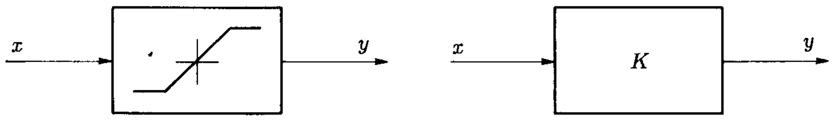
Riduzione degli schemi a blocchi

- Spesso i sistemi complessi vengono rappresentati con *schemi a blocchi*, i cui elementi hanno ciascuno un solo ingresso e una sola uscita.
- I blocchi elementari per la rappresentazione di sistemi puramente algebrici sono:

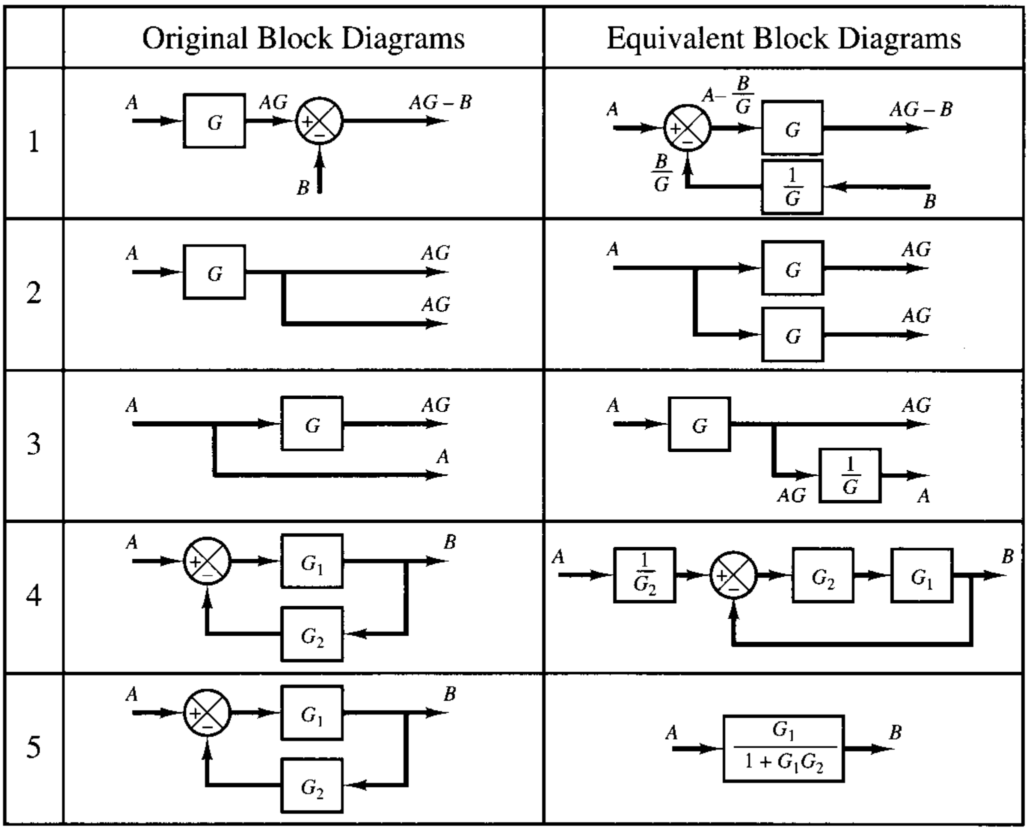


a) b)

