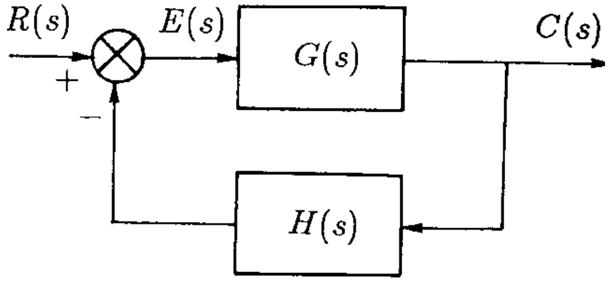
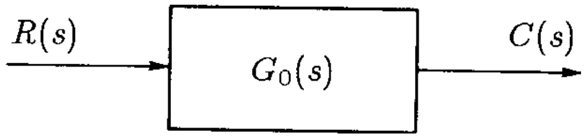
Proprieà generali dei sistemi in retroazione

- Sistema in retroazione e sua forma minima:





- Significato dei simboli:

  $r(t)$: *segnale di riferimento* (o "set point");

  $c(t)$: *variabile controllata*;

  $e(t)$: *segnale errore*;

  $G(s)$: *funzione di trasferimento del percorso diretto*;

  $H(s)$: *funzione di trasferimento del percorso in retroazione*);

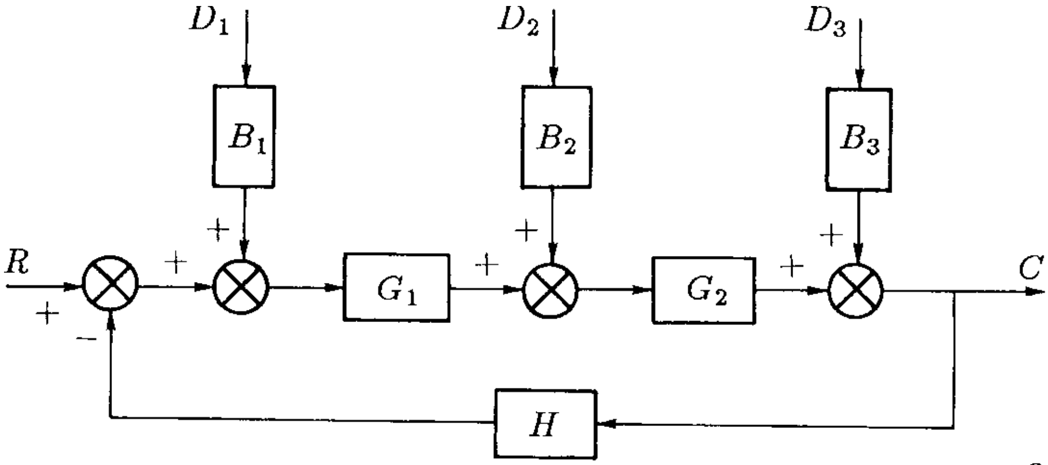
  $G(s)\,H(s)$: *guadagno di anello.*

- Funzione di trasferimento del sistema in forma minima:

