Equazioni differenziali lineari

Da un punto di vista dinamico, i sistemi lineari stazionari sono descritti da equazioni differenziali ordinarie lineari a coefficienti costanti:

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_0\, y = b_m \frac{d^m x}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} x}{dt^{m-1}} + \ldots + b_0\, x$$

o con notazione più compatta:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}$$

dove $y(t)$ è la funzione *uscita* ed $x(t)$ è la funzione *ingresso*.

Condizione di fisica realizzabilità: $n \geq m$.

$$\begin{cases} \text{se } \; n > m \; \text{ il sistema è } \textit{strettamente proprio} \\ \text{se } \; n = m \; \text{ il sistema è } \textit{proprio} \\ \text{se } \; n < m \; \text{ il sistema è } \textit{improprio} \end{cases}$$

Per risolvere l'equazione differenziale occorre conoscere

i) le *condizioni iniziali*:

$$y(0^-)\ , \quad \left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0^-}\ , \ \ldots\ , \ \left.\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^-}.$$

ii) il *segnale di ingresso:*

$$x(t)\ , \qquad 0 \leq t \leq T$$

Si suppone che la funzione $x(t)$ sia *continua a tratti*, *limitata per ogni t finito* e che le condizioni iniziali della funzione $x(t)$ all'istante $t = 0^-$ sono tutte nulle:

$$x(0^-) = 0\ , \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0^-} = 0\ , \quad \ldots\ , \quad \left.\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}\right|_{t=0^-} = 0.$$

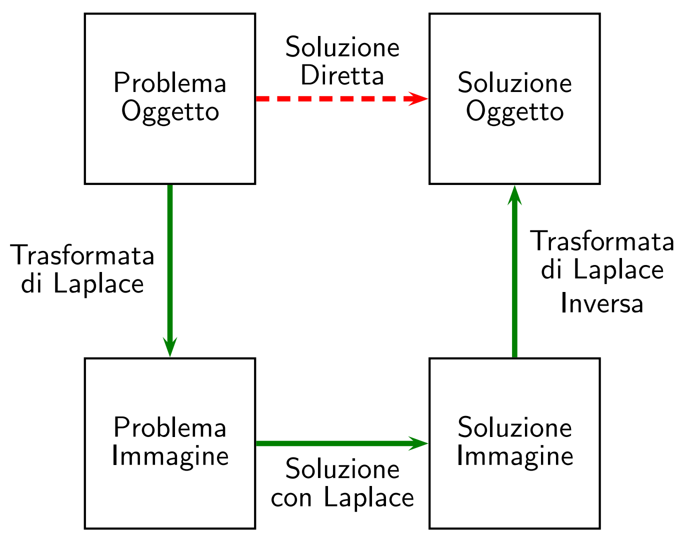
La soluzione dell'equazione differenziale è la somma di due funzioni:

$$y(t) = y_0(t) + y_1(t)$$

1. *l'evoluzione libera* $y_0(t)$, cioè la soluzione dell'equazione differenziale omogenea associata che si ottiene ponendo uguale a zero il segnale di ingresso: $x(t) \equiv 0$, $0 \leq t \leq T$.
2. *l'evoluzione forzata* $y_1(t)$, cioè la soluzione particolare che si ottiene ponendo a zero tutte le condizioni iniziali.

Le equazioni differenziali lineari tempo invarianti possono essere facilmente risolte utilizzando le *trasformate di Laplace*.

Le trasformate di Laplace stabiliscono una corrispondenza *biunivoca* tra le funzioni temporali $x(t)$, $y(t)$ (funzioni oggetto) e le corrispondenti funzioni complesse $X(s)$, $Y(s)$ (funzioni immagine).



Le trasformate di Laplace trasformano il *Problema Oggetto* in un corrispondente *Problema Immagine*. Tipicamente il *Problema Immagine* è di più facile soluzione.

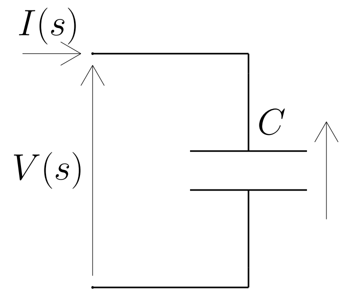
Le equazioni differenziali si trasformano in equazioni algebriche (Problema Immagine), per cui la loro soluzione è immediata (Solution di Laplace).

Dalla soluzione immagine si passa poi alla soluzione oggetto eseguendo sulle funzioni immagine l'operazione di *antitrasformazione*.