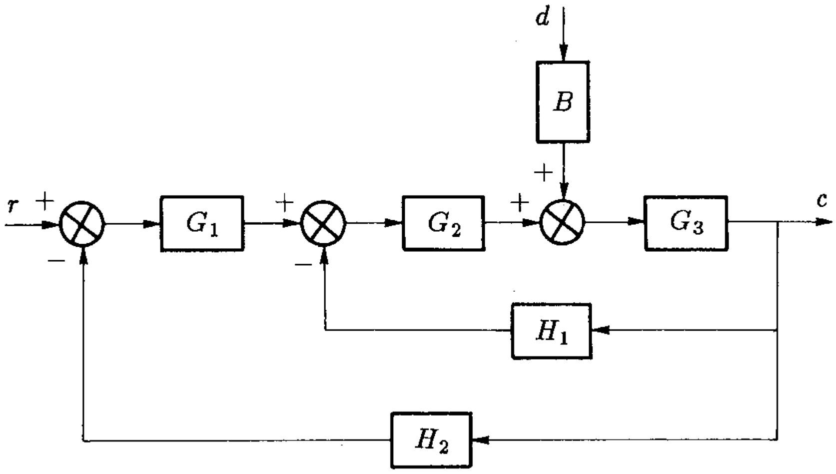
- Negli schemi a blocchi i diversi elementi sono collegati fra loro mediante i *punti di diramazione* e le *giunzioni sommanti*:

a) b)

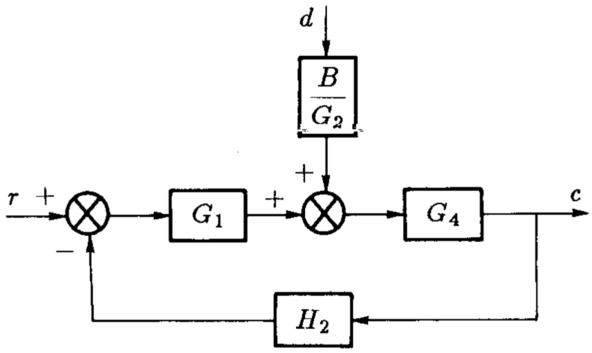
- Principali regole per la riduzione degli schemi a blocchi:



Esempio di riduzione di schema a blocchi

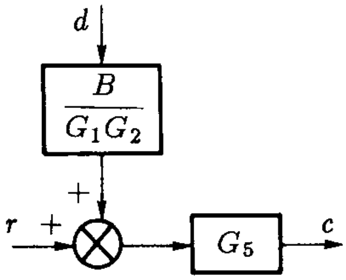


a)



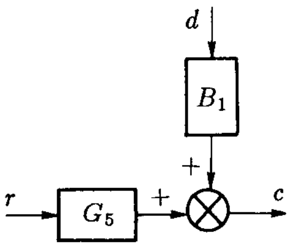
b)

$$G_4 = \frac{G_2G_3}{1+G_2G_3H_1}$$



c)

$$G_5 = \frac{G_1G_4}{1+G_1G_4H_2}$$



d)

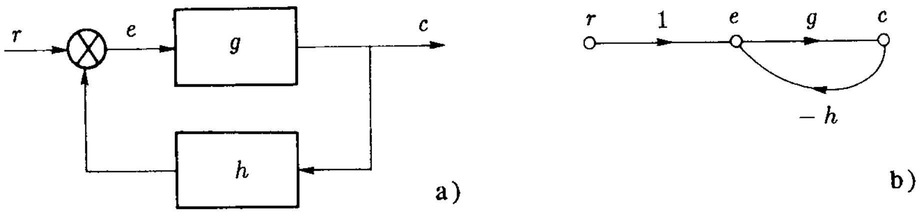
$$B_1 = \frac{B\,G_5}{G_1G_2}$$

- Forma minima:

$$c = \frac{G_1G_2G_3\,r + B\,G_3\,d}{1 + G_2G_3H_1 + G_1G_2G_3H_2}$$

I grafi di flusso di segnale

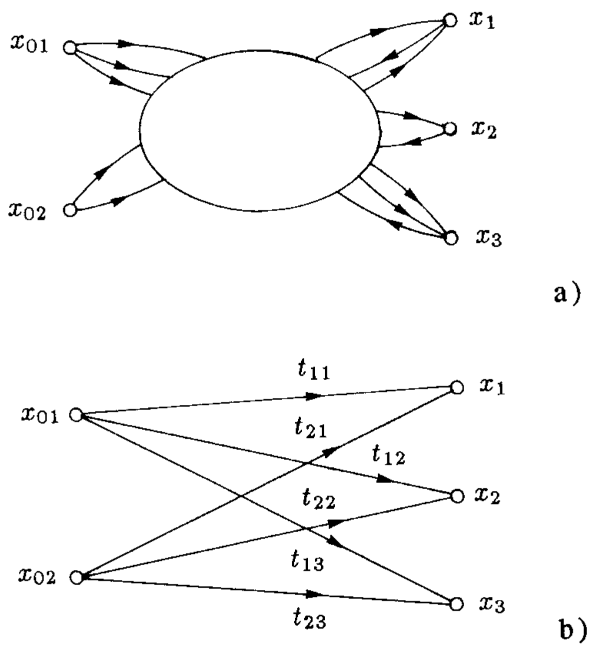
- I *grafi di flusso di segnale* sono un mezzo, alternativo agli schemi a blocchi, per la rappresentazione grafica dei sistemi complessi. Esempio:



- Rispetto agli schemi a blocchi, essi forniscono una più semplice rappresentazione grafica del sistema.

- Un grafo di flusso di segnale è una rete composta di *nodi* e di *rami orientati*. I *nodi indipendenti* (o *nodi sorgente*) sono nodi a cui non giunge nessun ramo. I *nodi dipendenti* sono nodi ai quali giunge almeno un ramo. Ogni ramo è caratterizzato da un *coefficiente* o *trasmittanza*.

- Per i grafi di flusso di segnale esistono regole di riduzione che sono simili a quelle degli schemi a blocchi. Mediante riduzione, ogni grafo di flusso di segnale può essere portato in *forma minima*:



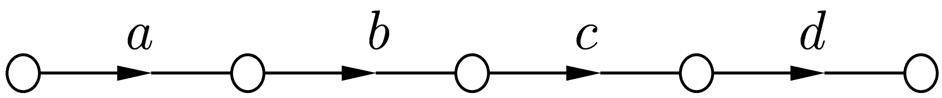
- Per calcolare la forma minima si utilizza la *Formula di Mason*

Formula di Mason - Determinante di un grafo

La formula di Mason permette di calcolare la trasmittanza T di ogni singolo ramo (da un nodo sorgente a un nodo dipendente) di un grafo in forma minima. Essa utilizza il concetto di **determinante** Δ di un grafo.

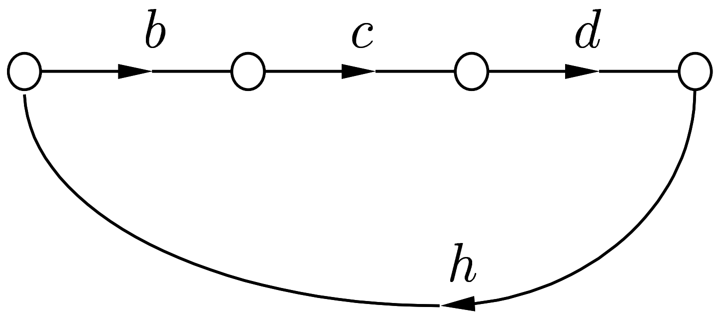
Alcune definizioni:

- **Percorso**: successione di rami e nodi adiacenti senza anelli, ogni nodo viene attraversato una sola volta. Il **coefficiente** P del percorso è il prodotto delle trasmittanze dei rami che lo compongono. Esempio:



$$P = abcd$$

- **Anello**: percorso chiuso. Il **coefficiente** A dell'anello è il prodotto delle trasmittanze dei rami che lo compongono. Esempio:

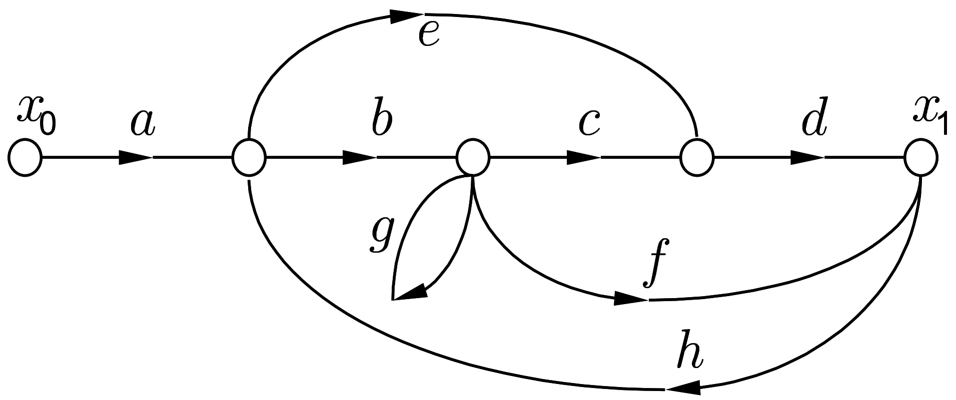


$$A = bcdh$$

- Due percorsi o due anelli **non si toccano** quando non hanno nessun nodo in comune.

