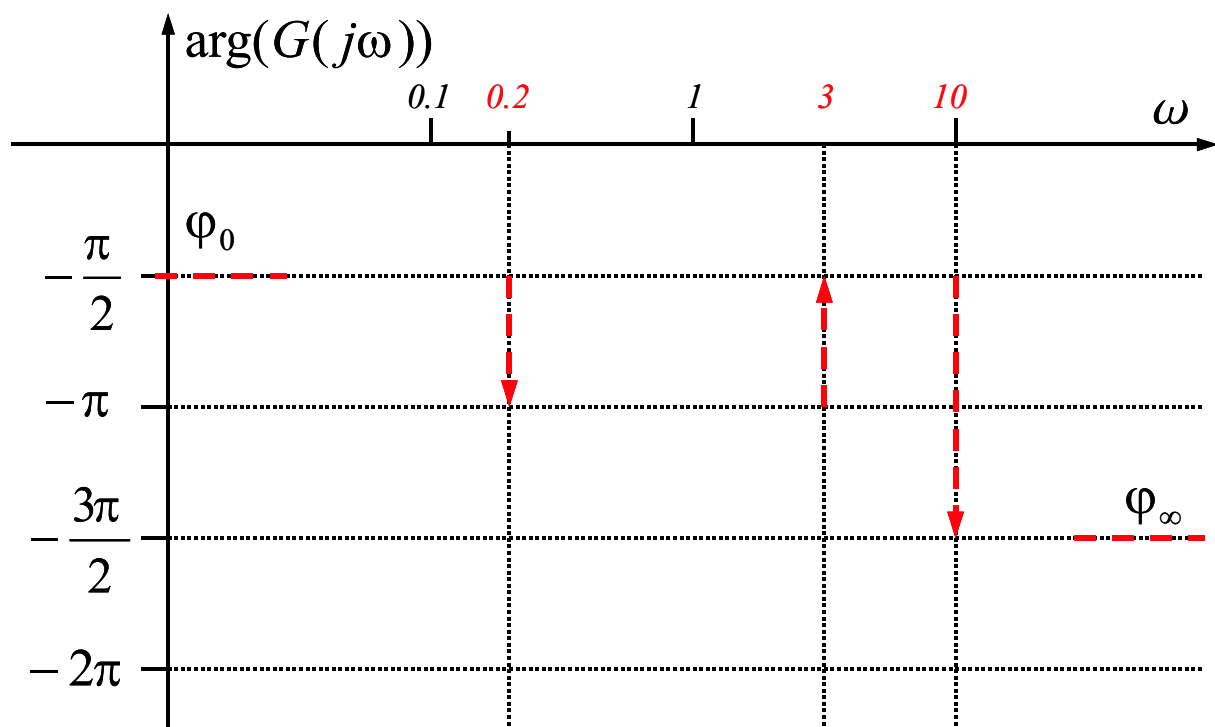
La fase finale coincide (a meno di un eventuale multiplo intero di  $2\pi$ ) con la fase della funzione approssimante  $G_\infty(s)$ .

3. Percorrendo le pulsazioni critiche in ordine crescente si determinano le fasce orizzontali in cui ogni polo o zero (semplice o complesso e coniugato) evidenzia il suo contributo sulla fase. Il primo polo o zero che si incontra (pulsazione  $\omega_1$ ) individua la fascia ( $\varphi_0, \varphi_1 = \varphi_0 + \Delta\varphi_1$ ) dove  $\Delta\varphi$  deriva dalle proprietà dei diagrammi di bode elementari:

$$\Delta\varphi = \begin{cases} -\pi/2 & \text{polo stabile o zero instabile} \\ \pi/2 & \text{zero stabile o polo instabile} \\ -\pi & \text{polo cc stabile o zero cc instabile} \\ +\pi & \text{zero cc stabile o polo cc instabile} \end{cases}$$

Successivamente l' $i$ -esimo polo o zero che si incontra (pulsazione  $\omega_i$ ) individua la fascia ( $\varphi_{i-1}, \varphi_i = \varphi_{i-1} + \Delta\varphi_i$ ).

