Esempio sulla Funzione di Risposta Armonica

Consideriamo un sistema lineare descritto dalla funzione di trasferimento del primo ordine:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau s}$$

La funzione di risposta armonica risulta:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

I diagrammi reali (non asintotici) di Bode della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ sono:

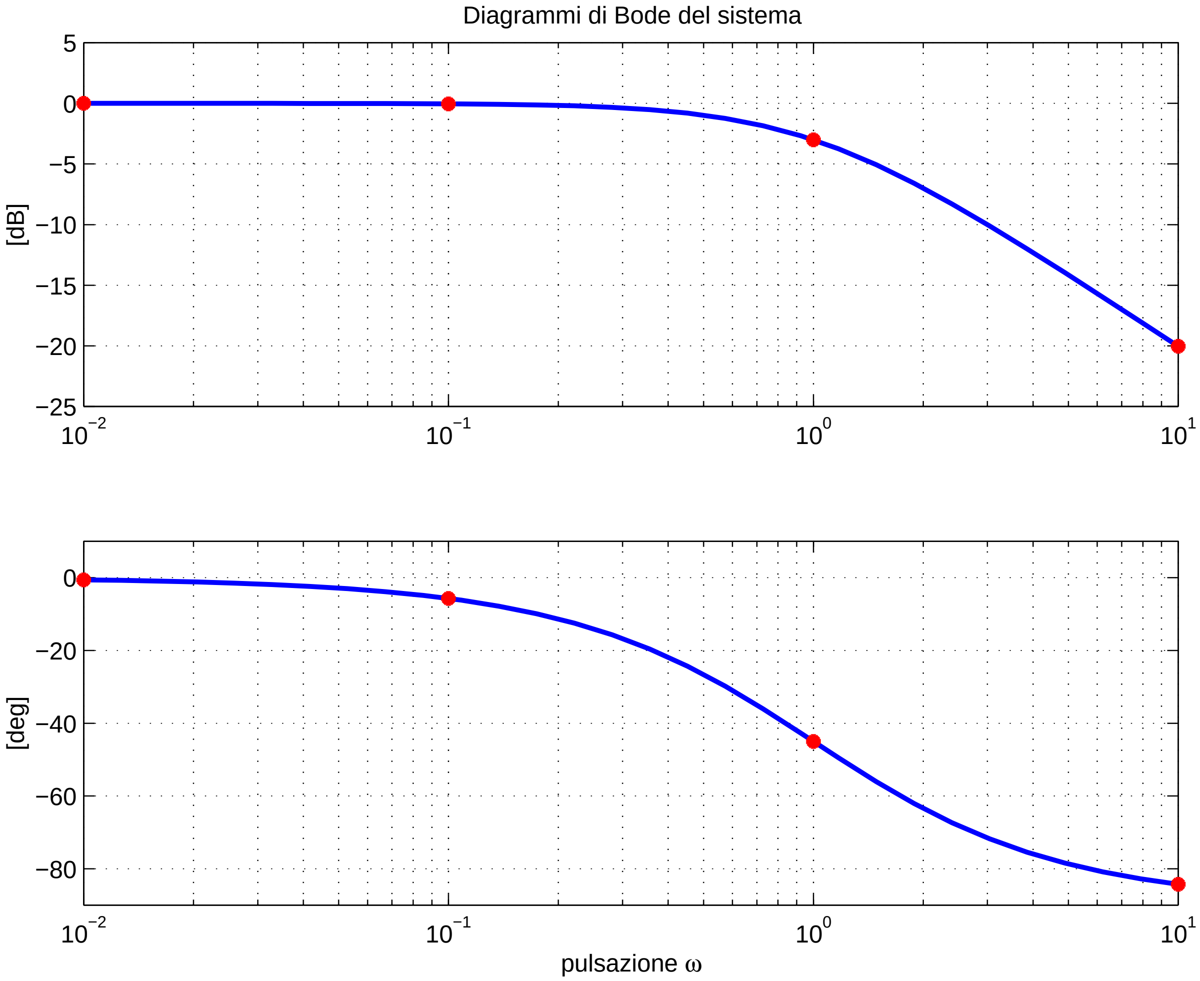

Figura 1: Diagramma di Bode della funzione $G(j\omega)$.

