

## La funzione di risposta armonica

- Se ad un sistema lineare stazionario *asintoticamente stabile* si applica in ingresso un segnale sinusoidale  $x(t) = X \sin \omega t$  di pulsazione  $\omega$ :

$$\begin{array}{ccc}
 x(t) = X \sin \omega t & \xrightarrow{\quad} & \boxed{F(\omega)} \xrightarrow{\quad} y(t) \simeq Y(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)] \\
 X(s) = X \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} & & Y(s) = G(s)X(s)
 \end{array}$$

esaurito il transitorio, si ottiene che l'uscita è anch'essa di tipo sinusoidale con la stessa pulsazione  $\omega$ :

$$y(t) = Y(\omega) \sin [\omega t + \varphi(\omega)]$$

- L'ampiezza  $Y(\omega)$  dell'uscita e lo sfasamento  $\varphi(\omega)$  rispetto all'ingresso sono in generale funzioni della pulsazione  $\omega$ .
- Si definisce *funzione di risposta armonica* la funzione complessa  $F(\omega)$  di variabile reale  $\omega$  definita come segue:

$$F(\omega) := \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X} [\cos \varphi(\omega) + j \sin \varphi(\omega)]$$

- Essa descrive il comportamento del sistema in condizione di regime periodico alle varie frequenze ed è definita nel dominio  $0 \leq \omega < \infty$ . In virtù della linearità del sistema, la funzione  $F(\omega)$  è indipendente da  $X$ .
- **Teorema.** *Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento  $G(s)$  razionale fratta avente i poli a parte reale negativa soggetto ad eccitazione sinusoidale presenta, a regime, una risposta sinusoidale avente la stessa frequenza dell'eccitazione. La funzione di risposta armonica  $F(\omega)$  è legata alla funzione di trasferimento  $G(s)$  dalla relazione:*

$$F(\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega)$$

- **Dim.** La trasformata di Laplace del segnale di uscita, a partire da una condizione iniziale di quiete, è data dalla relazione:

$$Y(s) = G(s) X(s) = G(s) \frac{X \omega}{s^2 + \omega^2} = G(s) \frac{X \omega}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

I poli della funzione  $Y(s)$  sono gli stessi della funzione di trasferimento  $G(s)$  più quelli corrispondenti al segnale di ingresso che sono  $p_{1,2} = \pm j\omega$ .

- Nell'antitrasformata della  $Y(s)$  è presente un termine transitorio  $y_0(t)$ , dovuto ai poli di  $G(s)$ , e un termine permanente  $y_p(t)$  di tipo sinusoidale:

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = y_0(t) + M_1 \cos[\omega t + \varphi_1]$$

I parametri  $M_1$  e  $\varphi_1$  sono funzioni dei residui  $K_{1,2}$  dei poli  $p_{1,2}$ :

$$K_1 = G(s) \frac{X \omega}{s + j\omega} \Big|_{s=j\omega} = \frac{X}{2j} G(j\omega) \quad K_2 = K_1^*$$

- Ricordando che il sistema è asintoticamente stabile e che

$$M_1 = 2 |K_1| = X |G(j\omega)|, \quad \varphi_1 = \arg(K_1) = \arg G(j\omega) - \frac{\pi}{2}$$

per  $t$  sufficientemente elevato si ha che:

$$\begin{aligned} y(t) &\simeq y_p(t) = X |G(j\omega)| \cos[\omega t + \arg G(j\omega) - \frac{\pi}{2}] \\ &= \underbrace{X |G(j\omega)|}_{Y(\omega)} \sin \left[ \omega t + \underbrace{\arg G(j\omega)}_{\varphi(\omega)} \right] \end{aligned}$$

- La funzione di risposta armonica può essere definita anche per sistemi instabili, ma in questo caso non è misurabile sperimentalmente.
- *La risposta all'impulso  $g(t)$  di un sistema lineare asintoticamente stabile determina univocamente la sua risposta armonica  $F(\omega)$ :*

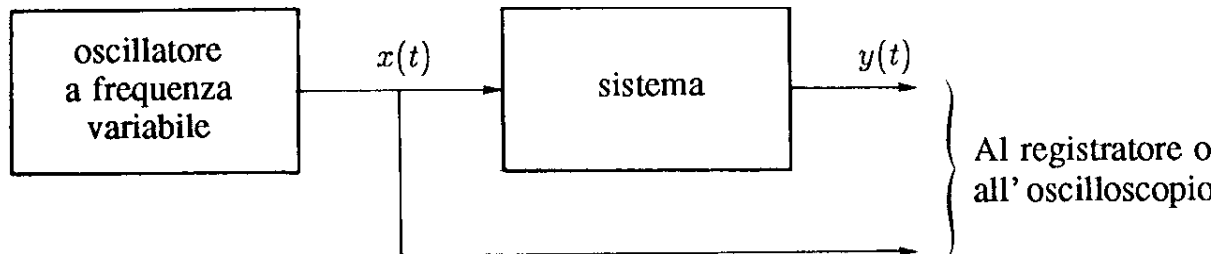
$$g(t) \longleftrightarrow G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = F(\omega)$$

