La funzione di risposta armonica

- Se ad un sistema lineare stazionario *asintoticamente stabile* si applica in ingresso un segnale sinusoidale $x(t) = X \operatorname{sen} \omega t$ di pulsazione ω:

$$\begin{array}{ccc} x(t) = X\ \sin\omega t & & y(t) \simeq Y(\omega)\ \sin[\omega t + \varphi(\omega)] \\ \longrightarrow & \boxed{F(\omega)} & \longrightarrow \\ X(s) = X\,\frac{\omega}{s^2+\omega^2} & & Y(s) = G(s)X(s) \end{array}$$

  esaurito il transitorio, si ottiene che l'uscita è anch'essa di tipo sinusoidale con la stessa pulsazione ω:

$$y(t) = Y(\omega)\ \sin\left[\omega t + \varphi(\omega)\right]$$

- L'ampiezza $Y(\omega)$ dell'uscita e lo sfasamento $\varphi(\omega)$ rispetto all'ingresso sono in generale funzioni della pulsazione ω.

- Si definisce *funzione di risposta armonica* la funzione complessa $F(\omega)$ di variabile reale ω definita come segue:

$$\boxed{F(\omega) := \frac{Y(\omega)}{X}\, e^{\,j\varphi(\omega)} = \frac{Y(\omega)}{X}\left[\cos\varphi(\omega) + j \operatorname{sen}\varphi(\omega)\right]}$$

- Essa descrive il comportamento del sistema in condizione di regime periodico alle varie frequenze ed è definita nel dominio $0 \leq \omega < \infty$. In virtù della linearità del sistema, la funzione $F(\omega)$ è indipendente da X.

- **Teorema.** *Un sistema lineare stazionario con funzione di trasferimento $G(s)$ razionale fratta avente i poli a parte reale negativa soggetto ad eccitazione sinusoidale presenta, a regime, una risposta sinusoidale avente la stessa frequenza dell'eccitazione. La funzione di risposta armonica $F(\omega)$ è legata alla funzione di trasferimento $G(s)$ dalla relazione:*

$$\boxed{F(\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = G(j\omega)}$$

- **Dim.** La trasformata di Laplace del segnale di uscita, a partire da una condizione iniziale di quiete, è data dalla relazione:

$$Y(s) = G(s)\,X(s) = G(s)\,\frac{X\,\omega}{s^2+\omega^2} = G(s)\,\frac{X\,\omega}{(s-j\omega)\,(s+j\omega)}$$

I poli della funzione $Y(s)$ sono gli stessi della funzione di trasferimento $G(s)$ più quelli corrispondenti al segnale di ingresso che sono $p_{1,2} = \pm j\omega$.

- Nell'antitrasformata della $Y(s)$ è presente un termine transitorio $y_0(t)$, dovuto ai poli di $G(s)$, e un termine permanente $y_p(t)$ di tipo sinusoidale:

$$y(t) = y_0(t) + y_p(t) = y_0(t) + M_1 \cos[\omega t + \varphi_1]$$

I parametri M_1 e φ_1 sono funzioni dei residui $K_{1,2}$ dei poli $p_{1,2}$:

$$K_1 = G(s)\,\frac{X\,\omega}{s+j\omega}\bigg|_{s=j\omega} = \frac{X}{2\,j}\,G(j\omega) \qquad\qquad K_2 = K_1^*$$

- Ricordando che il sistema è asintoticamente stabile e che

$$M_1 = |K_1| = X|G(j\omega)|, \qquad\qquad \varphi_1 = \arg(K_1) = \arg G(j\omega) - \frac{\pi}{2}$$

per t sufficientemente elevato si ha che:

$$\begin{aligned} y(t) \simeq y_p(t) &= X|G(j\omega)|\cos[\omega t + \arg G(j\omega) - \tfrac{\pi}{2}] \\ &= \underbrace{X|G(j\omega)|}_{Y(\omega)}\ \sin\left[\omega t + \underbrace{\arg G(j\omega)}_{\varphi(\omega)}\right] \end{aligned}$$

- La funzione di risposta armonica può essere definita anche per sistemi instabili, ma in questo caso non è misurabile sperimentalmente.

- *La risposta all'impulso $g(t)$ di un sistema lineare asintoticamente stabile determina univocamente la sua risposta armonica $F(\omega)$:*

$$g(t) \longleftrightarrow G(s) \xrightarrow{s=j\omega} G(j\omega) = F(\omega)$$

- *La risposta armonica $F(\omega)$ di un sistema lineare asintoticamente stabile determina univocamente la sua risposta all'impulso $g(t)$:*

$$g(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} G(s)\,e^{st}\,ds = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{G(j\omega)}_{F(\omega)}\,e^{j\omega t}\,d\omega$$

Legami tra risposta armonica e risposta all'impulso

- Le relazioni così ottenute

$$
\begin{aligned}
G(j\omega) &= \int_0^\infty g(t)\, e^{-j\omega t}\, dt \\
g(t) &= \frac{1}{2\,\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega
\end{aligned}
$$

  definiscono la *trasformata* e l'*antitrasformata di Fourier* rispettivamente delle funzioni $g(t)$ e $G(j\omega)$.

