Fattorizzazione di un polinomio

- Consideriamo polinomi, detti monici, aventi coefficiente unitario per la potenza di grado massimo. È noto che un qualunque polinomio di grado n con coefficienti reali

$$Q(s) = s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0$$

si annulla in corrispondenza di r valori di s reali (detti radici reali) e di $2c$ valori di s complessi (detti radici complesse).

- Il polinomio $Q(s)$ si può rappresentare come prodotto di fattori $(s - \lambda_k)$ dove λ_k è una radice (reale o complessa) di $Q(s)$ quindi $Q(\lambda_k) = 0$:

$$Q(s) = \prod_{k=1}^{n} (s - \lambda_k) = (s - \lambda_1)(s - \lambda_2) \ldots (s - \lambda_n)$$

- Essendo i coefficienti del polinomio tutti reali, se $\lambda_k = \sigma + j\omega$ è una radice complessa del polinomio, anche il suo complesso coniugato $\lambda_k^* = \sigma - j\omega$ è una radice complessa del polinomio. Le $2c$ radici complesse sono quindi c coppie di numeri complessi coniugati.

- Il fattore $(s - \lambda_k)$ può comparire più volte nella fattorizzazione di $Q(s)$. Il numero di volte in cui il fattore $(s - \lambda_k)$ compare in $Q(s)$ è detto (grado di) molteplicità della radice λ_k.

- Fattorizziamo il polinomio $Q(s)$ in modo che non compaiano coefficienti complessi. Moltiplichiamo quindi fra loro i fattori corrispondenti alle radici complesse e coniugate e separiamo i contributi delle radici reali da quelli delle radici complesse e coniugate.

- Indichiamo con ρ_i per $i = 1 \ldots r$ le r radici reali (distinte), con $\sigma_j \pm j\omega_j$ per $j = 1 \ldots c$ le c coppie di radici complesse e coniugate (distinte).

- Sia μ_i la molteplicità della radice reale i-esima ρ_i e sia ν_j la molteplicità della j-esima coppia di radici complesse e coniugate $\sigma_j \pm j\omega_j$.

- Tenendo conto della molteplicità delle radici, separando le radici reali da quelle complesse e raggruppando le coppie di radici complesse e coniugate, si ottiene una rappresentazione equivalente del polinomio $Q(s)$:

$$Q(s) = \prod_{i=1}^{r} (s - \rho_i)^{\mu_i} \prod_{j=1}^{c} (s^2 - 2\sigma_j s + M_j^2)^{\nu_j}$$

  dove $M_j^2 = \sigma_j^2 + \omega_j^2$ è il quadrato del modulo della radice complessa j-esima in quanto:

$$(s - \sigma_j - j\omega_j)(s - \sigma_j + j\omega_j) = (s^2 - 2\sigma_j s + \sigma_j^2 + \omega_j^2) = (s^2 - 2\sigma_j s + M_j^2)$$

Alcuni esempi:

- consideriamo il polinomio di grado 2:

$$Q(s) = s^2 - s - 2$$

le radici si calcolano con la nota formula:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\ a\ c}}{2\ a} = \frac{+1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

quindi le radici sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$ ciascuna con molteplicità unitaria. In questo caso le due scomposizioni di $Q(s)$ sono identiche:

$$Q(s) = s^2 - s - 2 = (s+1)(s-2)$$

- consideriamo il polinomio di grado 3:

$$Q(s) = s^3 - 2s^2 - 10s$$

Una radice è $s = \lambda_0 = 0$ con molteplicità uno. Le rimanenti radici si calcolano come:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\ a\ c}}{2\ a} = \frac{+2 \pm \sqrt{-36}}{2} = -1 \pm j3$$

quindi sono radici complesse e coniugate $\lambda_1 = -1 - j3$ e $\lambda_2 = -1 + j3$ ciascuna con molteplicità unitaria. Le due scomposizioni di $Q(s)$ risultano dunque:

$$Q(s) = s^3 - 2s^2 - 10s = s(s+1-j3)(s+1+j3)$$

Moltiplicando le due radici complesse:

$$Q(s) = s^3 - 2s^2 - 10s = s(s^2 - 2s - 10)$$

Scomposizione in Fratti Semplici

- La determinazione dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata di un sistema lineare stazionario richiedono l'antitrasformazione di una funzione razionale fratta che può essere sempre scritta nella forma:

$$F(s) = K_p \frac{P(s)}{Q(s)} = K_p \frac{s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + b_1\, s + b_0}{s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

- La differenza $n-m$ fra i gradi del denominatore e del numeratore prende il nome di *grado relativo* della funzione razionale fratta $F(s)$.

- Indicando con p_i le n radici (reali o complesse) di $Q(s)$ e con z_i le m radici (reali o complesse) di $P(s)$ si ottiene:

$$F(s) = K_p \frac{\prod_{i=1}^{m}(s - z_i)}{\prod_{i=1}^{n}(s - p_i)} = K_p \frac{(s - z_1)\,(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)\,(s - p_2)\ldots(s - p_n)}$$

- Le radici reali o complesse del denominatore $p_1, \ldots, p_n$ sono dette *poli* della funzione $F(s)$.

- Le radici reali o complesse del numeratore $z_1, \ldots, z_m$ sono dette *zeri* della funzione $F(s)$.

- La costante reale K_p è detta *costante di guadagno nella forma a poli e zeri*.

- La funzione $F(s)$ è univocamente determinata dalla costante K_p, dai poli $p_1, \ldots, p_n$ e dagli zeri $z_1, \ldots, z_m$.

- Scomponiamo il polinomio $Q(s)$ a denominatore di $F(s)$ secondo la fattorizzazione con soli coefficienti reali:

$$Q(s) = \prod_{i=1}^{r}(s-\rho_i)^{\mu_i}\prod_{j=1}^{c}(s^2-2\sigma_j s+M_j^2)^{\nu_j}$$

le costanti ρ_i sono poli reali di $F(s)$, mentre i numeri complessi $\sigma_j \pm j\omega_j$ sono poli complessi di $F(s)$.