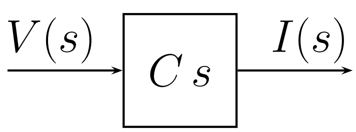
Orientamento di un sistema dinamico

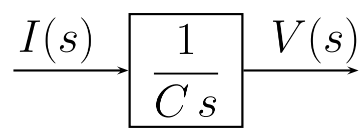
Un'equazione differenziale è correttamente orientata (con una causalità di tipo *integrale*) *se la variabile di uscita del sistema è quella a cui è associato il massimo grado di derivazione all'interno dell'equazione differenziale*. Questa regola è equivalente alla condizione di fisica realizzabilità: $n \geq m$. Per meglio comprendere questa condizione si consideri il seguente sistema lineare:

$$C\,\dot{V}(t) = I(t) \quad \leftrightarrow \quad C s\, V(s) = I(s) \quad \leftrightarrow$$

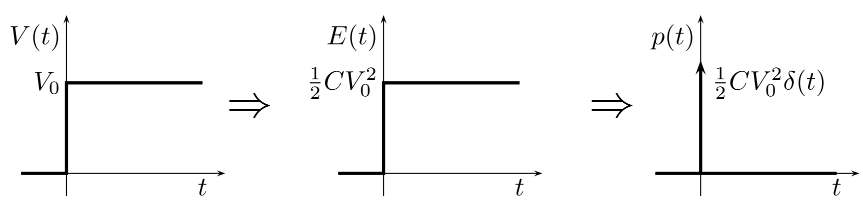


L'energia accumulata nel sistema è: $E(t) = \frac{1}{2} C\, V^2(t)$. Tale energia varia nel tempo solo se è presente un flusso di potenza $p(t) = \dot{E}(t) = V(t)\, I(t)$ in ingresso al sistema. Da un punto di vista *matematico* il sistema può essere orientato in due modi diversi:

a) 

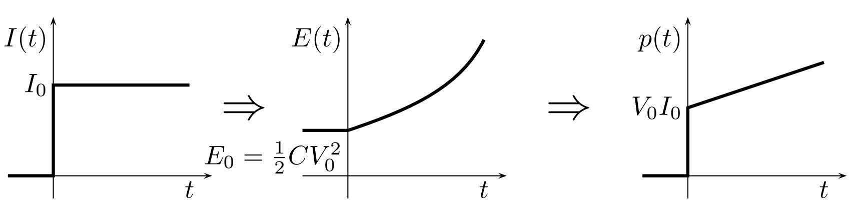
b) 

Da un punto di vista *energetico* solo l'orientamento b), cioè $I(s)$ in ingresso e $V(s)$ in uscita, è fisicamente realizzabile perchè è l'unico compatibile con una scelta arbitraria del segnale $I(s)$ in ingresso. L'orientamento a) non è compatibile con un gradino di tensione $V(t)$ in ingresso perchè questa condizione implicherebbe, per $t = 0$, una variazione istantanea dell'energia $E(t)$ accumulata nel sistema e quindi un flusso di potenza $p(t)$ infinito per $t = 0$.

a) 

$\Rightarrow\; p(t)|_{t=0} = \infty.$

L'orientamento b) è invece compatibile con un gradino di corrente $I(t)$:

b) 

$\Rightarrow\; p(t)|_{t=0} = V_0 I_0.$

Trasformate di Laplace

La *trasformata di Laplace* associa *in modo biunivoco* a una generica funzione reale del tempo $x(t)$ una funzione complessa $X(s)$ della variabile complessa s:

$$X(s) = \mathcal{L}\big[x(t)\big]$$

È definita nel modo seguente:

$$\boxed{X(s) := \int_0^\infty x(t)\, e^{-st}\, dt}$$

La trasformazione inversa viene detta *antitrasformata di Laplace*:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\big[X(s)\big]$$

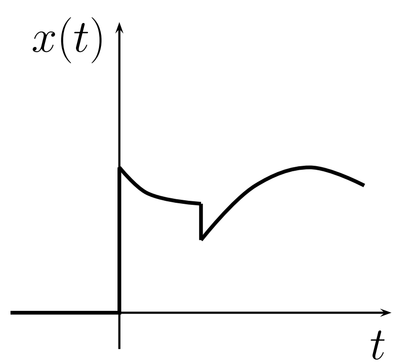
È definita nel modo seguente:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} X(s)\, e^{st}\, ds}$$

La funzione $X(s)$ è definita in un *dominio di convergenza* che consiste in un semipiano del piano s posto a destra di una retta parallela all'asse immaginario.

La funzione $x(t)$ è trasformabile secondo Laplace se:

1. $x(t) = 0$ per $t < 0$;
2. $x(t)$ è continua a tratti e limitata al finito per $t \geq 0$;
3. l'integrale $\displaystyle\int_0^\infty |x(t)| e^{-\sigma t}\, dt$ esiste per un qualche valore reale di σ.



Si tiene conto della *storia passata* della variabile $x(t)$ per $t < 0$ considerando opportune *condizioni iniziali* all'istante $t = 0$.