- *La risposta armonica  $F(\omega)$  di un sistema lineare asintoticamente stabile determina univocamente la sua risposta all'impulso  $g(t)$ :*

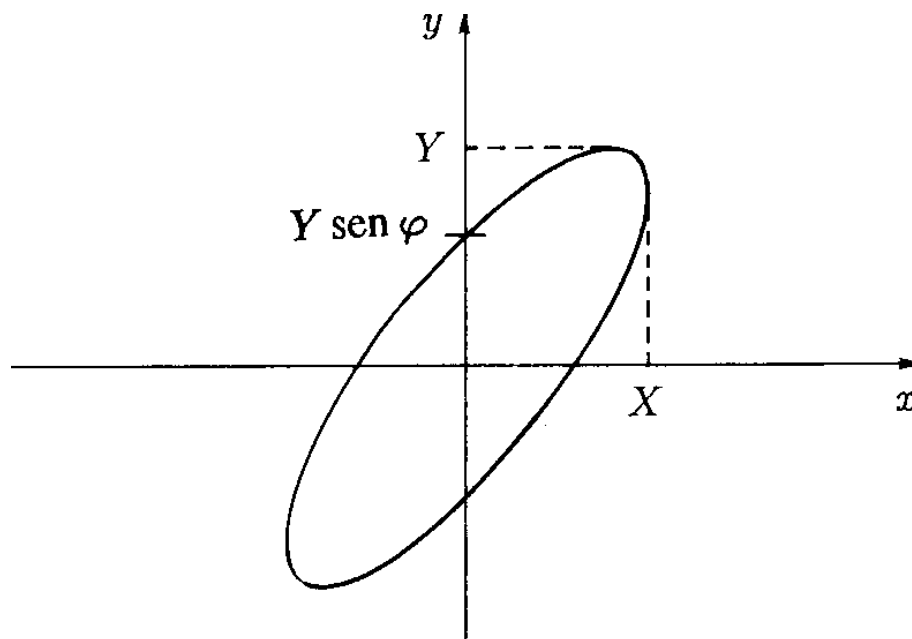
$$g(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} G(s) e^{st} ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{G(j\omega)}_{F(\omega)} e^{j\omega t} d\omega$$

### Rilevazione della funzione di risposta armonica

- Per la determinazione sperimentale della funzione di risposta armonica è necessario un oscillatore sinusoidale a frequenza variabile e un oscilloscopio.



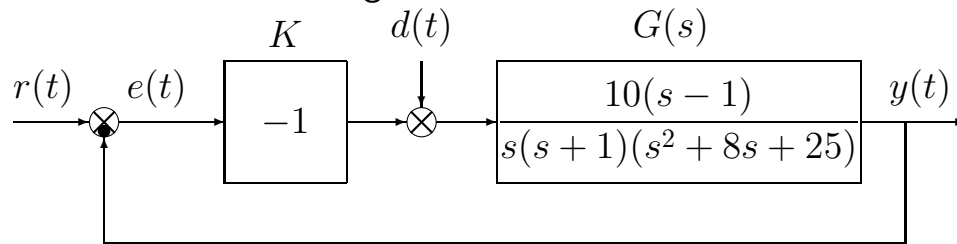
- L'ampiezza  $Y$  e la fase  $\varphi$  dell'uscita rispetto all'ingresso si possono determinare dall'analisi della figura di Lissajous ottenuta inviando ai due assi dell'oscilloscopio rispettivamente il segnale di ingresso e quello di uscita:



- Funzione di risposta armonica:

$$F(\omega) = \frac{Y}{X} e^{j\varphi}$$

- *Esempio.* Facendo riferimento al seguente sistema:



determinare l'errore a regime  $e_\infty(t)$  che si ha quando sul sistema agiscono contemporaneamente il disturbo costante  $d(t) = 2$  ed il riferimento sinusoidale  $r(t) = 3 + \cos t$ .