- Ogni funzione razionale fratta $F(s)$ strettamente propria (cioè con grado relativo $n-m$ almeno pari ad uno) si può scomporre nella somma di *fratti semplici*:

$$F(s) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{h=1}^{\mu_i}\frac{K_{ih}}{(s-\rho_i)^h} + \sum_{j=1}^{c}\sum_{h=1}^{\nu_j}\frac{\alpha_{jh}\;s+\beta_{jh}}{(s^2-2\sigma_j s+M_j^2)^h}$$

dove i coefficienti reali (da determinare) K_{ih}, α_{jh} β_{jh} sono detti *residui*.

- I *fratti semplici* sono le funzioni razionali fratte proprie:

$$F_{ih}(s) = \frac{K_{ih}}{(s-\rho_i)^h} \qquad\qquad F_{jh}(s) = \frac{\alpha_{jh}\;s+\beta_{jh}}{(s^2-2\sigma_j s+M_j^2)^h}$$

Quindi:

$$F(s) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{h=1}^{\mu_i}F_{ih}(s) + \sum_{j=1}^{c}\sum_{h=1}^{\nu_j}F_{jh}(s)$$

- L'antitrasformata dei fratti semplici è nota. Sia $f_{ih}(t)$ l'antitrasformata di $F_{ih}(s)$ e sia $f_{jh}(t)$ l'antitrasformata di $F_{jh}(s)$. Per la proprietà di linearità della trasformate di Laplace, l'antitrasformata $f(t)$ di $F(s)$ risulta:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{r}\sum_{h=1}^{\mu_i}f_{ih}(t) + \sum_{j=1}^{c}\sum_{h=1}^{\nu_j}f_{jh}(t)$$

- NOTA: la struttura della scomposizione in fratti semplici dipende solo dal denominatore (e quindi dai poli) di $F(s)$. Il numeratore (e quindi gli zeri) di F(s) contribuiscono solo alla determinazione dei residui.

Antitrasformazione dei Fratti Semplici

- Le antitrasformate dei fratti semplici prendono il nome di *modi* della funzione $F(s)$.
- L'antitrasformata dei fratti semplici corrispondenti a poli reali

$$F_{ih}(s) = \frac{K_{ih}}{(s-\rho_i)^h}$$

risulta:

$$f_{ih}(t) = K_{ih}\,\frac{t^{h-1}}{(h-1)!}\,e^{\rho_i t}$$

- NOTA: se il polo reale ρ_i è positivo, la sua antitrasformata tende all'infinito per t tendente all'infinito. Se invece $\rho_i < 0$ l'antitrasformata tende a zero per t tendente all'infinito.
- L'antitrasformata dei fratti semplici corrispondenti a coppie di poli complessi e coniugati

$$F_{jh}(s) = \frac{\alpha_{jh}\; s + \beta_{jh}}{(s^2 - 2\sigma_j s + M_j^2)^h}$$

corrisponde a funzioni del tempo del tipo

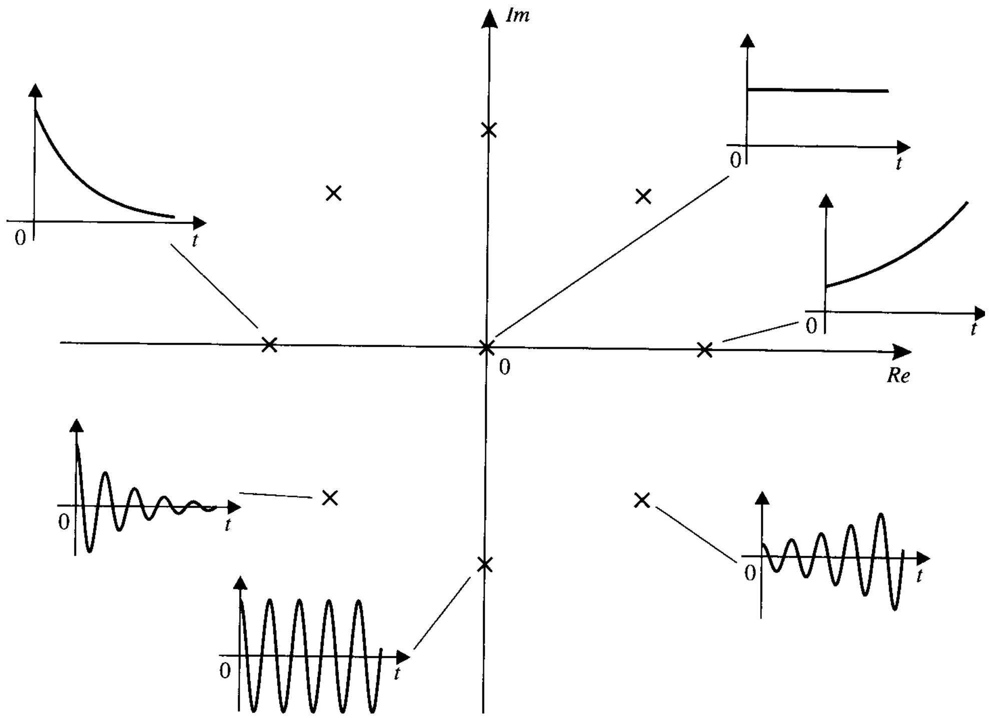
$$f_{jh}(t) = c_{jh}\; t^{h-1}\; e^{\sigma_j t}\; \cos(\omega_j t + \varphi_{jh})$$

dove c_{jh} e φ_{jh} sono costanti reali.