Conviene rappresentare con una freccia verticale i contributi di fase di ciascun termine in corrispondenza delle pulsazioni critiche:



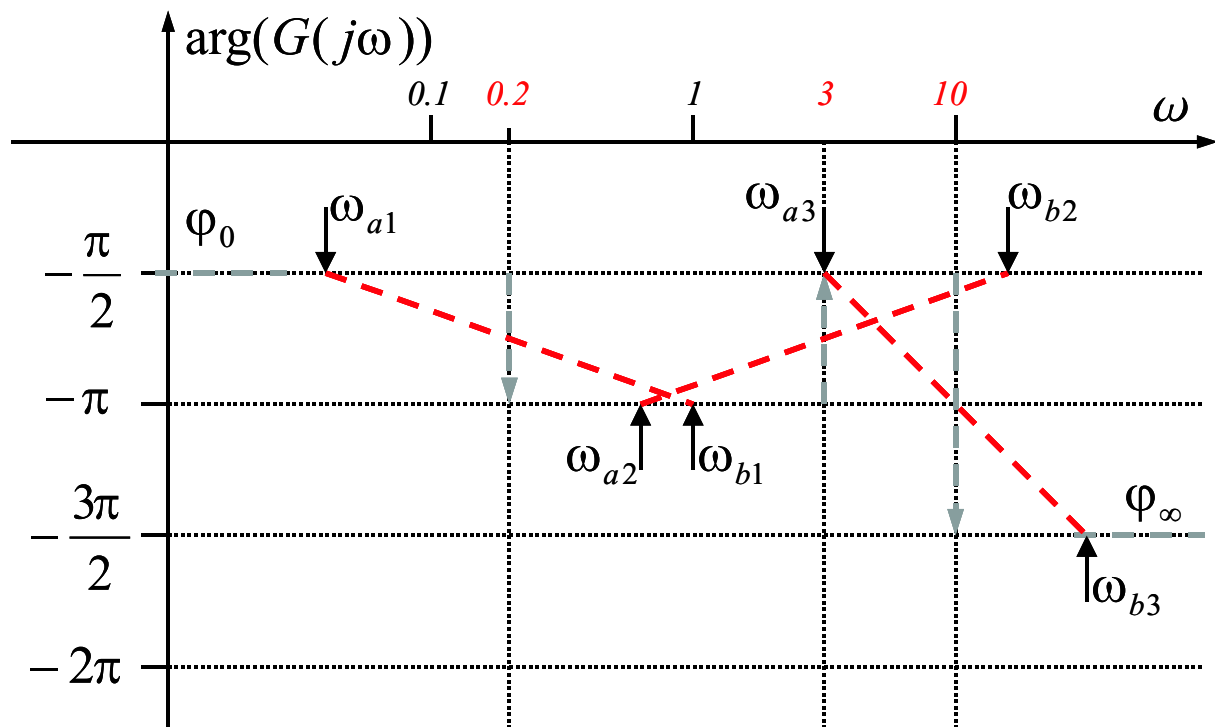
4. Tratteggiare il contributo in fase di ogni polo o zero intorno alla corrispondente freccia, riconducendosi alle proprietà dei diagrammi elementari.

In particolare l'intervallo di pulsazioni  $(\omega_{ai}, \omega_{bi})$  all'interno del quale si ha la variazione di fase da  $\varphi_{i-1}$  a  $\varphi_i$  dovuta all' $i$ -esimo polo o zero (pulsazione  $\omega_i$ ) è dato da:

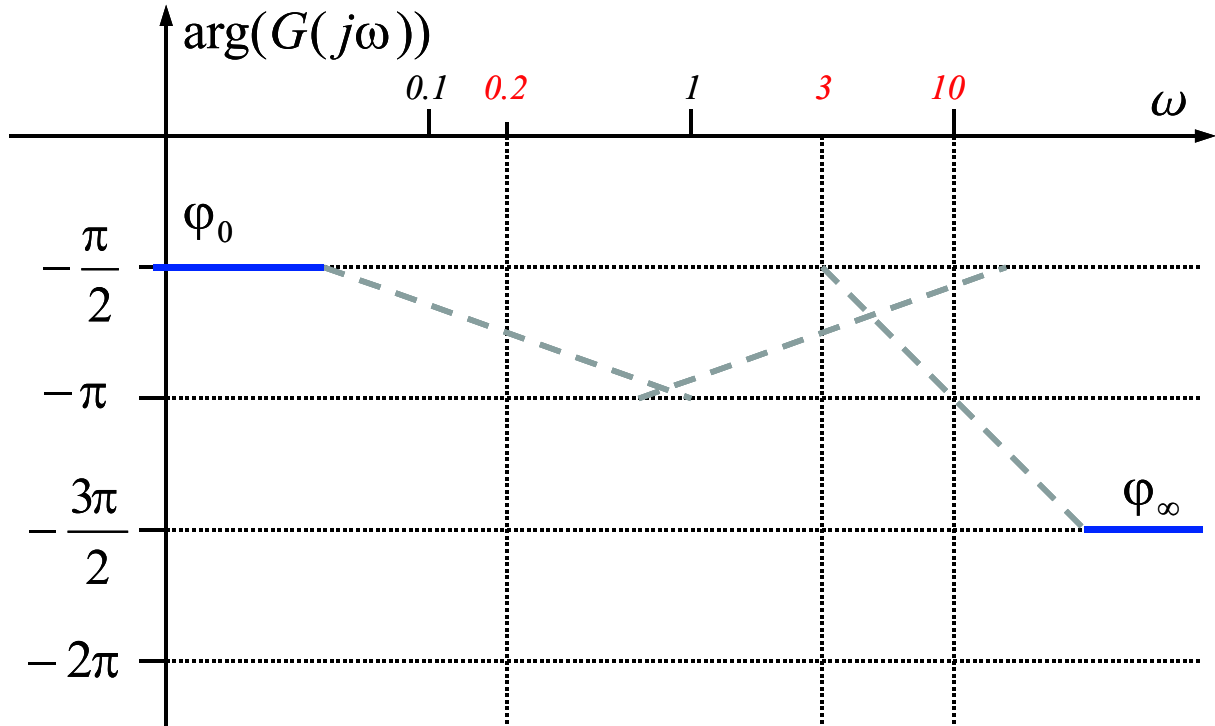
$$\omega_{ai} = \frac{\omega_i}{4.81} \quad \omega_{bi} = 4.81\omega_i \quad \text{Poli o zeri semplici}$$

$$\omega_{ai} = \frac{\omega_i}{4.81^{\delta_i}} \quad \omega_{bi} = 4.81^{\delta_i}\omega_i \quad \text{Poli o zeri complessi e coniugati}$$