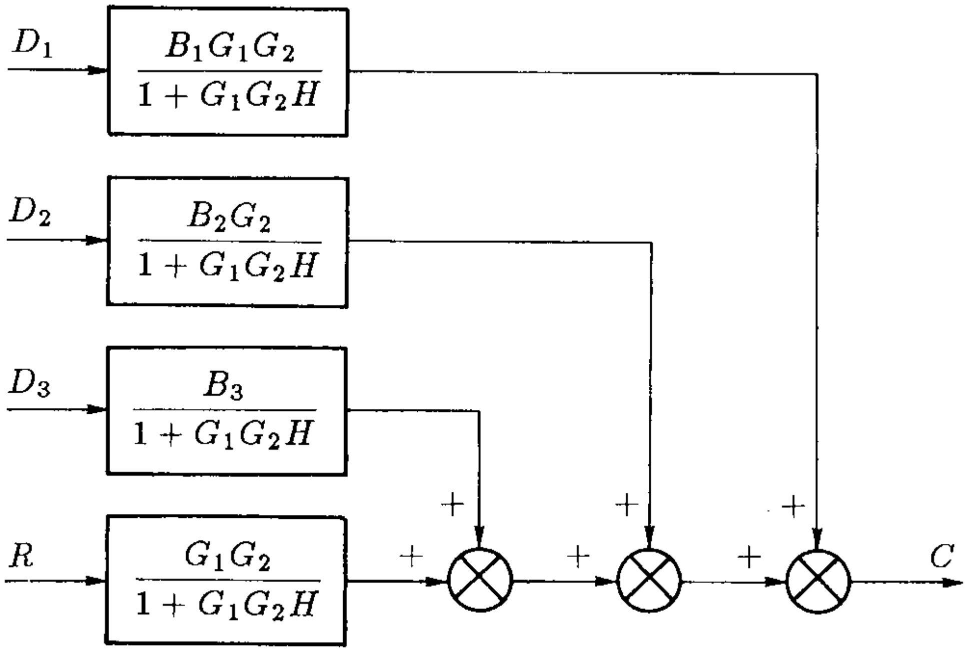
$$G_0(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)\,H(s)}$$

- Questa è la situazione teorica in assenza di disturbi e di variazioni parametriche

- Spesso accade che si abbiano sistemi a più ingressi (per esempio ingressi di disturbo) agenti in vari punti dell'anello.
- In questo caso la riduzione in forma minima viene fatta nel modo seguente:



a)



b)

- Nota: tutte le funzioni di trasferimento hanno lo stesso denominatore.

Sensibilità alla variazione di parametri

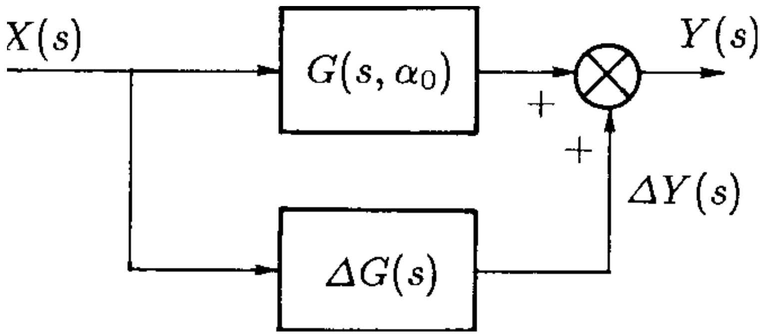
- Sia α un parametro della funzione di trasferimento $G(s)$ che subisca una piccola variazione $\Delta\alpha$ rispetto al valore nominale α_0. Sia $G(s,\alpha_0)$ la funzione di trasferimento "nominale". La nuova funzione di trasferimento si può scrivere, in prima approssimazione

$$G(s,\alpha_0+\Delta\alpha) = G(s) + \Delta G(s)$$

in cui per semplicità di notazione si è posto

$$G(s) = G(s,\alpha_0)\ , \quad \Delta G(s) = \left.\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha$$

- Se il sistema è soggetto a un segnale d'ingresso la cui trasformata sia $X(s)$, la variazione del parametro porta a una variazione dell'uscita la cui trasformata, in prima approssimazione, può esprimersi come $\Delta Y(s) = \Delta G(s)\, X(s)$.



- Nei sistemi in retroazione, l'effetto della variazione di un parametro è diverso a seconda che si verifichi nella catena di amplificazione diretta o nel percorso di retroazione.

- Una variazione della funzione di trasferimento della catena di amplificazione diretta $G(s)$ produce una variazione della funzione di trasferimento complessiva $G_0(s)$ molto minore,

- Una variazione della funzione di trasferimento del percorso di retroazione $H(s)$ produce in $G_0(s)$ una variazione dello stesso ordine di grandezza.