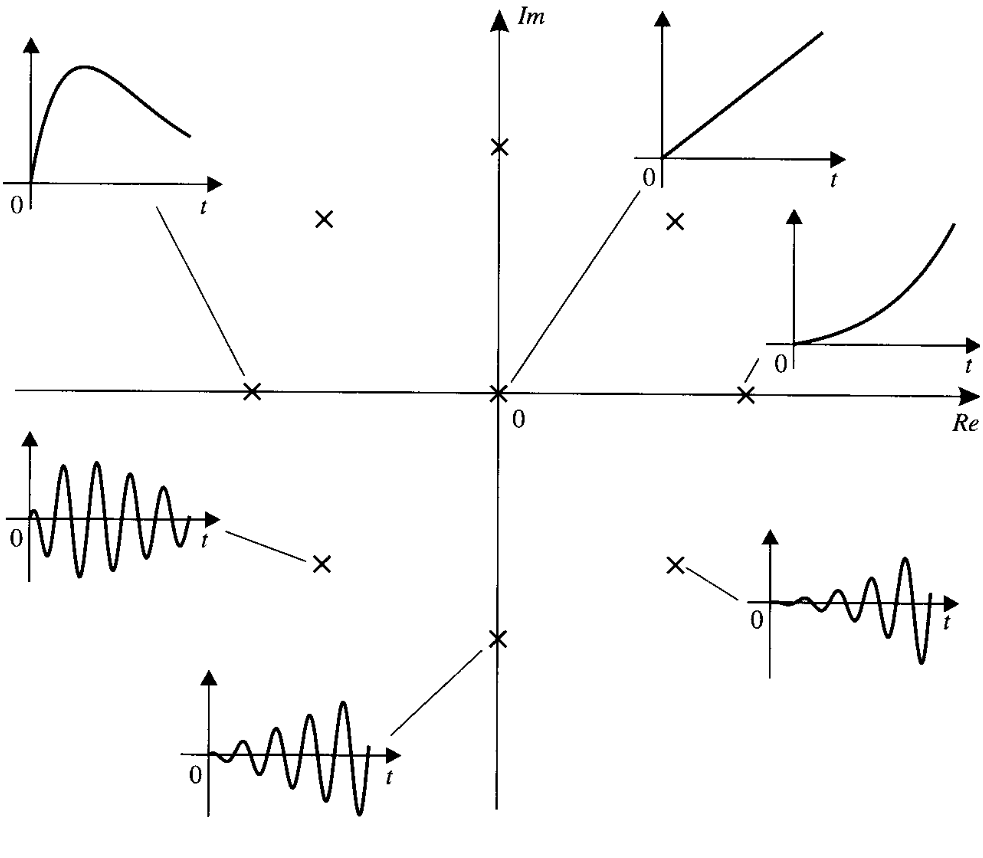
- NOTA: se la parte reale σ_j della coppia di poli complessi e coniugati $\sigma_j \pm \omega_j$ è positiva, la sua antitrasformata tende all'infinito per t tendente all'infinito. Se invece $\sigma_j < 0$ l'antitrasformata tende a zero per t tendente all'infinito.

Andamenti dei modi rispetto alla collocazione dei poli

- Andamento dei modi corrispondenti a poli distinti (molteplicità unitaria):



- Andamento dei modi corrispondenti a poli multipli (molteplicità > 1):



Calcolo dei residui

Caso 1) Tutti i poli di F(s) sono *semplici* (molteplicità unitaria).

- Nel caso di *poli semplici* la funzione può essere scomposta come segue:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-p_1)(s-p_2)\dots(s-p_n)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s-p_i}$$

- Le costanti K_i (dette *residui*) sono reali in corrispondenza dei poli reali, complesse coniugate in corrispondenza delle coppie di poli complessi coniugati. Esse si ricavano utilizzando la formula:

$$\boxed{K_i = (s-p_i)\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=p_i}}$$

- Una volta che la funzione $F(s)$ è stata scomposta in fratti semplici, è immediato antitrasformarla:

$$\boxed{f(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i\, e^{p_i t}}$$

- Esempio. Sia

$$F(s) := \frac{5\,s+3}{(s+1)\,(s+2)\,(s+3)} = \frac{K_1}{s+1} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{s+3}$$

I residui si calcolano nel modo seguente:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{5\,(-1)+3}{(-1+2)\,(-1+3)} = -1 \\ K_2 &= \frac{5\,(-2)+3}{(-2+1)\,(-2+3)} = 7 \\ K_3 &= \frac{5\,(-3)+3}{(-3+1)\,(-3+2)} = -6 \end{aligned}$$

per cui si può scrivere

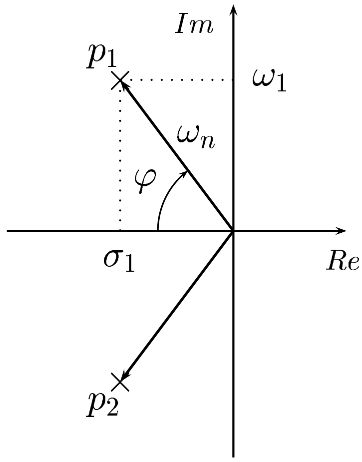
$$F(s) = -\frac{1}{s+1} + \frac{7}{s+2} - \frac{6}{s+3}$$

e quindi

$$f(t) = -e^{-t} + 7\,e^{-2t} - 6\,e^{-3t}$$

Quando si hanno coppie di *poli complessi coniugati*

$$p_1 = \sigma_1 + j\,\omega_1, \qquad p_2 = \sigma_1 - j\,\omega_1$$



anche i residui sono complessi coniugati

$$K_1 = u_1 + j\,v_1, \qquad K_2 = u_1 - j\,v_1$$

La somma di fratti semplici ad essi relativa è

$$\frac{u_1 + j\,v_1}{s - \sigma_1 - j\,\omega_1} + \frac{u_1 - j\,v_1}{s - \sigma_1 + j\,\omega_1}$$