Formula di Mason - Determinante di un grafo

Per calcolare il determinante D di un grafo è necessario individuare alcuni insiemi di indici. Consideriamo come esempio il seguente grafo:



$\mathcal{P}$) Insieme degli indici di tutti i percorsi del grafo dal nodo sorgente x_0 a quello dipendente (uscita) x_1. Ad ogni indice si associa il coefficiente P_i del corrispondente percorso. Esempio ($\mathcal{P} = \{1, 2, 3\}$):

$i = 1$ percorso: a b c d $P_1 = abcd$
$i = 2$ percorso: a e d $P_2 = aed$
$i = 3$ percorso: a b f $P_3 = abf$

$\mathcal{I}_1$) Insieme degli indici di tutti gli anelli del grafo. Ad ogni indice si associa il coefficiente A_i del corrispondente anello. Esempio ($\mathcal{I}_1 = \{1, 2, 3, 4\}$):

$i = 1$ anello: e d h $A_1 = edh$
$i = 2$ anello: b c d h $A_2 = bcdh$
$i = 3$ anello: b f h $A_3 = bfh$
$i = 4$ anello: g $A_4 = g$

$\mathcal{I}_2$) Insieme delle COPPIE di indici degli anelli del grafo che NON si toccano a due a due. Esempio:

anelli 1 e 4 $\rightarrow$ $\mathcal{I}_2 = \{(1, 4)\}$

$\mathcal{I}_n$) Insieme delle N-PLE di indici degli anelli del grafo che NON si toccano a N a N. Esempio:

$$\mathcal{I}_3 = \mathcal{I}_4 = ... = \mathcal{I}_n = \{ \}$$

Formula di Mason - Determinante di un grafo

Dati gli insiemi di indici $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$, ..., $\mathcal{I}_n$ e noti i coefficienti A_i di tutti gli anelli, per determinante Δ dell'intero grafo si intende la quantità:

$$\Delta \stackrel{def}{=} 1 - \sum_{i \in \mathcal{I}_1} A_i + \sum_{(i,j) \in \mathcal{I}_2} A_i A_j - \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{I}_3} A_i A_j A_k + \ldots$$

Esempio:

$$\sum_{i \in \mathcal{I}_1} A_i = edh + bcdh + bfh + g$$

$$\sum_{(i,j) \in \mathcal{I}_2} A_i A_j = edhg$$

$$\Delta = 1 - edh - bcdh - bfh - g + edhg$$

Noto il determinante Δ di un grafo, la formula di Mason permette di calcolare la trasmittanza T di un singolo ramo (da un nodo sorgente a un nodo dipendente) del grafo in forma minima come:

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i$$

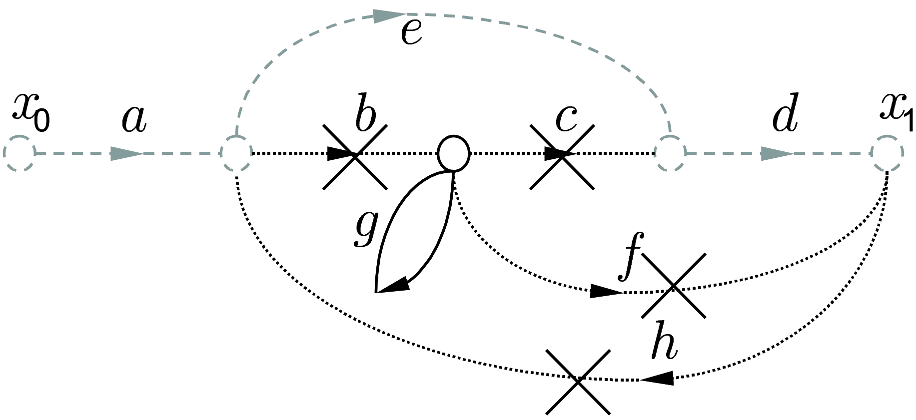
dove: $\mathcal{P}$ è l'insieme degli indici di tutti i percorsi fra i due nodi considerati, P_i è il coefficiente del percorso i-esimo, Δ_i è il determinante del grafo parziale che si ottiene eliminando tutti i nodi e tutti i rami appartenenti al percorso i-esimo.