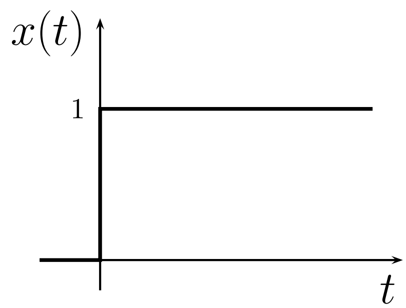
Trasformate di Laplace dei segnali di uso più comune:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[t^n e^{-a\,t}\right] = \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}}$$

Come casi particolari di questa relazione si ottengono le trasformate di Laplace dei seguenti segnali:

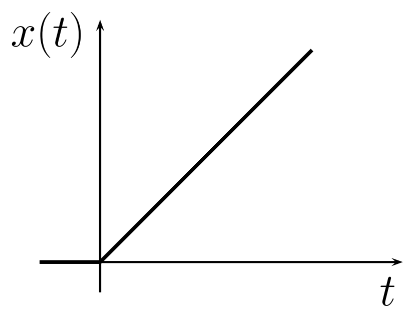
a) **Gradino unitario** ($n = 0$, $a = 0$):

$$x(t) = u(t) \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s}$$



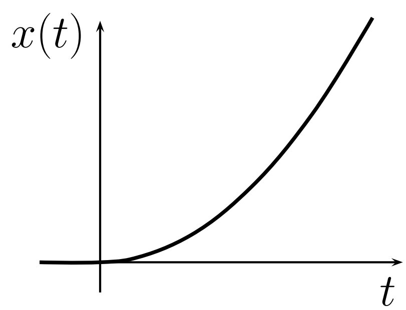
b) **Rampa unitaria** ($n = 1$, $a = 0$):

$$x(t) = t \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s^2}$$



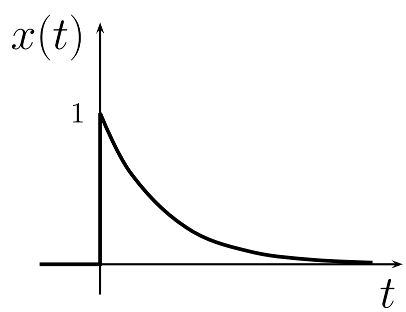
c) **Parabola unitaria** ($n = 2$, $a = 0$):

$$x(t) = \frac{t^2}{2} \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s^3}$$



d) **Esponenziale** ($n = 0$, $a > 0$):

$$x(t) = e^{-a\,t} \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s+a}$$



e) **Sinusoide**: $x(t) = \sin \omega t$. Tale segnale si ricava dalla composizione di due esponenziali:

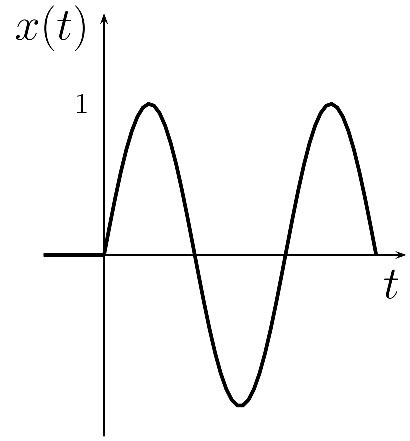
$$x(t) = \sin \omega t = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}$$

Per la linearità della trasformata di Laplace si ha infatti che:

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{L}[\sin \omega t] = \frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{1}{2j}\left[\frac{2\omega j}{s^2+\omega^2}\right]$$

da cui si ricava:

$$x(t) = \sin \omega t \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

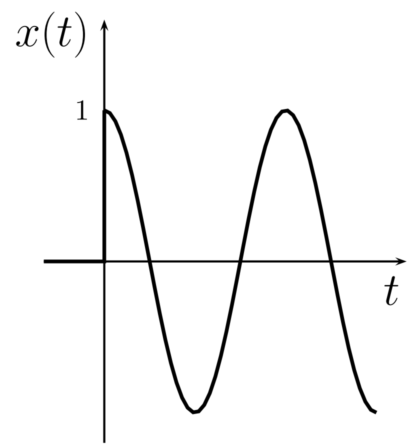


f) **Cosinusoide**: $x(t) = \cos \omega t$. Per tale funzione valgono le relazioni:

$$\mathcal{L}[\cos \omega t] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}}{2}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{2s}{s^2+\omega^2}\right]$$

da cui si ottiene:

$$x(t) = \cos \omega t \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$



Poli e zeri di una funzione razionale fratta

- Le trasformate di Laplace $X(s)$ dei segnali di uso piú comune sono funzioni razionali fratte, rapporto di due polinomi in s:

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^n + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

- Gli **zeri** della funzione $X(s)$ sono le soluzioni del polinomio a numeratore:

$$N(s) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (s - z_1)(s - z_1)\ \ldots\ (s - z_m) = 0$$

- I **poli** della funzione $X(s)$ sono le soluzioni del polinomio a denominatore:

$$D(s) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad (s - p_1)(s - p_1)\ \ldots\ (s - p_n) = 0$$