Posto

$$\boxed{M_1 := 2|K_1| = 2\sqrt{u_1^2 + v_1^2}, \qquad \varphi_1 := \arg K_1 = \arg(u_1 + j\,v_1)},$$

si può scrivere

$$\frac{M_1}{2}\left(\frac{e^{j\varphi_1}}{s - \sigma_1 - j\,\omega_1} + \frac{e^{-j\varphi_1}}{s - \sigma_1 + j\,\omega_1}\right),$$

da cui, antitrasformando, si ottiene

$$\frac{M_1}{2}\left(e^{\sigma_1 t + j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{\sigma_1 t - j(\omega_1 t + \varphi_1)}\right),$$

funzione che può essere posta nella forma

$$\boxed{M_1\, e^{\sigma_1 t}\cos(\omega_1 t + \varphi_1)} \qquad \text{oppure} \qquad \boxed{M_1\, e^{\sigma_1 t}\,\mathrm{sen}(\omega_1 t + \varphi_1 + \pi/2)}$$

Esempio. Sia:

$$F(s) := \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s + 1 - j2} + \frac{K_3}{s + 1 + j2}$$

I residui sono i seguenti:

$$\begin{aligned}
K_1 &= \frac{7\cdot 0 - 8\cdot 0 + 5}{(0 + 1 - j2)\,(0 + 1 + j2)} = 1\\
K_2 &= \frac{7\,(-1 + j2)^2 - 8\,(-1 + j2) + 5}{(-1 + j2)\,(-1 + j2 + 1 + j2)} = 3 + j4\\
K_3 &= \frac{7\,(-1 - j2)^2 - 8\,(-1 - j2) + 5}{(-1 - j2)\,(-1 - j2 + 1 - j2)} = 3 - j4
\end{aligned}$$

e pertanto

$$F(s) = \frac{1}{s} + \frac{3 + j4}{s + 1 - j2} + \frac{3 - j4}{s + 1 + j2},$$

da cui, antitrasformando,

$$f(t) = 1 + 10\,e^{-t}\cos(2t + \varphi),$$

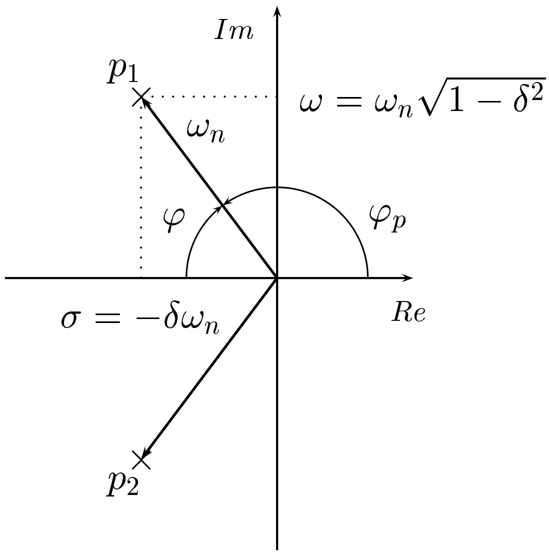
dove $10 = 2|K_2| = 2\sqrt{3^2 + 4^2}$ e $\varphi = \arctan(4/3) = 53.13°$.

Esempio. Si calcoli la risposta al gradino unitario del seguente sistema:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Occorre antitrasformare la seguente funzione di uscita:

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)X(s) \\ &= \frac{\omega_n^2}{s(s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2)} \\ &= \frac{\omega_n^2}{s(s - \omega_n e^{j\varphi_p})(s - \omega_n e^{-j\varphi_p})} \\ &= \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s - \omega_n e^{j\varphi_p}} + \frac{K_2^*}{s - \omega_n e^{-j\varphi_p}} \end{aligned}$$



dove

$$p_{1,2} = -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$

e

$$\varphi_p = \pi - \varphi = \pi - \arccos\delta$$

Il calcolo dei residui è immediato:

$$\begin{aligned} K_1 &= \lim_{s\to 0} \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2} = 1 \\ K_2 &= \lim_{s\to\omega_n e^{j\varphi_p}} \frac{\omega_n^2}{s(s - \omega_n e^{-j\varphi_p})} = \frac{\omega_n^2}{\omega_n e^{j\varphi_p}(\omega_n e^{j\varphi_p} - \omega_n e^{-j\varphi_p})} = \frac{e^{-j\varphi_p}}{2j\sin\varphi_p} \end{aligned}$$

Essendo:

$$\begin{aligned} M_1 &= 2|K_2| = \frac{1}{|\sin\varphi_p|} = \frac{1}{|\sin(\pi-\varphi)|} = \frac{1}{\sin\varphi} = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}} \\ \varphi_1 &= \arg K_2 = -\varphi_p - \frac{\pi}{2} = -(\pi - \varphi) - \frac{\pi}{2} = \varphi + \frac{\pi}{2} = \arctan\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} + \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

e antitrasformando si ottiene ($\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) = -\sin\alpha$):

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 + M_1 e^{-\delta\omega_n t}\cos\left[\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t + \varphi_1\right] \\ &= 1 + \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\cos\left[\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t + \arctan\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} + \frac{\pi}{2}\right] \\ &= 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\sin\left[\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,t + \arctan\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}\right] \end{aligned}$$

Caso 2) F(s) ha poli *multipli* (molteplicità > 1).

- Si suppone che la funzione razionale $F(s)$ abbia h poli distinti p_i $(i = 1, \ldots, h)$, ciascuno caratterizzato da un ordine di molteplicità $r_i \geq 1$ $(\sum_{i=1}^{h} r_i = n)$:

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{P(s)}{(s-p_1)^{r_1}(s-p_2)^{r_2}\ldots(s-p_h)^{r_h}} \\ &= \sum_{i=1}^{h}\sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(s-p_i)^{r_i-\ell+1}} \end{aligned}$$

- Le costanti $K_{i\ell}$ si ricavano mediante la formula

$$K_{i\ell} = \frac{1}{(\ell-1)!}\,\frac{d^{\,\ell-1}}{ds^{\,\ell-1}}(s-p_i)^{r_i}\,\frac{P(s)}{Q(s)}\bigg|_{s=p_i}$$

dove $(i = 1, \ldots, h; \ell = 1, \ldots, r_i)$. Antitrasformando la $F(s)$ si ottiene:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{h}\sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(r_i-\ell)!}\,t^{r_i-\ell}\,e^{p_i t}$$

- I coefficienti $K_{i\ell}$ sono complessi coniugati in corrispondenza di poli complessi coniugati. I termini complessi coniugati corrispondono a prodotti di esponenziali reali e funzioni trigonometriche, e si ottengono con un procedimento del tutto analogo a quello seguito nel caso di poli distinti.