Osservazioni:

- Il determinante di un grafo dipende SOLO dalla struttura degli anelli, non dal particolare percorso tra due nodi. Esso è dunque una proprietà del grafo.
- Per quanto detto, tutti i rami del grafo in forma minima sono caratterizzati dallo stesso determinante Δ.

Formula di Mason - Determinante di un grafo

Esempio, calcolo del determinante Δ_2 relativo al percorso 2 (a, e, d). I rami e i nodi appartenenti al percorso 2 devono essere eliminati dal grafo. Successivamente si cancellano tutti i rami che partono o arrivano in un nodo precedentemente eliminato (rami b, c, f, h). $\Delta_2 = 1 - g$ è il determinante del grafo rimanente (anello g).



$$
\begin{array}{lll}
i = 1 & P_1 = abcd & \Delta_1 = 1 \\
i = 2 & P_2 = aed & \Delta_2 = 1 - g \\
i = 3 & P_3 = abf & \Delta_3 = 1
\end{array}
$$

$$\sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \Delta_i = abcd(1) + aed(1-g) + abf(1)$$

La trasmittanza T del ramo x_0 - x_1 nel grafo in forma minima risulta quindi:

$$T = \frac{abcd + aed(1-g) + abf}{1 - edh - bcdh - bfh - g + edhg}$$

La formula di Mason

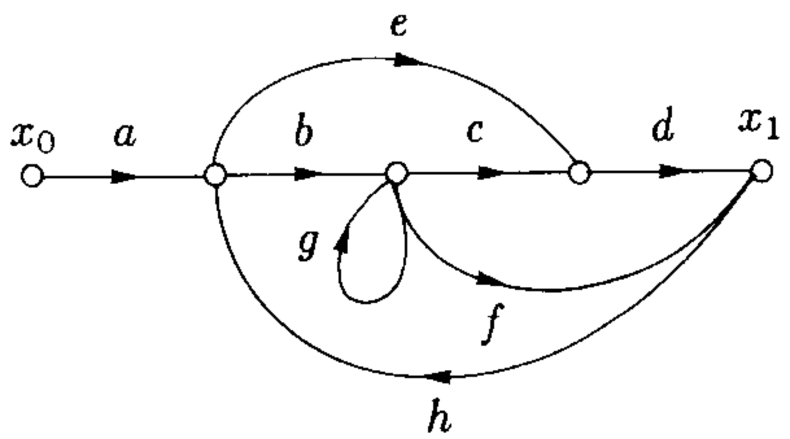
- Fornisce il *coefficiente di trasmittanza* T di ogni singolo ramo del grafo in forma minima:

$$T = \frac{1}{\Delta} \sum_{i \in \mathcal{P}} P_i \, \Delta_i$$

- $\mathcal{P}$ è l'insieme degli indici di tutti i percorsi esistenti tra i due nodi considerati; P_i è il coefficiente dell'i-esimo percorso, cioè il prodotto dei coefficienti di tutti i rami che compongono il percorso; Δ è il determinante dell'intero grafo:

$$\Delta := 1 - \sum_{i \in \mathcal{J}_1} A_i + \sum_{(i,j) \in \mathcal{J}_2} A_i \, A_j - \sum_{(i,j,k) \in \mathcal{J}_3} A_i \, A_j \, A_k + \; \ldots$$

- Δ_i è il determinante del grafo parziale che si ottiene eliminando tutti i nodi e i rami appartenenti al percorso i-esimo; A_i è il coefficiente dell'i-esimo anello; $\mathcal{J}_1$ è l'insieme degli indici di tutti gli anelli del grafo; $\mathcal{J}_n$ è l'insieme delle n-ple di indici di tutti gli anelli del grafo che non si toccano n ad n;