Al variare della pulsazione ω il modulo e la fase della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ si possono facilmente calcolare:

$$G(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}$$

$$\angle G(j\omega) = -\arctan(\omega\tau)$$

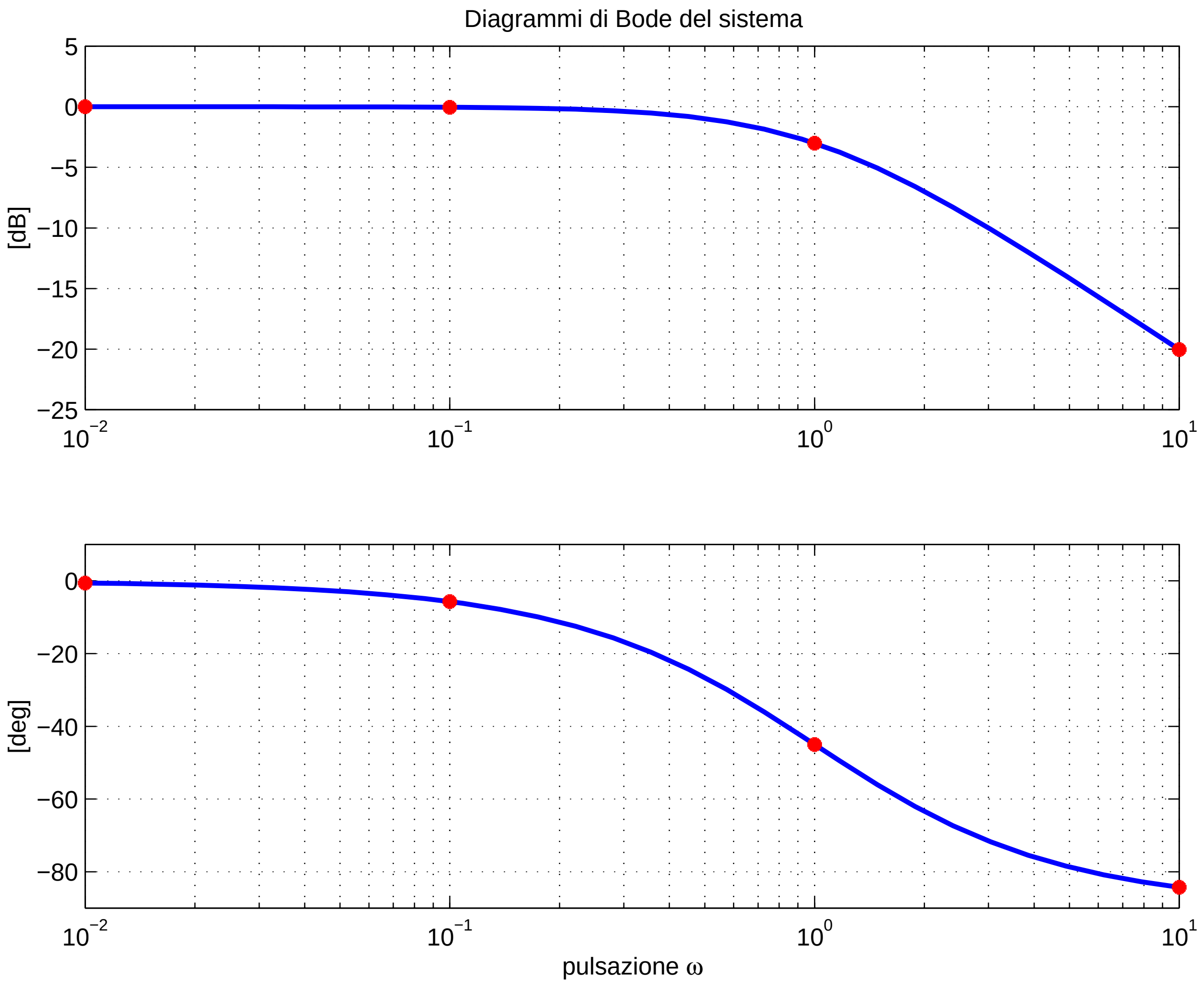

Figura 2: Diagramma di Bode della funzione $G(j\omega)$.