- Esempio:

$$F(s) = \frac{1}{(s+2)\,(s+1)^2} = \frac{K_{11}}{s+2} + \frac{K_{22}}{s+1} + \frac{K_{21}}{(s+1)^2}$$

dove

$$\begin{aligned} K_{11} &= (s+2)\,F(s)\big|_{s=-2} = 1\ , \\ K_{22} &= \tfrac{d}{ds}\,(s+1)^2\,F(s)\bigg|_{s=-1} = -1\ , \\ K_{21} &= (s+1)^2\,F(s)\big|_{s=-1} = 1 \end{aligned}$$

Antitrasformando si ottiene

$$f(t) = e^{-2t} - e^{-t} + t\,e^{-t}$$

- Si consideri il rapporto di polinomi

$$F(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + b_1\, s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

- Valgono le seguenti proprietà:
  - *i)* se è $n=m+1$, la somma dei residui di $F(s)$ è $\frac{b_m}{a_n} = K_p$;
  - *ii)* se è $n \geq m+2$, la somma dei residui di $F(s)$ è zero.

  Si ricorda che, nello sviluppo in fratti, i residui di $F(s)$ sono i coefficienti dei termini con polinomio a denominatore di primo grado.

- Esempio 1:

$$F(s) = \frac{s - z_1}{(s-p_1)\,(s-p_2)\,(s-p_3)} = \frac{A}{s-p_1} + \frac{B}{s-p_2} + \frac{C}{s-p_3}$$

Calcolati A e B, il calcolo del residuo C è immediato: $C = -(A+B)$.

- Esempio 2:

$$F(s) = \frac{1}{(s-p_1)^2\,(s-p_2)} = \frac{A}{(s-p_1)^2} + \frac{B}{s-p_1} + \frac{C}{s-p_2}$$

Il coefficiente A e il residuo C si possono calcolare immediatamente:

$$A = \frac{1}{p_1 - p_2}\,, \quad C = \frac{1}{(p_2-p_1)^2}$$

Applicando la proprietà *ii* si deduce: $B = -C$.

- Esempio 3:

$$F(s) = \frac{s - z_1}{(s-p_1)^3\,(s-p_2)} = \frac{A}{(s-p_1)^3} + \frac{B}{(s-p_1)^2} + \frac{C}{s-p_1} + \frac{D}{s-p_2}$$

Il coefficiente A e il residuo D si calcolano immediatamente. Applicando la proprietà *ii* si deduce: $C = -D$. Moltiplicando ambo i membri dello sviluppo per $(s-p_1)$ si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{s - z_1}{(s-p_1)^2\,(s-p_2)} &= \frac{A}{(s-p_1)^2} + \frac{B}{s-p_1} + C + D\,\frac{s-p_1}{s-p_2} \\ &= \frac{A}{(s-p_1)^2} + \frac{B}{s-p_1} + \frac{E}{s-p_2} \end{aligned}$$

da cui si calcola

$$E = \frac{p_2 - z_1}{(p_2-p_1)^2}$$

Applicando la proprietà *ii* al nuovo sviluppo, si ottiene $B = -E$.

Modi di un sistema

- La risposta libera di un sistema lineare si ottiene antitrasformando una funzione razionale fratta del tipo:

$$Y_0(s) = \frac{c_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + c_1\, s + c_0}{s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

- La risposta forzata di un sistema lineare si calcola tramite la sua funzione di trasferimento $G(s)$ che è una funzione razionale fratta del tipo:

$$G(s) = \frac{b_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + b_1\, s + b_0}{s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

- Il denominatori di $Y_0(s)$ e di $G(s)$ sono esattamente uguali!
- Dato che $Y_0(s)$ e $G(s)$ hanno lo stesso denominatore, la scomposizione in fratti semplici di $Y_0(s)$ e di $G(s)$ ha la stessa struttura, quindi gli stessi modi, cambiamo solo le costanti moltiplicative date dai residui.
- I modi sono quindi una proprietà del sistema e pertanto si può parlare di *modi del sistema*.
- Sia per $Y_0(s)$ che per $G(s)$ i modi del sistema sono le funzioni del tempo corrispondenti alla antitrasformazione di fratti semplici del tipo:

$$f_{ih}(t) \;=\; K_{ih}\, \frac{t^{h-1}}{(h-1)!}\, e^{\rho_i t}$$

$$f_{jh}(t) \;=\; c_{jh}\, t^{h-1}\, e^{\sigma_j t}\, \cos(\omega_j t + \varphi_{jh})$$

dove ρ_i sono i poli reali della funzione di trasferimento e $\sigma_j \pm j\, \omega_j$ sono le coppie di poli complessi e coniugati.

Requisiti di controllo per i sistemi dinamici

Che cosa si vorrebbe da un sistema dinamico?
Che cosa si vuole ottenere tramite un sistema di controllo?
I seguenti concetti, espressi in modo intuitivo, indicano le principali risposte a queste domande:

1) **Stabilità (semplice)**: un sistema lineare è stabile se e solo se con ingressi nulli e per qualunque condizione iniziale l'uscita rimane limitata.

   Un sistema lineare è **instabile** se non è stabile.

2) **Asintotica Stabilità**: un sistema lineare è asintoticamente stabile se e solo se con ingressi nulli e per qualunque condizione iniziale l'uscita tende a zero al tendere del tempo all'infinito.

   oppure

   un sistema lineare è asintoticamente stabile se e solo se per qualunque ingresso limitato l'uscita rimane limitata.