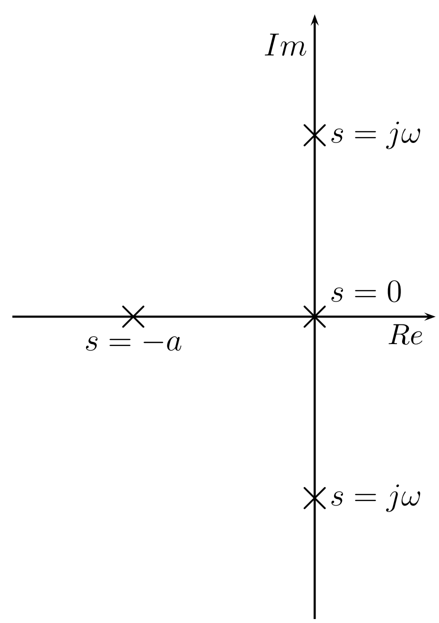
- Il **grado relativo** r della funzione $X(s)$ é definito nel seguente modo:

$$r = n - m$$

come differenza tra i gradi n ed m dei due polinomi $D(s)$ e $N(s)$.

- Posizione dei poli delle trasformate di Laplace di uso piú comune:

$x(t)$	$X(s)$	poli	molteplicitá
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$s = 0$	1
t	$\frac{1}{s^2}$	$s = 0$	2
$\frac{t^2}{2}$	$\frac{1}{s^3}$	$s = 0$	3
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$	$s = -a$	1
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$s_{1,2} = \pm j\omega$	1
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$s_{1,2} = \pm j\omega$	1



Proprietà della trasformata di Laplace

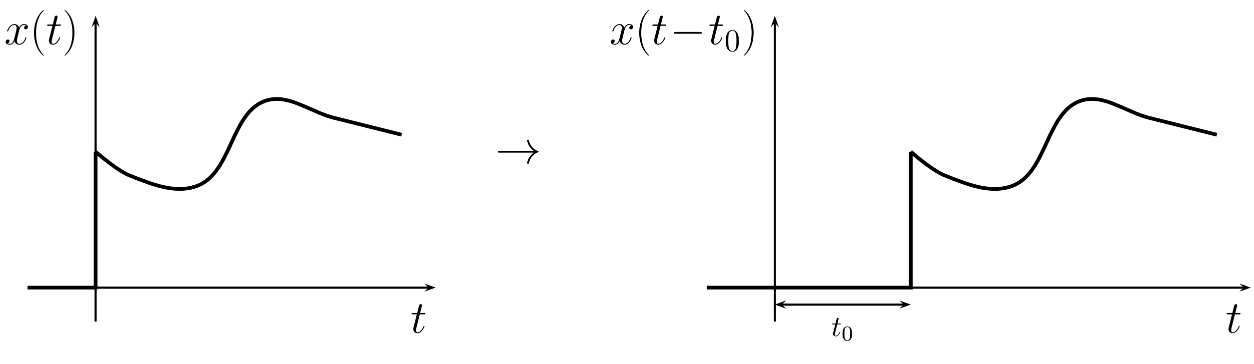
Linearità. Dette c_1 e c_2 due costanti complesse arbitrarie, $x_1(t)$ ed $x_2(t)$ due funzioni del tempo le cui trasformate siano rispettivamente $X_1(s)$ e $X_2(s)$, vale la relazione

$$\boxed{\mathcal{L}\big[c_1\, x_1(t) + c_2\, x_2(t)\big] = c_1\, X_1(s) + c_2\, X_2(s)}$$

Traslazione nel tempo. Sia $X(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $x(t)$, nulla per $t<0$. Vale la relazione

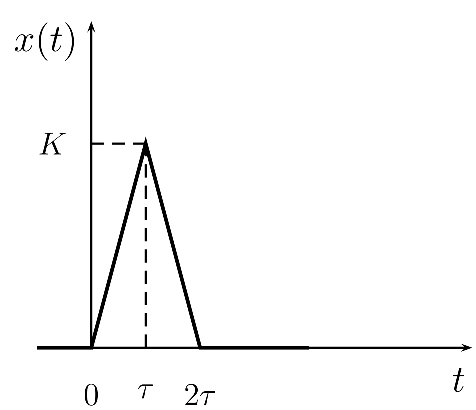
$$\boxed{\mathcal{L}\big[x(t-t_0)\big] = e^{-t_0\, s}\, X(s)}$$

cioè moltiplicare per la funzione $e^{-t_0 s}$ nello spazio trasformato vuol dire, nel tempo, traslare in ritardo la funzione $x(t)$ della quantità t_0.