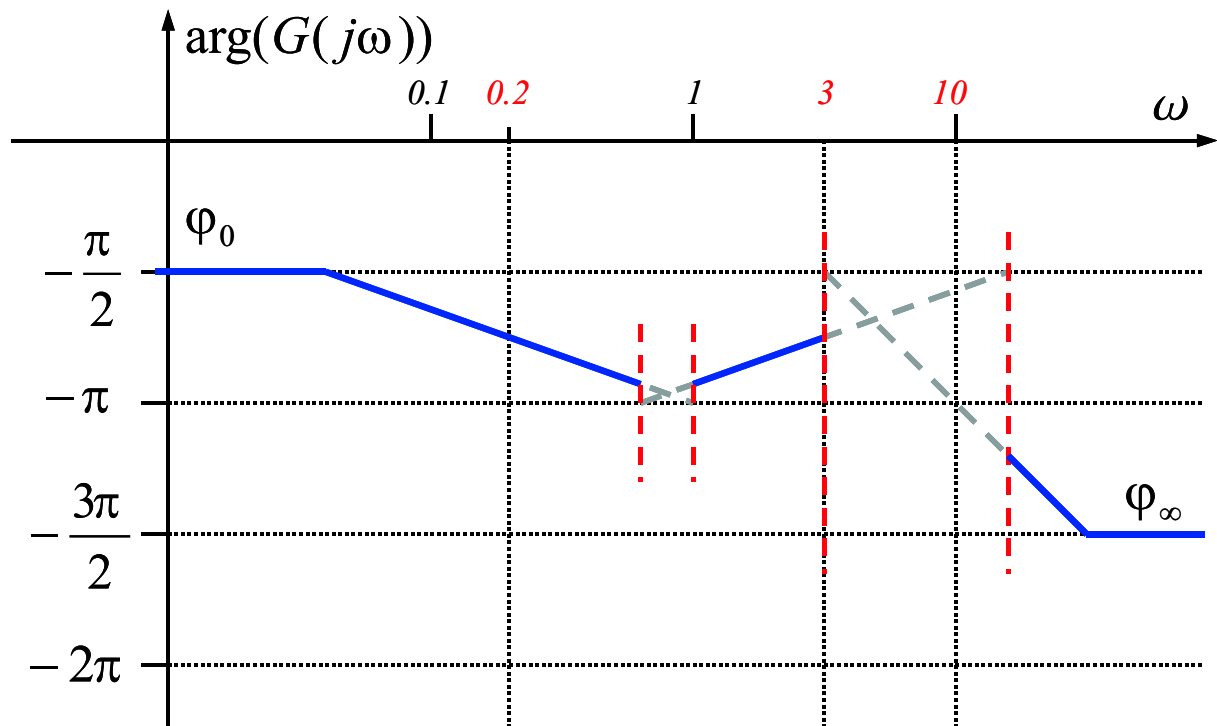
dove  $\delta_i \in ]-1, 1[$  è il coefficiente di smorzamento delle coppie di poli o zeri complessi e coniugati.



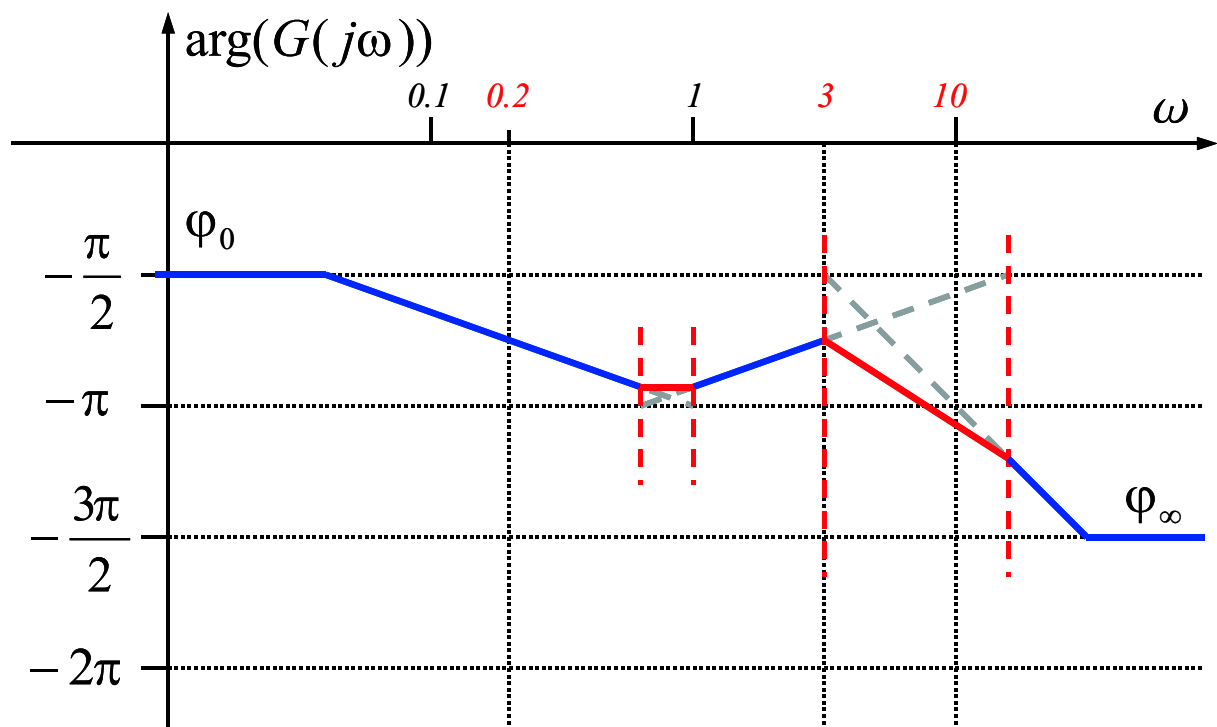
5. Per  $\omega$  sufficientemente piccole ( $\omega \leq \omega_{a1}$ ) il diagramma asintotico delle fasi è orizzontale e coincide con la fase  $\varphi_0$ . Per  $\omega$  sufficientemente grandi ( $\omega \geq \omega_{b3}$ ) il diagramma asintotico delle fasi è orizzontale e coincide con la fase  $\varphi_\infty$ .