Ovviamente la stabilità asintotica implica la stabilità semplice. L'asintotica stabilità di un sistema è il requisito di controllo minimo. Tipicamente un sistema di controllo deve anche garantire:

3) **Velocità di risposta**: Si desidera che il sistema controllato risponda ai comandi esterni più velocemente possibile, compatibilmente con i vincoli strutturali o dinamici del sistema.

4) **Precisione**: Si desidera che il sistema controllato risponda ai comandi esterni con la maggiore precisione e accuratezza possibili.

Il comportamento di un sistema dinamico lineare (evoluzione libera ed evoluzione forzata) è completamente descritto da due funzioni razionali fratte (una delle quali è la funzione di trasferimento). Il procedimento di scomposizione in fratti semplici permette quindi di ottenere molte informazioni essenziali sul comportamento dei sistemi dinamici lineari.

Requisiti di controllo e poli del sistema

1) **Stabilità (semplice)**: un sistema lineare è stabile se e solo se con ingressi nulli e per qualunque condizione iniziale l'uscita rimane limitata.

- La risposta libera di un sistema lineare si ottiene antitrasformando una funzione razionale fratta del tipo:

$$Y_0(s) = \frac{c_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + c_1\, s + c_0}{s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

- La condizione iniziale determina i coefficienti $c_1, ..., c_{n-1}$ e quindi determina solo gli zeri e, di conseguenza, influenza solo i residui K_{ih}, α_{jh} e β_{jh}.

- I modi del sistema sono le funzioni del tempo corrispondenti alla antitrasformazione dei fratti semplici:

$$f_{ih}(t) \;=\; K_{ih}\, \frac{t^{h-1}}{(h-1)!}\, e^{\rho_i t}$$

$$f_{jh}(t) \;=\; c_{jh}\; t^{h-1}\; e^{\sigma_j t}\; \cos(\omega_j t + \varphi_{jh})$$

dove ρ_i sono i poli reali della funzione di trasferimento e $\sigma_j \pm j\; \omega_j$ sono le coppie di poli complessi e coniugati.

- **Un sistema lineare è stabile se e solo se:**

  1. **la funzione di trasferimento $G(s)$ non ha poli a parte reale positiva;**
  2. **gli eventuali poli a parte reale nulla (immaginari) hanno molteplicità unitaria.**

- Infatti, se ci sono poli a parte reale positiva (quindi almeno un $\rho_i > 0$ o un $\sigma_j > 0$) gli esponenziali nei modi corrispondenti tendono all'infinito per $t \to \infty$. Se ci sono poli immaginari con molteplicità maggiore di 1, le potenze $t^{(h-1)}$ tendono all'infinito per $t \to \infty$. I poli immaginari con molteplicità unitaria, determinano funzioni sinusoidali che rimangono limitate, ma non si annullano per $t \to \infty$.

2) **Asintotica Stabilità**: un sistema lineare è asintoticamente stabile se e solo se con ingressi nulli e per qualunque condizione iniziale l'uscita tende a zero al tendere del tempo all'infinito.

- La risposta libera di un sistema lineare si ottiene antitrasformando una funzione razionale fratta del tipo:

$$Y_0(s) = \frac{c_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + c_1\, s + c_0}{s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

- La condizione iniziale determina i coefficienti $c_1, ..., c_{n-1}$ e quindi determina solo gli zeri e, di conseguenza, influenza solo i residui K_{ih}, α_{jh} e β_{jh}.

- I modi del sistema sono le funzioni del tempo corrispondenti alla antitrasformazione dei fratti semplici:

$$f_{ih}(t) \;=\; K_{ih}\, \frac{t^{h-1}}{(h-1)!}\, e^{\rho_i t}$$

$$f_{jh}(t) \;=\; c_{jh}\, t^{h-1}\, e^{\sigma_j t}\, \cos(\omega_j t + \varphi_{jh})$$

dove ρ_i sono i poli reali della funzione di trasferimento e $\sigma_j \pm j\, \omega_j$ sono le coppie di poli complessi e coniugati.

- **Un sistema lineare è asintoticamente stabile se e solo se la funzione di trasferimento $G(s)$ ha tutti i poli a parte reale strettamente negativa.**

- Infatti, se tutti i poli sono a parte reale strettamente negativa (quindi $\rho_i < 0$ e $\sigma_j < 0$ per qualunque i, j) gli esponenziali nei modi corrispondenti tendono a zero per $t \to \infty$, qualunque sia la loro molteplicità.

2) **Asintotica Stabilità**: un sistema lineare è asintoticamente stabile se e solo se per qualunque ingresso limitato l'uscita rimane limitata.

- Supponiamo che la trasformata $X(s)$ del segnale di ingresso sia una funzione razionale fratta. A meno di eventuali semplificazioni, la scomposizione in fratti semplici del segnale di uscita $Y(s) = G(s)X(s)$ contiene i fratti semplici dovuti a $G(s)$ insieme ai fratti semplici dovuti a $X(s)$.

- Sei il sistema non è asintoticamente stabile, $G(s)$ ha dei poli a parte reale positiva o nulla. I corrispondenti modi non tendono a zero per $t \to \infty$. Con una semplice scelta del segnale di ingresso è possibile fare assumere all'uscita valori grandi a piacere (per t sufficientemente grande) anche con segnali di ingresso limitati.

- Esempio: consideriamo il segnale di ingresso $x(t) = \sin(2t)$ e il sistema descritto dalla funzione di trasferimento $G(s)$ con una coppia di poli immaginari $p_{1,2} = \pm 2j$:

$$G(s) = \frac{8}{s^2+4} = \frac{8}{(s+j2)(s-j2)}$$

  La risposta forzata risulta

$$Y_1(s) = G(s)X(s) = \frac{8}{s^2+4}\,\frac{2}{s^2+4} = \frac{16}{(s^2+4)^2}$$

  La funzione $Y_1(s)$ ha una coppia poli immaginari $p_{1,2} = \pm 2j$ con molteplicità due, quindi la sua antitrasformata $y(t)$ non è limitata per $t \to \infty$, infatti si calcola che:

$$y(t) = \sin(2\,t) - 2\,t\cos(2\,t)$$

- NOTA: Le trasformate $X(s)$ dei segnali di ingresso tipici sono funzioni razionali fratte (es: gradino, rampa, parabola, esponenziali, sinusoidi,...).