Consideriamo $\omega = 0.01 = 10^{-2} \ll 1/\tau$ e applichiamo il segnale di ingresso $x(t)$:

$$x(t) = \sin(\omega\ t) = \sin(0.01\ t)$$

Dalla espressione del modulo e della fase della funzione di risposta armonica, o equivalentemente dal diagramma di Bode corrispondente, si ricava:

$$G(j0.01) = 0.9999 - j0.01$$

$$|G(j0.01)| = 0.99995$$

$$\angle G(j0.01) = -0.01 \text{ rad}$$

$$y(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega\ t + \angle G(j\omega)) = 1 \sin(0.01\ t - 0.01)$$

A regime (esaurito il transitorio) l'ampiezza della sinusoide di uscita risulta quasi esattamente uguale all'ampiezza del segnale di ingresso.
La fase della funzione di risposta armonica molto piccola e corrisponde a un ritardo della sinusoide di uscita rispetto alla sinusoide di ingresso pari a

$$t_d = -T\frac{\angle G(j\omega)}{2\pi} = -\frac{\angle G(j\omega)}{\omega} = -\frac{-0.01}{0.01} = 1s$$

$$\left|\frac{t_d}{T}\right| = \left|t_d\ \frac{\omega}{2\pi}\right| = 0.0016 = 0.16\%$$

Le sinusoidi di ingresso e di uscita sono praticamente indistinguibili:

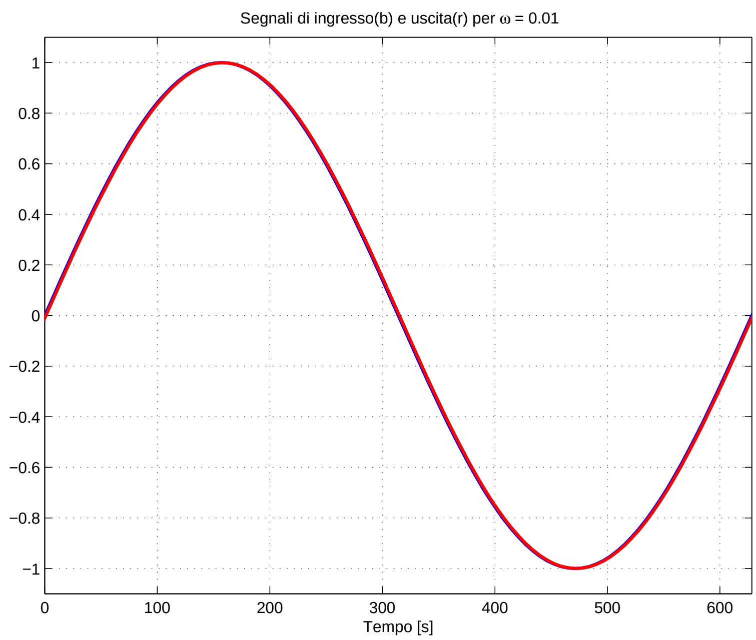

Figura 3: Andamento a regime del segnale di ingresso $x(t)$ (blu) e della risposta $y(t)$ (rosso) per $\omega = 0.01$.

Consideriamo $\omega = 0.1 = 10^{-1} < 1/\tau$ e applichiamo il segnale di ingresso $x(t)$:

$$x(t) = \sin(\omega\ t) = \sin(0.1\ t)$$

Dalla espressione del modulo e della fase della funzione di risposta armonica, o equivalentemente dal diagramma di Bode corrispondente, si ricava:

$$G(j0.1) = 0.9901 - j0.099$$

$$|G(j0.1)| = 0.995$$

$$\angle G(j0.1) = -0.0997 \text{ rad}$$

$$y(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega\ t + \angle G(j\omega)) = 0.995 \sin(0.1\ t - 0.0997)$$

A regime (esaurito il transitorio) l'ampiezza della sinusoide di uscita risulta quasi esattamente uguale all'ampiezza del segnale di ingresso.
La fase della funzione di risposta armonica è molto piccola e corrisponde a un ritardo della sinusoide di uscita rispetto alla sinusoide di ingresso pari a

$$t_d = -T\frac{\angle G(j\omega)}{2\pi} = -\frac{\angle G(j\omega)}{\omega} = -\frac{-0.099}{0.1} = 0.9967s$$

$$\left|\frac{t_d}{T}\right| = \left|t_d\ \frac{\omega}{2\pi}\right| = 0.0159 = 1.59\%$$