- La funzione $G(j\omega)$ è complessa: indicandone con $R(\omega)$ e $I(\omega)$ le parti reale e immaginaria, si può scrivere

$$
\boxed{
\begin{aligned}
R(\omega) &= \int_0^\infty g(t)\, \cos\omega t\, dt \\
I(\omega) &= -\int_0^\infty g(t)\, \mathrm{sen}\,\omega t\, dt
\end{aligned}
}
$$

  cioè il calcolo di $G(j\omega)$ si può ricondurre a quello di due integrali reali.

- Valgono inoltre le seguenti relazioni:

$$
\boxed{g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(\omega)\, \cos\omega t\, d\omega}
$$

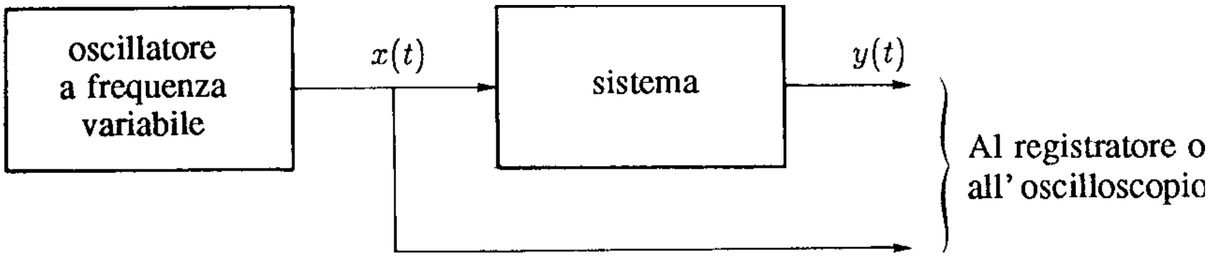
  e

$$
\boxed{g(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty I(\omega)\, \mathrm{sen}\,\omega t\, d\omega}
$$

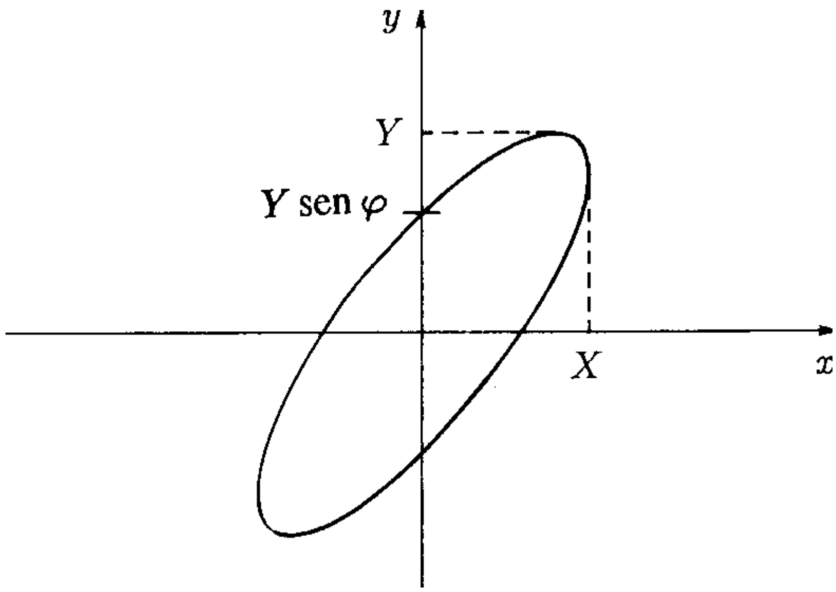
  cioè è possibile calcolare la risposta impulsiva $g(t)$ eseguendo integrali di funzioni reali, in cui è coinvolta la sola parte reale o la sola parte immaginaria della funzione $G(j\omega)$.

Rilevazione della funzione di risposta armonica

- Per la determinazione sperimentale della funzione di risposta armonicaè necessario un oscillatore sinusoidale a frequenza variabile e un oscilloscopio.



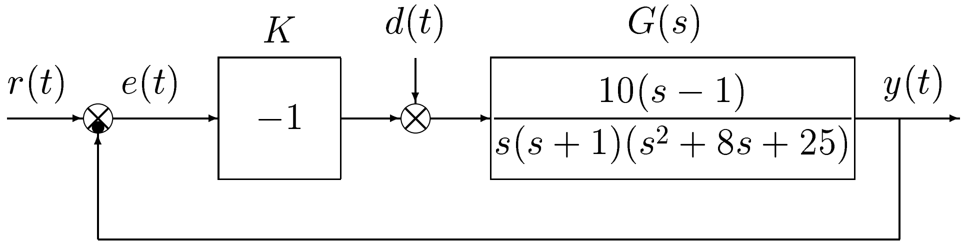
- L'ampiezza Y e la fase φ dell'uscita rispetto all'ingresso si possono determinare dall'analisi della figura di Lissajous ottenuta inviando ai due assi dell'oscilloscopio rispettivamente il segnale di ingresso e quello di uscita:



- Funzione di risposta arminica:

$$F(\omega) = \frac{Y}{X} e^{j\varphi}$$

• *Esempio.* Facendo riferimento al seguente sistema:



determinare l'errore a regime $e_\infty(t)$ che si ha quando sul sistema agiscono contemporaneamente il disturbo costante $d(t) = 2$ ed il riferimento sinusoidale $r(t) = 3 + \cos t$.