3) **Velocità di risposta**: Si desidera che il sistema controllato risponda ai comandi esterni più velocemente possibile, compatibilmente con i vincoli strutturali o dinamici del sistema.

- Consideriamo un sistema asintoticamente stabile e supponiamo che la trasformata $X(s)$ del segnale di ingresso sia una funzione razionale fratta, ad esempio un gradino.

- A meno di eventuali semplificazioni, la scomposizione in fratti semplici del segnale di uscita $Y(s) = G(s)X(s)$ contiene i fratti semplici dovuti a $G(s)$ insieme ai fratti semplici dovuti a $X(s)$.

- Il tempo necessario ai modi di $G(s)$ per portarsi a valori prossimi a zero determina il tempo del *transitorio* cioè il tempo necessario all'uscita $y(t)$ per portarsi al suo andamento a regime.

- I modi di $G(s)$ sono le funzioni del tempo corrispondenti alla antitrasformazione dei fratti semplici:

$$f_{ih}(t) = K_{ih} \frac{t^{h-1}}{(h-1)!} e^{\rho_i t}$$

$$f_{jh}(t) = c_{jh}\, t^{h-1}\, e^{\sigma_j t} \cos(\omega_j t + \varphi_{jh})$$

  dove ρ_i sono i poli reali della funzione di trasferimento e $\sigma_j \pm j\, \omega_j$ sono le coppie di poli complessi e coniugati.

- I modi di $G(s)$ tendono a zero tanto più rapidamente quanto più le parti reali dei poli sono negative, cioè tanto più i poli sono a sinistra dell'asse immaginario nel piano complesso.

Esempio 1). Consideriamo il sistema massa-molla-ammortizzatore descritto da:

$$m\,\ddot{z} + b\,\dot{z} + K\,z = u \qquad \to \qquad G(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{m\,s^2 + b\,s + K}$$

Fattorizzando $G(s)$ si ottiene

$$G(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{m}\,\frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{b}{m}} = K_p\,\frac{1}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{b}{m}}$$

I poli di $G(s)$ sono:

$$p_{1,2} = \frac{-b}{2m} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4\,m\,K}}{2m}$$

Confrontiamo due casi. Nel primo caso prendiamo $K = 1$, $m = 1$ e $b = 2$, i poli sono reali e coincidenti: $p_{1,2} = -1$. Nel secondo caso prendiamo massa e attrito maggiori mantenendo inalterata la costante elastica: $K = 1$, $m = 4$ e $b = 4$, i poli sono ancora reali e coincidenti ma più vicini all'asse immaginario: $p_{1,2} = -1/2$. Intuitivamente una massa e un attrito maggiori rallentano il sistema, infatti nel secondo caso la risposta al gradino (vedi figura 1) è più lenta.

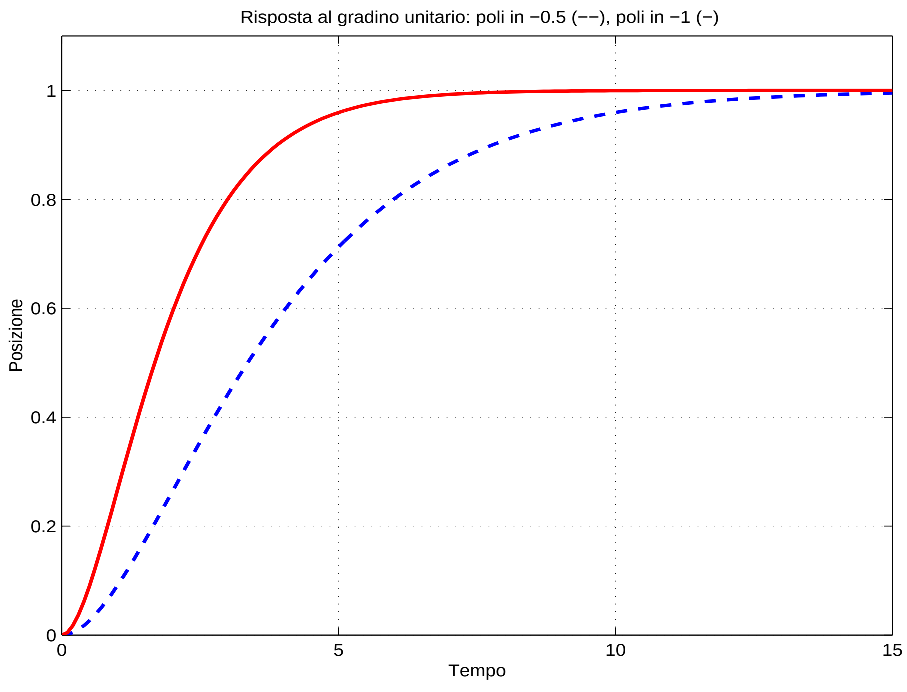


Figura 1: Risposta al gradino unitario: poli in -0.5 (tratti), poli in -1 (continuo).

Esempio 2). Consideriamo un sistema massa-molla-ammortizzatore descritto da:

$$m\ \ddot{z} + b\ \dot{z} + K\ z = u \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1}{m\ s^2 + b\ s + K}$$

I poli di $G(s)$ sono:

$$p_{1,2} = \frac{-b}{2m} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4\ m\ K}}{2m}$$

Manteniamo costante la costante elastica $K = 1$ l'attrito $b = 2$ e confrontiamo le risposte a un gradino di forza pari a 1 corrispondenti a $m = 1$ e a $m = 0.2$. Si potrebbe intuire che con una massa più piccola la risposta sia più veloce, ma la simulazione di figura 2 mostra il contrario!