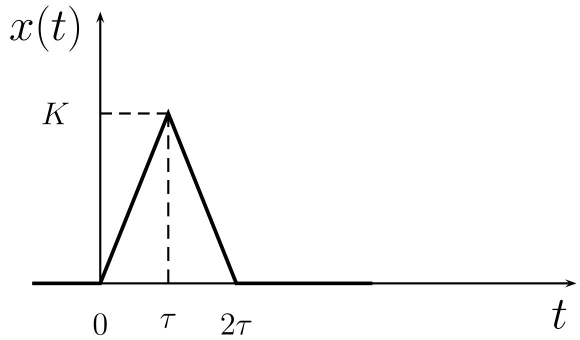


Esempio: Il segnale $x(t)$ è scomponibile nella somma di tre rampe, di pendenze K/τ, $-2K/\tau$ e K/τ, applicate rispettivamente agli istanti $t=0$, $t=\tau$ e $t=2\,\tau$ utilizzando il teorema della traslazione nel tempo, si deduce

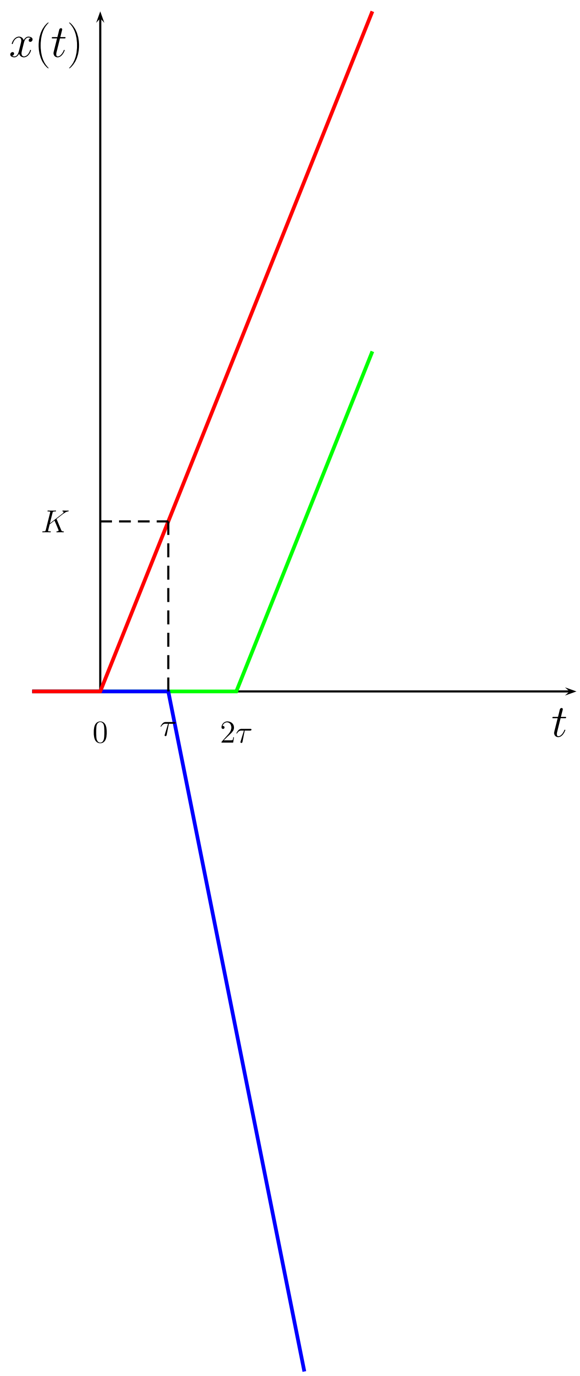
$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{K}{\tau\, s^2}\,(1 - 2\, e^{-\tau s} + e^{-2\tau s}) \\ &= \frac{K}{\tau\, s^2}\,(1 - e^{-\tau s})^2 \end{aligned}$$



Il seguente segnale:



si ottiene come somma dei seguenti 3 segnali a rampa:



Trasformata dell'integrale. Sia $X(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $x(t)$. Vale la relazione

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^t x(\tau)\,d\tau\right] = \frac{1}{s}X(s)}$$

Moltiplicare per $\frac{1}{s}$ una funzione $X(s)$ vuol dire calcolare l'integrale del segnale $x(t)$.

Trasformata della derivata generalizzata. Sia $X(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $x(t)$. Vale la relazione

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\frac{dx(t)}{dt}\right] = s\,X(s) - x(0^-)}$$

dove $x(0^-)$ è il valore che la funzione $x(t)$ assume all'istante $t = 0^-$. Nel caso di condizioni iniziali nulle, moltiplicare per s una funzione $X(s)$ vuol dire calcolare la derivata del segnale $x(t)$.

Teorema del valore iniziale. Sia $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$. Vale la relazione:

$$\boxed{\lim_{t\to 0^+} x(t) = \lim_{s\to\infty} s\,X(s)}$$

Questo teorema è valido per qualsiasi funzione $X(s)$.