• In questo caso si applica il principio di sovrapposizione degli effetti: l'errore $E(s)$ è dato dalla somma dei contributi derivanti dall'ingresso $R(s)$ e dal disturbo $D(s)$:

$$E(s) = G_d(s)D(s) + G_r(s)R(s) = \frac{-G(s)}{1 + K\,G(s)}D(s) + \frac{1}{1 + K\,G(s)}R(s)$$

Sostituendo si ottiene $(K = -1)$:

$$E(s) = \underbrace{\frac{-10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)-10(s-1)}}_{G_d(s)} D(s) + \underbrace{\frac{s(s+1)(s^2+8s+25)}{s(s+1)(s^2+8s+25)-10(s-1)}}_{G_r(s)} R(s)$$

I contributi sull'errore a regime derivanti dalle componenti "costanti" del disturbo e del riferimento ($d_0 = 2$ e $r_0 = 3$) si determinano "a regime" per $s = 0$ (cioè per $\omega = 0$ nelle corrispondenti funzioni di risposta armonica):

$$e_0 = \left.\frac{-10(s-1)}{s(s+1)(s^2+8s+25)-10(s-1)}\right|_{s=0} d_0 + \left.\frac{s(s+1)(s^2+8s+25)}{s(s+1)(s^2+8s+25)-10(s-1)}\right|_{s=0} r_0 = 2$$

La componente sinusoidale del riferimento induce, a regime, una componente sinusoidale $e_\omega(t)$ anche sul segnale errore $e(t)$. La componente $e_\omega(t)$ si determina facilmente calcolando il valore della funzione di risposta armonica della funzione $G_r(s)$ in corrispondenza della pulsazione $\omega = 1$:

$$G_r(j) = \left.\frac{s(s+1)(s^2+8s+25)}{s(s+1)(s^2+8s+25)-10(s-1)}\right|_{s=j} = 1.569e^{-j0.1974} = 1.569\angle - 11.31^o$$

L'errore a regime $e_\infty(t)$ è quindi il seguente:

$$e_\infty(t) = e_0 + |G_r(j)| \cos(t + Arg[G_r(j)]) = 2 + 1.569\cos(t - 0.1974)$$

- **Nota**: il concetto di funzione di risposta armonica deve essere utilizzato tutte le volte che si vuol calcolare la risposta a regime di un sistema lineare asintoticamente stabile quando in ingresso è presente un segnale sinusoidale:

$$x(t) = X \sin \omega t \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y_\infty(t) = Y(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

- Definizione di funzione di risposta armonica:

$$F(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X} e^{j\varphi(\omega)} = G(j\omega)$$

- Per problemi di questo tipo non è il caso di utilizzare la metodologia della trasformata di Laplace in quanto i calcoli da eseguire sono molto più pesanti e il risultato a cui si giunge è lo stesso.

- Un errore comune è quello di calcolare l'andamento a regime dell'uscita applicando il teorema del valore finale alla trasformata $Y(s)$ del segnale di uscita $y(t)$

$$x(t) = X \sin(\omega t) \;\; \rightarrow \;\; R(s) = \frac{X\,\omega}{s^2 + \omega^2} \qquad \Longrightarrow \qquad Y(s) = G(s) \frac{X\,\omega}{s^2 + \omega^2}$$

- È bene ricordare che ciò non è possibile in quanto il teorema del valore finale può essere applicato solamente per segnali che abbiano tutti i poli a parte reale negativa con al più un polo nell'origine. Nel caso in esame la $Y(s)$ ha una coppia di poli complessi coniugati sull'asse immaginario per cui non è possibile applicare il teorema del valore finale. D'altra parte, è evidente che il segnale di uscita, essendo sinusoidale, non ammette limite per $t \to \infty$.

- Utilizzando invece il concetto di risposta armonica la soluzione del problema è immediata. Infatti, sfruttando la relazione teorica $F(\omega) = G(j\omega)$ esistente tra la funzione di risposta armonica $F(\omega)$ e la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema, è possibile scrivere immediatamente il segnale di uscita a regime:

$$y_\infty(t) = \lim_{t \to \infty} y(t) = X\,|G(j\omega)|\, \sin[\omega t + \arg G(j\omega)]$$

- In modo del tutto analogo si calcola la risposta a regime del sistema ad un generico segnale sinusoidale presente in ingresso:

$$x(t) = X \cos[\omega t + \alpha] \qquad \Longrightarrow \qquad y_\infty(t) = X\,|G(j\omega)|\, \cos[\omega t + \alpha + \arg G(j\omega)]$$

- Lo sfasamento $\varphi = \arg G(j\omega)$ dato dalla funzione di risposta armonica è sempre lo sfasamento del segnale di uscita rispetto alla fase del segnale di ingresso.