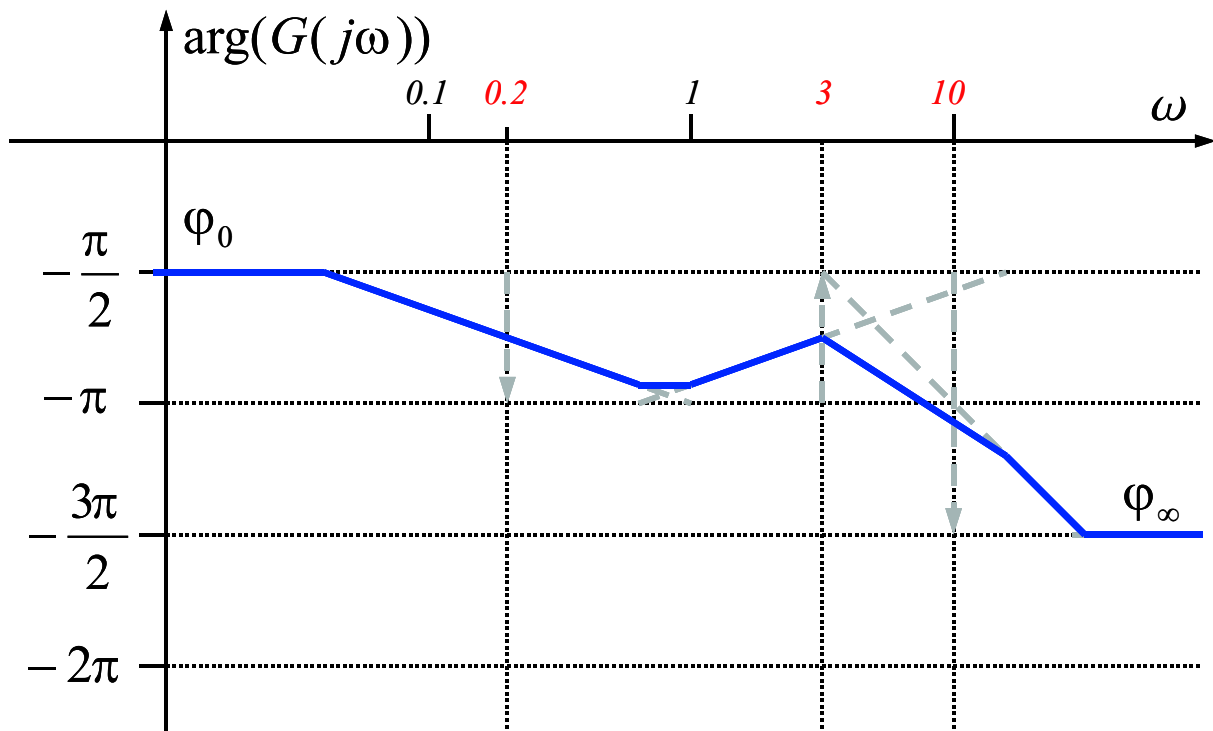
6. Nelle fasce verticali dove è presente un solo tratteggio inclinato il diagramma delle fasi coincide esattamente con il tratteggio.