Teorema del valore finale. Sia $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$. Vale la relazione:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{s\to 0} s\,X(s)}$$

Questo teorema *è valido solamente per funzioni $X(s)$ che abbiamo tutti i poli a parte reale negativa, eccezion fatta per un polo nell'origine.*

- L'utilizzo del <u>teorema del valore iniziale</u> é strettamente legato **al grado relativo** r della funzione $X(s)$:

  1) Se il grado relativo é nullo, $r = n - m = 0$, il valore iniziale $x(0^+)$ della funzione $x(t)$ é infinito:

  $$r = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(0^+) = \infty$$

  2) Se il grado relativo é unitario, $r = n - m = 1$, il valore iniziale $x(0^+)$ della funzione $x(t)$ é costante:

  $$r = 1 \qquad \Rightarrow \qquad x(0^+) = \lim_{s \to \infty} s\, X(s)$$

  3) Se il grado relativo é maggiore di uno, $r = n - m > 1$, il valore iniziale $x(0^+)$ della funzione $x(t)$ é nullo:

  $$r > 1 \qquad \Rightarrow \qquad x(0^+) = 0$$

- L'utilizzo del <u>teorema del valore finale</u> é strettamente legato al **tipo** h della funzione $X(s)$, cioé al numero h dei poli nulli della funzione $X(s)$:

  1) Se la funzione $X(s)$ é di tipo zero, $h = 0$, il valore finale $x(\infty)$ della funzione $x(t)$ é nullo:

  $$h = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(\infty) = 0$$

  Il teorema del valore finale, infatti, presuppone che tutti i poli non nulli della funzione $X(s)$ siano a parte reale negativa.

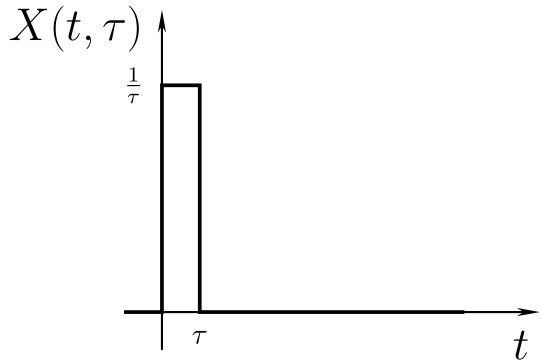
  2) Se la funzione $X(s)$ é di tipo uno, $h = 1$, il valore finale $x(\infty)$ della funzione $x(t)$ é costante:

  $$h = 0 \qquad \Rightarrow \qquad x(\infty) = \lim_{s \to 0} s\, X(s)$$

  3) Se la funzione $X(s)$ é di tipo maggiore di uno, $h > 1$, il valore finale $x(\infty)$ della funzione $x(t)$ non puó essere calcolato utilizzando il teorema del valore finale.

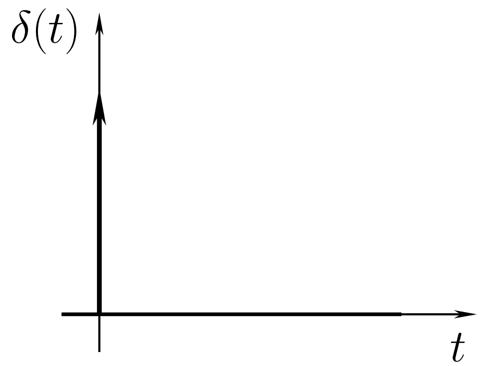
Impulso di Dirac $\delta(t)$. È un segnale ideale che approssima un impulso di area unitaria.

$$\delta(t) = \lim_{\tau\to 0} X(t,\tau)$$



L'impulso di Dirac viene rappresentato nel modo seguente:

Funzione $\delta(t)$



La trasformata di Laplace dell'impulso di Dirac è:

$$X(s) = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

Valgono infatti le seguenti relazioni:

$$X(s) = \mathcal{L}[\lim_{\tau\to 0} X(t,\tau)] = \lim_{\tau\to 0} \mathcal{L}[X(t,\tau)] = \lim_{\tau\to 0} X(s,\tau)$$

Essendo

$$X(s,\tau) = \frac{1}{\tau s} - \frac{1}{\tau s} e^{-\tau s} = \frac{1}{\tau s}\left(1 - e^{-\tau s}\right)$$

si ha che

$$X(s) = \lim_{\tau\to 0} X(s,\tau) = \lim_{\tau\to 0} \frac{\frac{d}{d\tau}(1 - e^{-\tau s})}{\frac{d}{d\tau}(\tau s)} = \lim_{\tau\to 0} \frac{s e^{-\tau s}}{s} = 1$$

La risposta di un sistema all'impulso di Dirac coincide con l'antitrasformata della funzione di trasferimento $G(s)$:

$$Y(s) = G(s)\underbrace{X(s)}_{1} = G(s) \qquad \rightarrow \qquad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = g(t)$$

Teorema della traslazione in s. Sia $X(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $x(t)$. Vale la relazione:

$$\boxed{\mathcal{L}\left[e^{-at}x(t)\right] = X(s+a)}$$

Derivate di ordine superiore al primo. Sia $X(s)$ la trasformata di Laplace della funzione $x(t)$ e siano $x(0^-)$, $\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0^-}$, $\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=0^-}$, ... le condizioni iniziali della funzione $x(t)$ e delle sue derivate all'istante $t=0^-$. Valgono le relazioni:

$$\boxed{\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] &= s\,X(s) - x(0^-)\\
\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] &= s^2\,X(s) - s\,x(0^-) - \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0^-}\\
\mathcal{L}\left[\frac{d^3x}{dt^3}\right] &= s^3\,X(s) - s^2\,x(0^-) - s\left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=0^-} - \left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{t=0^-}\\
\dots &= \dots\\
\mathcal{L}\left[\frac{d^ix}{dt^i}\right] &= s^i\,X(s) - \sum_{j=0}^{i-1} s^{i-j-1}\left.\frac{d^jx}{dt^j}\right|_{t=0^-}
\end{aligned}}$$