Le sinusoidi di ingresso e di uscita sono quasi indistinguibili:

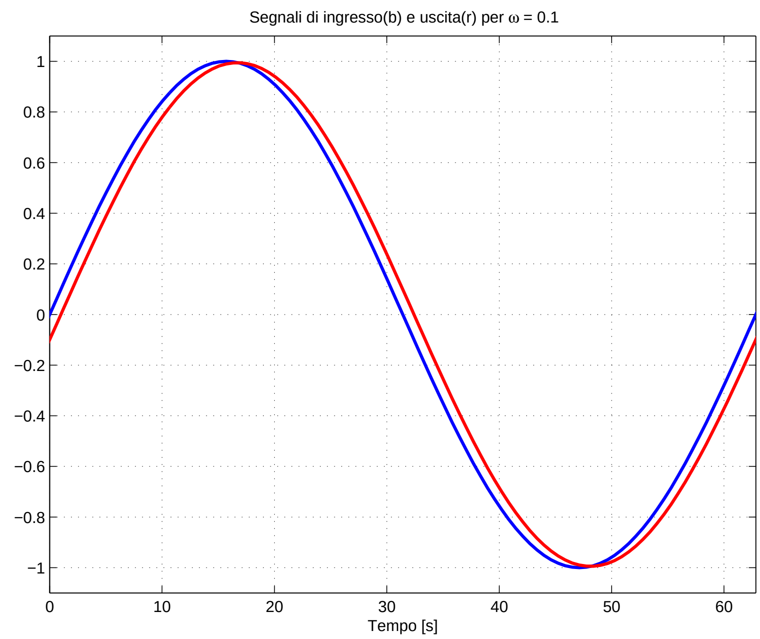

Figura 4: Andamento a regime del segnale di ingresso $x(t)$ (blu) e della risposta $y(t)$ (rosso) per $\omega = 0.1$.

Consideriamo $\omega = 1 = 10^0 = 1/\tau$ e applichiamo il segnale di ingresso $x(t)$:

$$x(t) = \sin(\omega\ t) = \sin(1\ t)$$

Dalla espressione del modulo e della fase della funzione di risposta armonica, o equivalentemente dal diagramma di Bode corrispondente, si ricava:

$$G(j1) = 0.5000 - j0.5000$$

$$|G(j1)| = 0.7071 = \sqrt{2}$$

$$\angle G(j1) = -0.7854 \text{ rad} = \pi/4 \text{ rad}$$

$$y(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega\ t + \angle G(j\omega)) = \sqrt{2}\sin(1\ t - \pi/4)$$

A regime (esaurito il transitorio) l'ampiezza della sinusoide di uscita risulta circa il 70% dell'ampiezza del segnale di ingresso.
La fase della funzione di risposta armonica determina un ritardo della sinusoide di uscita rispetto alla sinusoide di ingresso pari a:

$$t_d = -T\frac{\angle G(j\omega)}{2\pi} = -\frac{\angle G(j\omega)}{\omega} = -\frac{-0.7854}{1} = 0.7854s$$

$$\left|\frac{t_d}{T}\right| = \left|t_d\ \frac{\omega}{2\pi}\right| = 0.125 = 12.5\%$$

Le sinusoidi di ingresso e di uscita sono facilmente distinguibili:

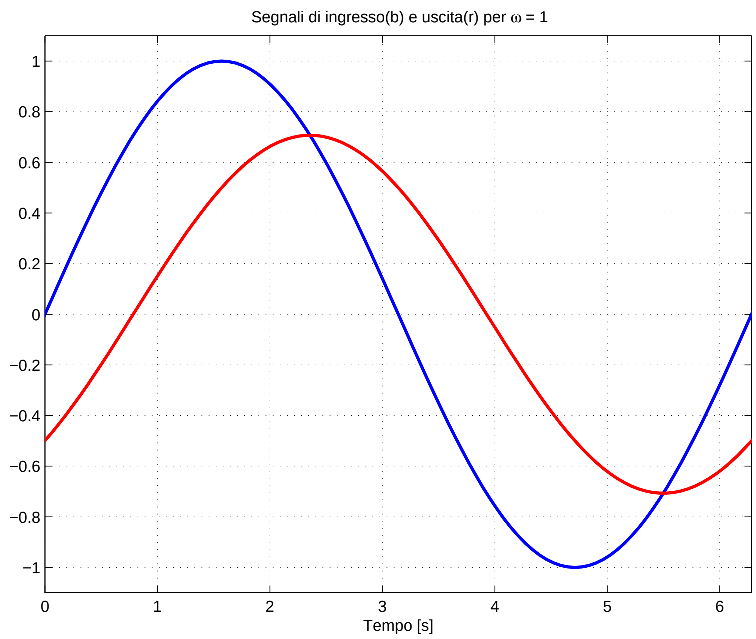

Figura 5: Andamento a regime del segnale di ingresso $x(t)$ (blu) e della risposta $y(t)$ (rosso) per $\omega = 1$.

Consideriamo $\omega = 10 = 10^1 > 1/\tau$ e applichiamo il segnale di ingresso $x(t)$:

$$x(t) = \sin(\omega\ t) = \sin(10\ t)$$

Dalla espressione del modulo e della fase della funzione di risposta armonica, o equivalentemente dal diagramma di Bode corrispondente, si ricava:

$$G(j10) = 0.0099 - j0.099$$

$$|G(j10)| = 0.0995$$

$$\angle G(j10) = -1.4711 \text{ rad} \backsimeq \pi/2$$

$$y(t) = |G(j\omega)| \sin(\omega\ t + \angle G(j\omega)) = 0.0995 \sin(10\ t - 1.4711)$$

A regime (esaurito il transitorio) l'ampiezza della sinusoide di uscita risulta circa il 10% dell'ampiezza del segnale di ingresso.

La fase della funzione di risposta armonica determina un ritardo della sinusoide di uscita rispetto alla sinusoide di ingresso di quasi $1/4$ di periodo:

$$t_d = -T\frac{\angle G(j\omega)}{2\pi} = -\frac{\angle G(j\omega)}{\omega} = -\frac{-1.4711}{10} = 0.1471s$$

$$\left|\frac{t_d}{T}\right| = \left|t_d\ \frac{\omega}{2\pi}\right| = 0.234 = 23.4\%$$

La sinusoide di uscita è molto attenuata e ritardata rispetto all'ingresso:

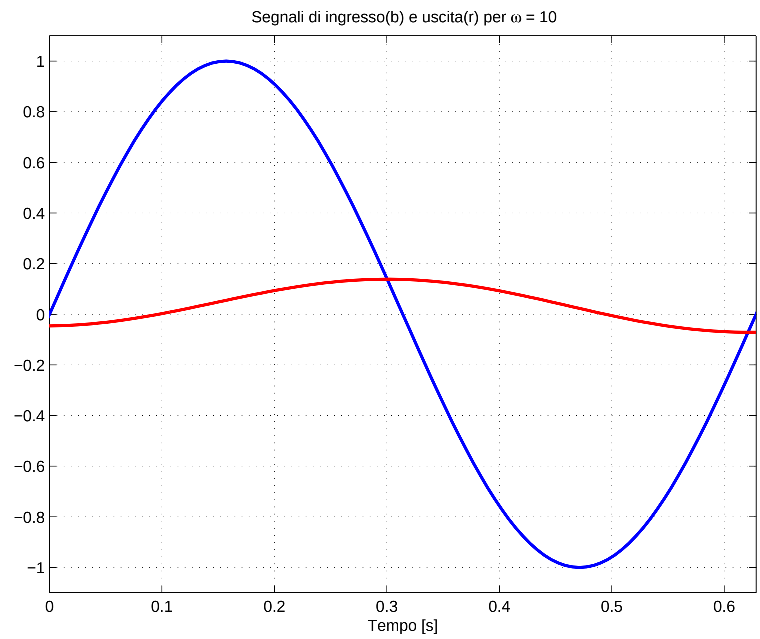

Figura 6: Andamento a regime del segnale di ingresso $x(t)$ (blu) e della risposta $y(t)$ (rosso) per $\omega = 10$.