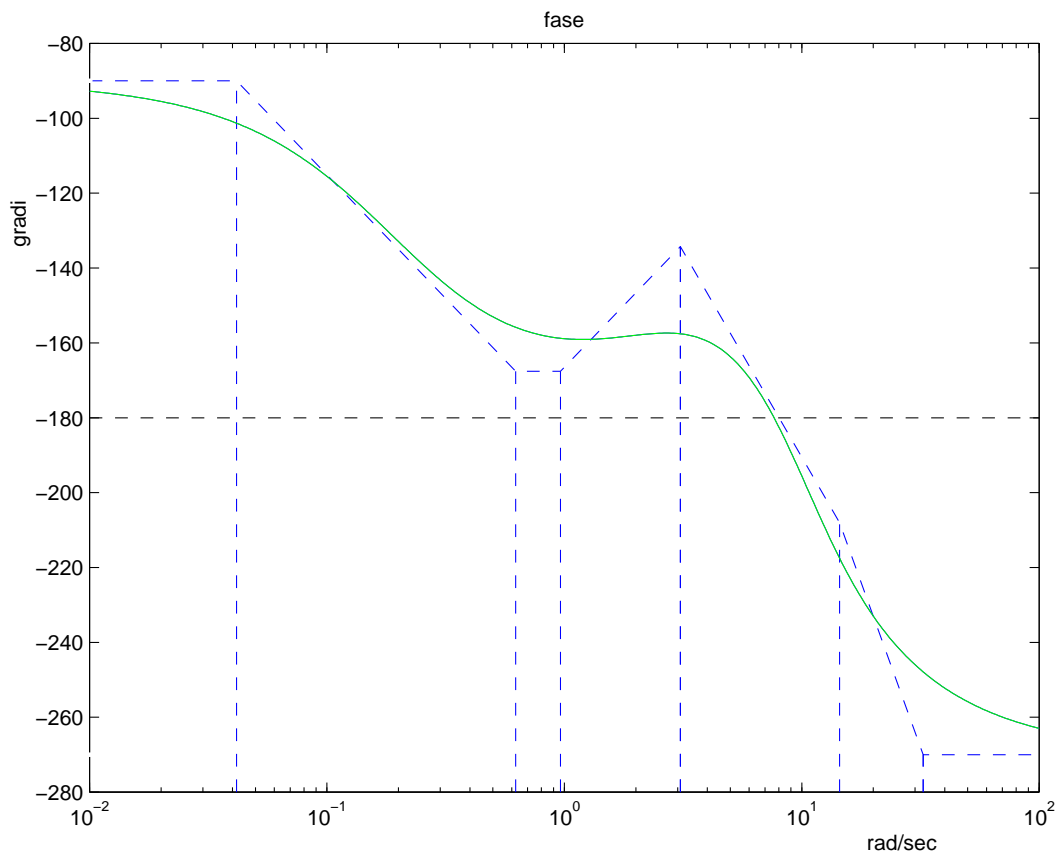
Nei tratti in cui due o più contributi si sommano, la pendenza complessiva del diagramma è data dalla somma algebrica delle pendenze dovute ai singoli contributi.



7. Il diagramma asintotico delle fasi risulta:



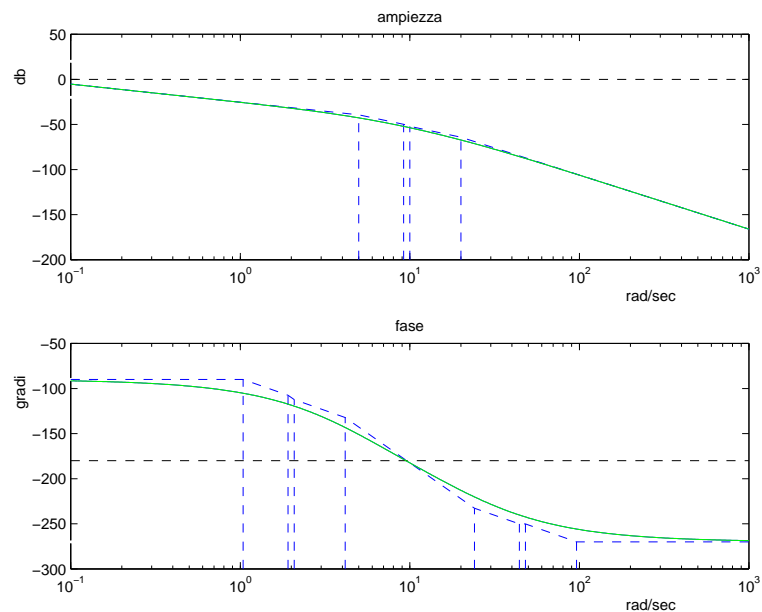
Le maggiori differenze tra il diagramma reale e quello asintotico si hanno in corrispondenza dei cambiamenti di pendenza del diagramma asintotico:



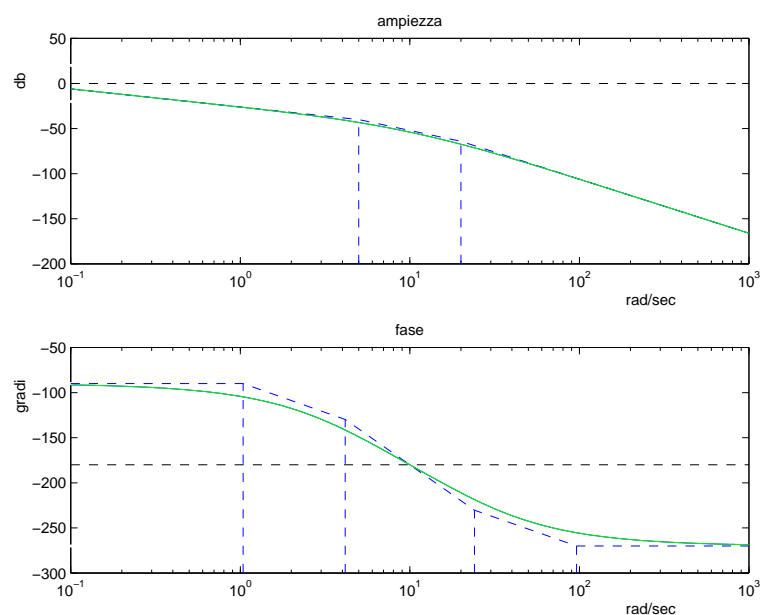
- NOTA: i diagrammi asintotici di Bode sono un'approssimazione dell'andamento reale della funzione di risposta armonica. Per tale motivo è possibile semplificare le coppie di poli e zeri che danno un contributo quasi uguale e contrario, senza alterare apprezzabilmente il diagramma risultante. Esempio:

$$H_1(s) = \frac{5(s + 10)}{s(s + 5)(s + 9.2)(s + 20)} \simeq \frac{5}{s(s + 5)(s + 20)} = H_2(s)$$

- Funzione  $H_1(s)$



- Funzione  $H_2(s)$



## Uso dei diagrammi di Bode

1. Studio della stabilità e delle proprietà dinamiche di un sistema.
2. Determinare la risposta temporale di un sistema sollecitato da un segnale sinusoidale senza ricorrere alle antitrasformate. Consideriamo il sistema con ingresso  $x$  e uscita  $y$  descritto dalla solita funzione di trasferimento  $G(s)$ :

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = G(s) = \frac{10(s+3)}{s(s+0.2)(s^2+15s+100)} \rightarrow Y(s) = G(s)X(s)$$

Applicando in ingresso il segnale  $x(t) = A \sin(\omega t + \alpha)$  la risposta temporale  $y(t)$  del sistema è data da:

$$y(t) = A |G(j\omega)| \sin[\omega t + \alpha + \arg(G(j\omega))]$$

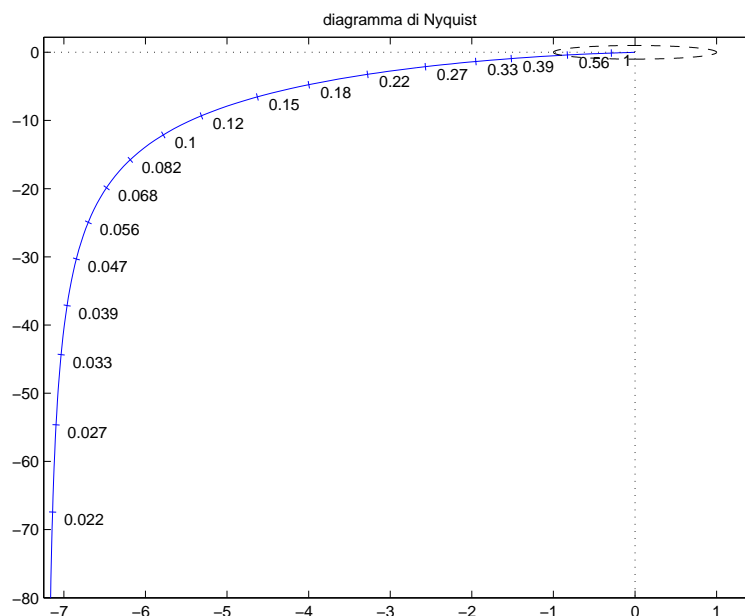
dove  $|G(j\omega)|$  e  $\arg(G(j\omega))$  si ricavano rispettivamente dai diagrammi di Bode delle ampiezze e delle fasi. Esempio, per  $\omega = 1$  si ha:

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &\simeq -10|_{\text{db}} \simeq 0.32 \\ \arg(G(j\omega)) &\simeq -160^\circ \simeq 2.8 \text{ rad} \end{aligned}$$

e quindi

$$y(t) = A |G(j\omega)| \sin[\omega t + \alpha + \arg(G(j\omega))] = 0.32 A \sin[t + \alpha + 2.8]$$

3. Tracciare i diagrammi polari di Nyquist:



## Graficazione mediante somma dei contributi

I diagrammi di Bode possono anche essere tracciati disegnando i singoli contributi e sommandoli graficamente.

a) La funzione  $G(s)$  viene messa nella forma "a costanti di tempo":

$$G(s) = \frac{10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)} \quad \rightarrow \quad G(s) = -\frac{10}{25} \frac{(1-s)}{s(1+s)(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})}$$

b) Si tracciano i diagrammi asintotici di Bode delle singole componenti:

$$K = -\frac{10}{25}, \quad G_1(s) = (1-s), \quad G_2(s) = \frac{1}{s}, \quad G_3(s) = \frac{1}{(1+s)}, \quad G_4(s) = \frac{1}{(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})}$$

c) Si sommano i singoli contributi per ottenere il diagramma asintotico della funzione  $G(s)$ .

- Il contributo del termine  $K$  è costante:  $|K| = -7.96$  db e  $\arg K = -\pi$ .
- Lo zero instabile  $(1-s)$ , e il polo stabile  $(1+s)^{-1}$  agiscono alla pulsazione  $\omega = 1$  e forniscono due contributi uguali e contrari nel diagramma delle ampiezze. Il loro contributo nel diagramma delle fasi si somma: l'ampiezza complessiva per  $\omega \rightarrow \infty$  è  $-\pi$ .
- La coppia di poli complessi coniugati  $(1+\frac{8s}{25}+\frac{s^2}{25})^{-1}$  determina sul diagramma asintotico delle ampiezze una attenuazione di  $-40$  db/dec a partire dalla pulsazione  $\omega_n = 5$ . Il contributo al diagramma delle fasi è negativo di ampiezza complessiva  $-\pi$  al variare di  $\omega$ . Le pulsazioni alle quali si ha un cambiamento di pendenza del diagramma asintotico di Bode delle fasi sono le seguenti

$$\omega_a = \frac{1}{4.81}, \quad \omega_b = 4.81, \quad \bar{\omega}_a = \frac{\omega_n}{4.81^\delta}, \quad \bar{\omega}_b = \omega_n 4.81^\delta$$

dove  $\delta = 0.8$  è il coefficiente di smorzamento della coppia di poli complessi coniugati.

- La difficoltà nell'utilizzare questo metodo sta nel fatto che la somma dei singoli contributi non è sempre agevole.

Diagrammi asintotici di Bode delle ampiezze e delle fasi della funzione  $G(s)$