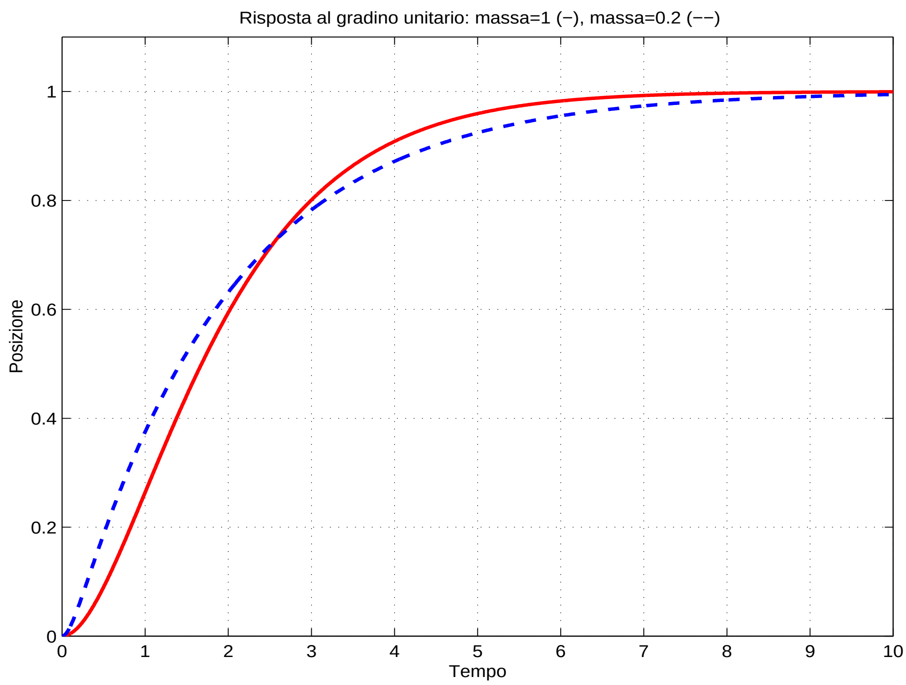


Figura 2: Risposta al gradino unitario: massa $m = 0.2$ (tratti), $m = 1$ (continuo).

Infatti con $m = 1$ i poli del sistema sono reali e coincidenti $p_{1,2} = -1$, mentre con $m = 0.2$ i poli sono in $p_3 = -0.52$ e $p_4 = -9.5$. Il polo $p_3 = -0.52$ è il più vicino all'asse immaginario quindi è quello il cui modo "rallenta" maggiormente il transitorio.

Schema riassuntivo sulle funzioni di trasferimento

Consideriamo la generica funzione di trasferimento di un sistema lineare:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + b_1\, s + b_0}{s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0}$$

dove i polinomi a numeratore e a denominatore sono primi fra loro, cioè non hanno fattori in comune e non si possono quindi semplificare fra loro.

- Il polinomio caratteristico è il polinomio a denominatore della funzione di trasferimento:

$$s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0$$

- I poli della funzione di trasferimento (o del sistema) sono i valori di s che annullano il denominatore di $G(s)$. Pertanto i poli si ottengono risolvendo l'equazione caratteristica nella variabile s:

$$s^n + a_{n-1}\, s^{n-1} + \ldots + a_1\, s + a_0 = 0$$

- il grado n del polinomio a denominatore è detto ordine del sistema. Il numero di poli della funzione di trasferimento è esattamente n.

- Gli zeri della funzione di trasferimento (o del sistema) sono i valori di s che annullano il numeratore di $G(s)$. Pertanto gli zeri si ottengono risolvendo nella variabile s l'equazione:

$$b_m s^m + b_{m-1}\, s^{m-1} + \ldots + b_1\, s + b_0 = 0$$

- il grado m del polinomio a numeratore coincide con il numero di zeri della funzione di trasferimento.

- La differenza $r = n - m$ fra i gradi del denominatore e del numeratore prende il nome di grado relativo della funzione razionale fratta $G(s)$.

- Il guadagno statico K_0 è il valore di $G(s)$ per $s \to 0$:

$$K_0 = \lim_{s \to 0} G(s)$$

Attenzione K_0 è infinito se $G(s)$ ha dei poli nell'origine!

- La funzione di trasferimento $G(s)$ si dice nella forma a poli e zeri se denominatore e numeratore sono espressi come prodotto di fattori semplici monici. La forma a poli e zeri permette di ricavare immediatamente i poli e gli zeri del sistema:

$$G(s) = K_p \frac{(s - z_1)(s - z_2)\dots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\dots(s - p_n)}$$

- La costante moltiplicativa nella forma a poli e zeri K_p è detta guadagno nella forma a poli e zeri.

- La funzione di trasferimento $G(s)$ si dice nella forma a costanti di tempo se in ogni fattore semplice del denominatore e del numeratore il termine indipendente da s (termine noto) è 1.

- La forma a costanti di tempo permette di ricavare immediatamente le costanti di tempo del sistema: sono i coefficienti di s (non di s^2!) quando $G(s)$ è nella forma a costanti di tempo.

- La costante moltiplicativa nella forma a poli e zeri K_τ (indicata anche con K) è detta guadagno nella forma a costanti di tempo.

- Solo quando K_0 è limitato, si ha: $K_0 = K_\tau$.

- Il numero h di poli nell'origine (cioè radici per $s = 0$ del denominatore) individua il tipo di sistema.

- Un sistema di tipo zero non ha poli nell'origine quindi $h = 0$. Per questi sistemi K_0 è limitato e inoltre $K_0 = K_\tau$.

- Un sistema di tipo 1 ha un polo nell'origine quindi $h = 1$. Per questi sistemi K_0 è illimitato. I sistemi di tipo 1 non sono asintoticamente stabili, ma possono essere semplicemente stabili!

- Un sistema di tipo h con $h > 2$ ha h poli nell'origine. Per questi sistemi K_0 è illimitato. Questi sistemi sono instabili!