- Coefficienti di tutti i percorsi e di tutti gli anelli:

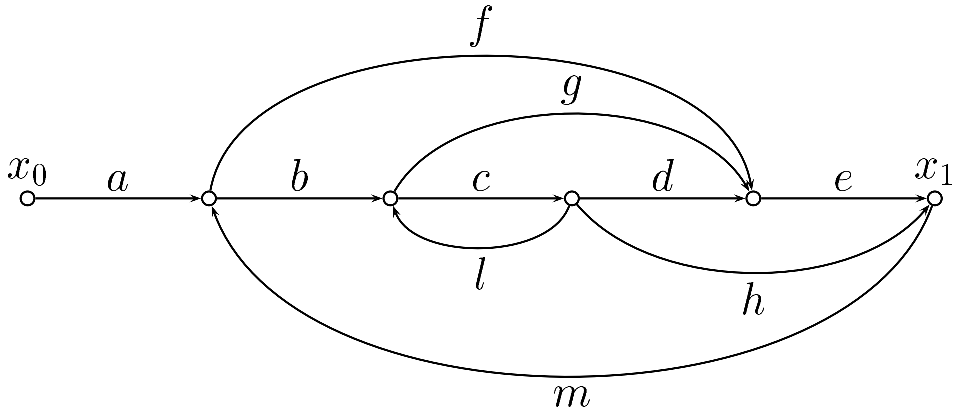
$$P_1 = a\,b\,c\,d \;, \quad P_2 = a\,e\,d \;, \quad P_3 = a\,b\,f$$

$$A_1 = e\,d\,h \;, \quad A_2 = b\,c\,d\,h \;, \quad A_3 = b\,f\,h \;, \quad A_4 = g$$

- Trasmittanza:

$$T = \frac{a\,b\,c\,d + a\,e\,d\,(1-g) + a\,b\,f}{1 - e\,d\,h - b\,c\,d\,h - b\,f\,h - g + e\,d\,h\,g}$$

- **Esempio 1**:

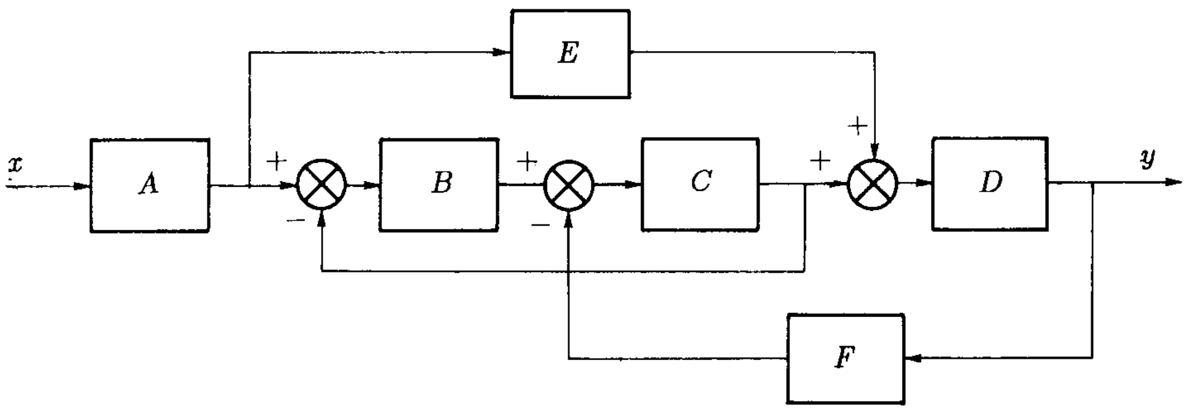


- Nel grafo sono presenti quattro percorsi di segnale $P_1 = a\,f\,e$, $P_2 = a\,b\,g\,e$, $P_3 = a\,b\,c\,h$, $P_4 = a\,b\,c\,d\,e$ e i cinque anelli $A_1 = f\,e\,m$, $A_2 = b\,g\,e\,m$, $A_3 = b\,c\,h\,m$, $A_4 = b\,c\,d\,e\,m$, $A_5 = c\,l$