Teorema della trasformata del prodotto integrale. Siano $X_1(s)$ e $X_2(s)$ le trasformate di Laplace delle funzioni $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Vale la relazione

$$\boxed{\mathcal{L}\left[\int_0^\infty x_1(\tau)\,x_2(t-\tau)\,d\tau\right] = X_1(s)\,X_2(s)}$$

L'integrale di convoluzione delle funzioni $x_1(t)$ e $x_2(t)$ gode della proprietà commutativa:

$$\int_0^\infty x_1(\tau)\,x_2(t-\tau)\,d\tau = \int_0^\infty x_2(\tau)\,x_1(t-\tau)\,d\tau$$

Funzione di trasferimento

Si consideri l'equazione differenziale:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}$$

Sostituendo alle funzioni e alle loro derivate le rispettive trasformate di Laplace, si ottiene la relazione

$$\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i\, Y(s) - \sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^{i-j-1} \left.\frac{d^j y}{dt^j}\right|_{t=0^-} = \sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i\, X(s)$$

in cui con $X(s)$ e $Y(s)$ si indicano le trasformate di Laplace dei segnali di ingresso e uscita $x(t)$ e $y(t)$.

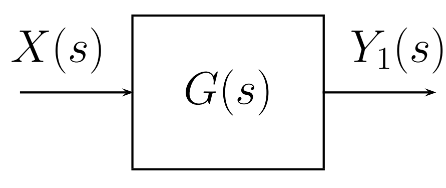
La trasformata di Laplace $Y(s)$ è data quindi dalla somma di due funzioni:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\overbrace{\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}^{G(s)}}{\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i}\, X(s)}_{Y_1(s)} \; + \; \underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i \sum_{j=0}^{i-1} s^{i-j-1} \left.\frac{d^j y}{dt^j}\right|_{t=0^-}}{\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i}}_{Y_0(s)}$$

Le funzioni $Y_0(s)$ e $Y_1(s)$ sono, rispettivamente, le trasformate dell'*evoluzione libera* $y_0(t)$ e dell'*evoluzione forzata* $y_1(t)$.

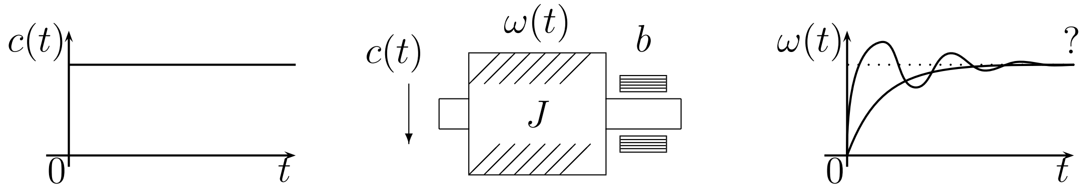
La seguente *funzione di trasferimento* $G(s)$ del sistema

$$\boxed{G(s) = \frac{Y_1(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i}}$$



è definita a partire da *condizioni iniziali identicamente nulle*.

Esempio. Si consideri un elemento meccanico con inerzia J, coefficiente di attrito lineare b che ruota alla velocità angolare ω al quale venga applicata una coppia esterna $c(t)$.



Si richiede di determinare la risposta del sistema al gradino unitario.

Per rispondere esattamente a questa domanda occorre determinare il modello dinamico del sistema. L'equazione differenziale che caratterizza il sistema è la seguente:

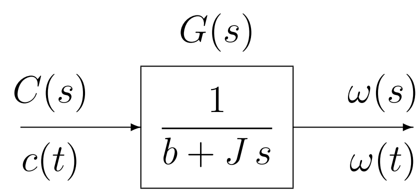
$$\frac{d[J\omega(t)]}{dt} = c(t) - b\,\omega(t) \qquad \leftrightarrow \qquad J\dot{\omega}(t) + b\,\omega(t) = c(t)$$

Partendo da condizioni iniziali nulle e trasformando secondo Laplace si ottiene:

$$J\,s\,\omega(s) + b\,\omega(s) = C(s) \qquad \leftrightarrow \qquad \omega(s) = \frac{1}{b + J\,s}\,C(s)$$

La funzione di trasferimento $G(s)$ che caratterizza il sistema è quindi la seguente:

$$G(s) = \frac{1}{b + J\,s}$$



I coefficienti di questa funzione sono in corrispondenza biunivoca con i coefficienti dell'equazione differenziale. Posto $C(s) = \frac{1}{s}$, la risposta al gradino del sistema in ambito trasformato è la seguente:

$$\omega(s) = G(s)\,C(s) \qquad \rightarrow \qquad \omega(s) = \frac{1}{(b + J\,s)s}$$