- In presenza della variazione $\Delta\alpha$ di un parametro della funzione di trasferimento del percorso di segnale diretto $G(s)$ si ha

$$\begin{aligned}\Delta G_0(s) &= \frac{\partial}{\partial G}\left(\frac{G}{1+G\,H}\right)\frac{\partial G}{\partial \alpha}\bigg|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha \\ &= \frac{1}{\left(1+G(s)\,H(s)\right)^2}\,\Delta G(s)\ ,\end{aligned}$$

- Per le variazioni relative vale la relazione

$$\boxed{\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1+G(s)\,H(s)}\,\frac{\Delta G(s)}{G(s)}}$$

- Per tutte le pulsazioni per le quali vale la condizione

$$|G(j\omega)\,H(j\omega)| \gg 1\ ,$$

si ha che

$$\frac{|\Delta G_0(j\omega)|}{|G_0(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|}$$

- L'errore relativo dovuto alla variazione di un parametro di $G(s)$ e per le frequenze per le quali il guadagno di anello è sufficientemente elevato è molto minore nel sistema in retroazione che non nel sistema ad anello aperto.

- Nel caso di una variazione $\Delta\beta$ di un parametro di $H(s)$ si ha invece che:

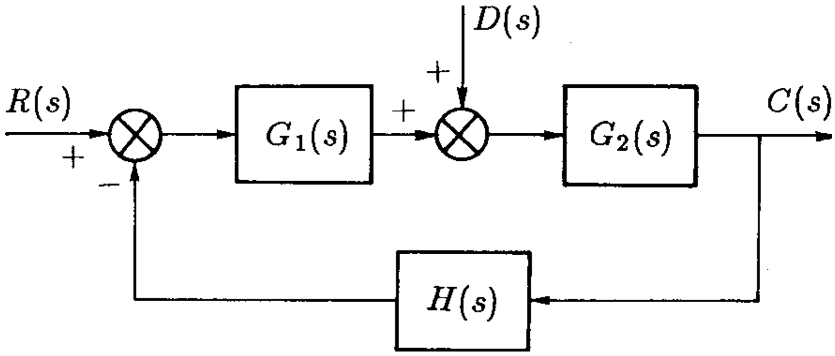
$$\boxed{\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{-G(s)\,H(s)}{1+G(s)\,H(s)}\,\frac{\Delta H(s)}{H(s)}}$$

cioè gli errori relativi sono dello stesso ordine di grandezza.

$$\frac{|\Delta G_0(j\omega)|}{|G_0(j\omega)|} \simeq \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|}$$

• Sensibilità ai disturbi

- Sia $d(t)$ un disturbo che agisce in un punto della catena di amplificazione diretta, in un sistema di controllo in retroazione



- In assenza e in presenza di retroazione le trasformate della variazione dell'uscita dovuta al disturbo sono rispettivamente

$$\begin{aligned} C'_d(s) &= G_2(s)\,D(s)\ , \\ C''_d(s) &= \frac{G_2(s)}{1+G(s)\,H(s)}\,D(s)\ , \quad \text{con } G(s){=}G_1(s)\,G_2(s)\ . \end{aligned}$$

- I rapporti segnale/disturbo all'uscita valgono rispettivamente

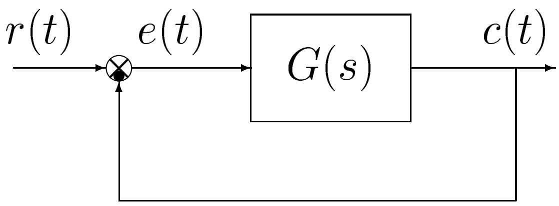
$$\begin{aligned} \frac{C'_r(s)}{C'_d(s)} &= \frac{G_0(s)}{G_2(s)}\,\frac{R(s)}{D(s)}\ , \\ \frac{C''_r(s)}{C''_d(s)} &= \big(1+G(s)\,H(s)\big)\,\frac{G_0(s)}{G_2(s)}\,\frac{R(s)}{D(s)} \end{aligned}$$

- In presenza di retroazione il rapporto segnale/disturbo viene modificato nel rapporto di 1 a $|1{+}G(j\omega)\,H(j\omega)|$ e pertanto fortemente aumentato se nella banda di frequenza del disturbo vale la relazione

$$|G(j\omega)\,H(j\omega)| \gg 1$$

Errori a regime

- Si faccia riferimento al seguente schema a retroazione unitaria:



Nel caso di segnali di ingresso a gradino, a rampa e a parabola:

$$r(t) = R_0 u(t) \qquad r(t) = R_0 t \qquad r(t) = \frac{R_0}{2} t^2$$

per il calcolo degli errori a regime si utilizzano le seguenti formule:

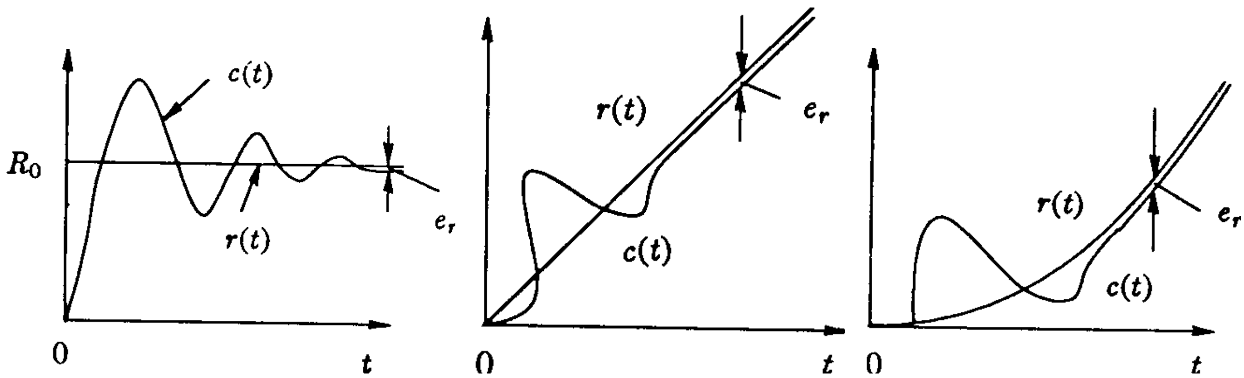
$$\boxed{e_p = \frac{R_0}{1 + K_p}}, \qquad \boxed{e_v = \frac{R_0}{K_v}}, \qquad \boxed{e_a = \frac{R_0}{K_a}}$$

dove K_p, K_v e K_a:

$$K_p = \lim_{s \to 0} G(s), \qquad K_v = \lim_{s \to 0} sG(s), \qquad K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s)$$

sono le costanti di posizione, di velocità e di accelerazione.

- Andamenti temporali.



- Ingresso a gradino:

$$e_r = \frac{R_0}{1 + K_p} \ . \qquad (4.28)$$

Se il sistema è di tipo 0, è $K_p = K$, cioè la costante di posizione coincide con il guadagno statico; se esso è di tipo 1 o 2 è $K_p = \infty$ e l'errore di posizione a regime è nullo: ciò è intuitivo perché in tali sistemi il guadagno di anello per pulsazione nulla è infinito.

- Ingresso a rampa:

$$e_r = \frac{R_0}{K_v} \ . \qquad (4.31)$$

Se il sistema è di tipo 0, si ha $K_v = 0$ e quindi l' errore a regime nella risposta alla rampa è infinito; se esso è di tipo 1, si ha $K_v = K$ e l'errore è R_0/K, se è di tipo 2, si ha $K_v = \infty$ e l'errore è nullo.

- Ingresso a parabola:

$$e_r = \frac{R_0}{K_a} \ . \qquad (4.34)$$

Se il sistema è di tipo 0 o di tipo 1, si ha $K_a = 0$, e quindi l'errore è infinito; se è di tipo 2, si ha $K_a = K$, e quindi l'errore è pari a R_0/K.

- Principio del modello interno: affinché sia neutralizzato (con errore nullo a regime) un modo corrispondente ad un polo nell'origine di ordine h, occorre generare lo stesso modo nel regolatore, che pertanto deve avere un polo nell'origine pure di ordine h o superiore, cioè contenere un modello del sistema elementare $1/s^h$ che genera quel modo.