- Trasmittanza:

$$T = \frac{a\,f\,e(1 - c\,l) + a\,b\,g\,e + a\,b\,c\,h + a\,b\,c\,d\,e}{1 - f\,e\,m - b\,g\,e\,m - b\,c\,h\,m - b\,c\,d\,e\,m - c\,l + f\,e\,m\,c\,l}$$

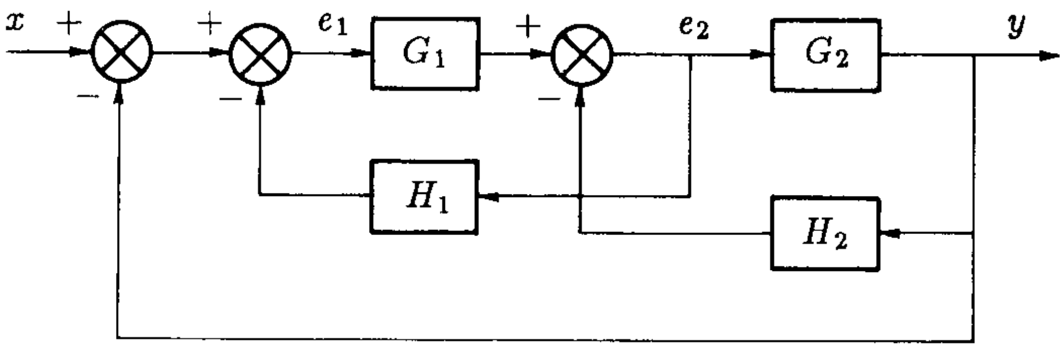
- **Esempio 2**:



- Trasmittanza:

$$\frac{y}{x} = A\,D\,\frac{B\,C + E\,(1{+}B\,C)}{1 + B\,C + C\,D\,F}$$

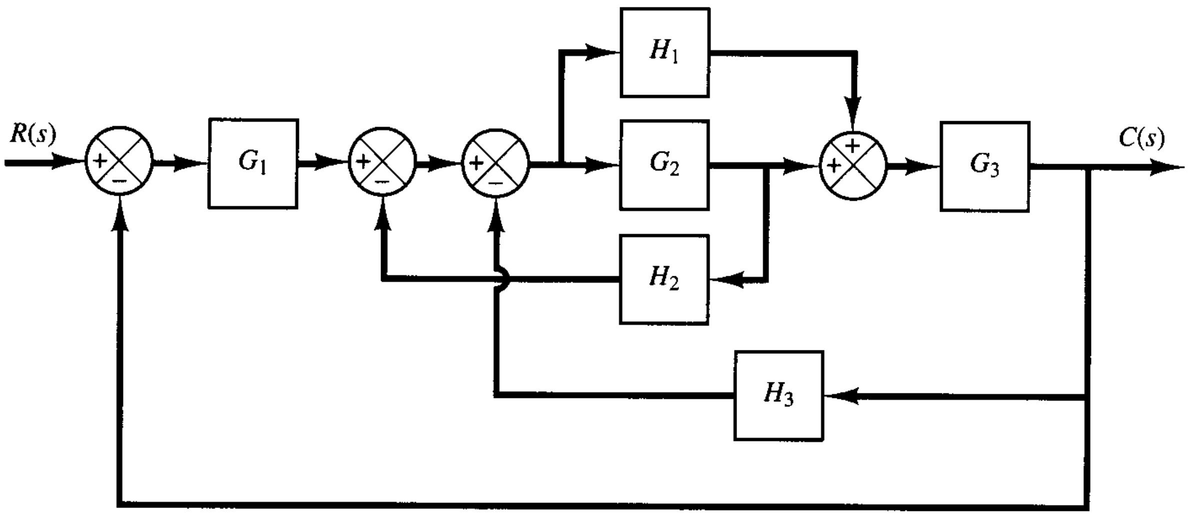
- **Esempio 3**:



- Trasmittanza:

$$\frac{y}{x} = \frac{G_1\, G_2}{1 + G_1\, H_1 + G_2\, H_2 + G_1\, G_2}$$

- **Esempio 4**:



- Trasmittanza:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1 H_1 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 + G_1 H_1 G_3 + G_2 H_2 + G_2 G_3 H_3 + H_1 G_3 H_3}$$