- In questo caso si applica il principio di sovrapposizione degli effetti: l'errore  $E(s)$  è dato dalla somma dei contributi derivanti dall'ingresso  $R(s)$  e dal disturbo  $D(s)$ :

$$E(s) = G_d(s)D(s) + G_r(s)R(s) = \frac{-G(s)}{1 + K G(s)}D(s) + \frac{1}{1 + K G(s)}R(s)$$

Sostituendo si ottiene ( $K = -1$ ):

$$E(s) = \underbrace{\frac{-10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25) - 10(s-1)}}_{G_d(s)} D(s) + \underbrace{\frac{s(s+1)(s^2+8s+25)}{s(s+1)(s^2+8s+25) - 10(s-1)}}_{G_r(s)} R(s)$$

I contributi sull'errore a regime derivanti dalle componenti "costanti" del disturbo e del riferimento ( $d_0 = 2$  e  $r_0 = 3$ ) si determinano "a regime" per  $s = 0$  (cioè per  $\omega = 0$  nelle corrispondenti funzioni di risposta armonica):

$$e_0 = \left. \frac{-10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25) - 10(s-1)} \right|_{s=0} d_0 + \left. \frac{s(s+1)(s^2+8s+25)}{s(s+1)(s^2+8s+25) - 10(s-1)} \right|_{s=0} r_0 = 2$$

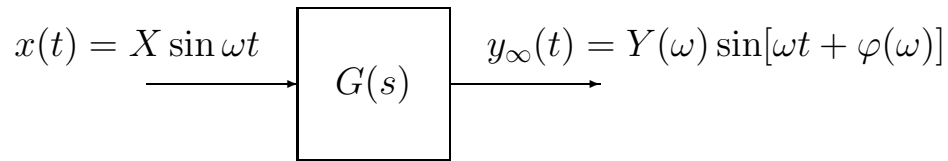
La componente sinusoidale del riferimento induce, a regime, una componente sinusoidale  $e_\omega(t)$  anche sul segnale errore  $e(t)$ . La componente  $e_\omega(t)$  si determina facilmente calcolando il valore della funzione di risposta armonica della funzione  $G_r(s)$  in corrispondenza della pulsazione  $\omega = 1$ :

$$G_r(j) = \left. \frac{s(s+1)(s^2+8s+25)}{s(s+1)(s^2+8s+25) - 10(s-1)} \right|_{s=j} = 1.569 e^{-j0.1974} = 1.569 \angle -11.31^\circ$$

L'errore a regime  $e_\infty(t)$  è quindi il seguente:

$$e_\infty(t) = e_0 + |G_r(j)| \cos(t + \text{Arg}[G_r(j)]) = 2 + 1.569 \cos(t - 0.1974)$$

- **Nota:** il concetto di funzione di risposta armonica deve essere utilizzato tutte le volte che si vuol calcolare la risposta a regime di un sistema lineare asintoticamente stabile quando in ingresso è presente un segnale sinusoidale:



- Definizione di funzione di risposta armonica:

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)} = G(j\omega)$$

- Per problemi di questo tipo non è il caso di utilizzare la metodologia della trasformata di Laplace in quanto i calcoli da eseguire sono molto più pesanti e il risultato a cui si giunge è lo stesso.
- Un errore comune è quello di calcolare l'andamento a regime dell'uscita applicando il teorema del valore finale alla trasformata  $Y(s)$  del segnale di uscita  $y(t)$

$$x(t) = X \sin(\omega t) \rightarrow R(s) = \frac{X \omega}{s^2 + \omega^2} \implies Y(s) = G(s) \frac{X \omega}{s^2 + \omega^2}$$

- È bene ricordare che ciò non è possibile in quanto il teorema del valore finale può essere applicato solamente per segnali che abbiano tutti i poli a parte reale negativa con al più un polo nell'origine. Nel caso in esame la  $Y(s)$  ha una coppia di poli complessi coniugati sull'asse immaginario per cui non è possibile applicare il teorema del valore finale. D'altra parte, è evidente che il segnale di uscita, essendo sinusoidale, non ammette limite per  $t \rightarrow \infty$ .
- Utilizzando invece il concetto di risposta armonica la soluzione del problema è immediata. Infatti, sfruttando la relazione teorica  $F(\omega) = G(j\omega)$  esistente tra la funzione di risposta armonica  $F(\omega)$  e la funzione di trasferimento  $G(s)$  del sistema, è possibile scrivere immediatamente il segnale di uscita a regime:

$$y_\infty(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = X |G(j\omega)| \sin[\omega t + \arg G(j\omega)]$$

- In modo del tutto analogo si calcola la risposta a regime del sistema ad un generico segnale sinusoidale presente in ingresso:

$$x(t) = X \cos[\omega t + \alpha] \implies y_\infty(t) = X |G(j\omega)| \cos[\omega t + \alpha + \arg G(j\omega)]$$

- Lo sfasamento  $\varphi = \arg G(j\omega)$  dato dalla funzione di risposta armonica è sempre lo sfasamento del segnale di uscita rispetto alla fase del segnale di ingresso.