Alcune informazioni sull'andamento di $\omega(t)$ si possono ricavare direttamente da $\omega(s)$ anche senza antitrasformare. Applicando il teorema del valore iniziale, per esempio, si ricava il valore di $\omega(t)$ per $t = 0^+$:

$$\omega(0^+) = \omega(t)|_{t\to 0} = \lim_{s\to\infty} s\,\omega(s) = \lim_{s\to\infty} s\,\frac{1}{(b + J\,s)s} = 0$$

Applicando invece il teorema del valore finale si ricava il valore di $\omega(t)$ per $t \to \infty$:

$$\omega(\infty) = \omega(t)|_{t\to\infty} = \lim_{s\to 0} s\,\omega(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{1}{(b + J\,s)s} = \frac{1}{b}$$

Applicando il teorema del valore iniziale è anche possibile calcolare il valore dell'accelerazione $\dot{\omega}(t)$ per $t = 0^+$:

$$\dot{\omega}(0^+) = \dot{\omega}(t)|_{t\to 0} = \lim_{s\to\infty} s\,[\underbrace{s\,\omega(s)}_{\dot{\omega}(s)}] = \lim_{s\to\infty} \frac{s^2}{(b+J\,s)s} = \frac{1}{J}$$

Infatti, in ambito trasformato, l'accelerazione $\dot{\omega}(s)$ si ottiene semplicemente moltiplicando la velocità $\omega(s)$ per la variabile s (che rappresenta l'operatore "derivata" di Laplace).
Per ottenere esattamente l'andamento temporale $\omega(t)$ occorre antitrasformare la funzione $\omega(s)$. Il modo più semplice per farlo è utilizzare la scomposizione in fratti semplici. Nel caso in esame, esistono sempre due coefficienti α e β che permettono di scomporre la funzione $\omega(s)$ nel modo seguente:

$$\omega(s) = \frac{1}{(b+J\,s)s} \qquad \leftrightarrow \qquad \omega(s) = \frac{\alpha}{b+J\,s} + \frac{\beta}{s}$$

I coefficienti α e β si determinano (per esempio) imponendo l'uguaglianza fra le due espressioni:

$$\omega(s) = \frac{\alpha}{b+J\,s} + \frac{\beta}{s} = \frac{\alpha s + \beta(b+J\,s)}{(b+J\,s)s} = \frac{(\alpha+\beta J)\,s + \beta b}{(b+J\,s)s} = \frac{1}{(b+J\,s)s}$$

Risolvendo si ricava:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \alpha+\beta J & = & 0 \\ \beta b & = & 1 \end{array}\right. \qquad \rightarrow \qquad \left\{\begin{array}{lcl} \alpha & = & -\frac{J}{b} \\ \beta & = & \frac{1}{b} \end{array}\right.$$

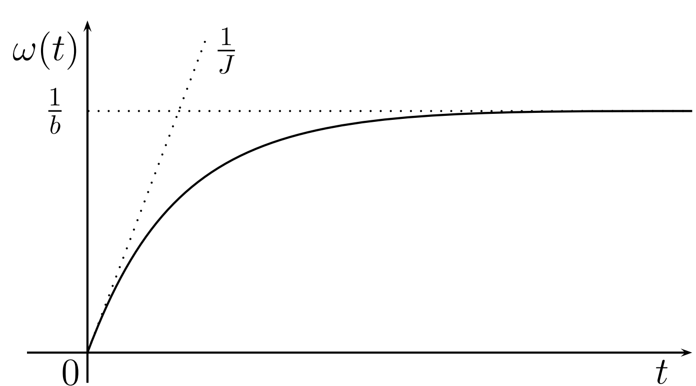
per cui si ha

$$\omega(s) = \frac{1}{(b+J\,s)s} = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{s} - \frac{J}{b+J\,s}\right] = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{b}{J}}\right]$$

Antitrasformando i singoli elementi si ricava la funzione $\omega(t)$:

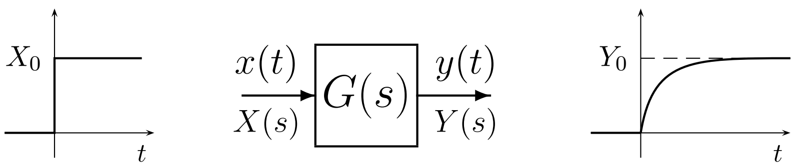
$$\omega(t) = \frac{1}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{J}\,t}\right)$$

L'andamento temporale è di tipo esponenziale:



Risposta al gradino unitario di un sistema $G(s)$

• Il **guadagno statico** K_0 di un sistema $G(s)$ è definito come il rapporto Y_0/X_0 tra l'ampiezza Y_0 del segnale in uscita $y(t)$ che si ottiene a regime quanto il sistema $G(s)$ è sollecitato in ingresso con un gradino costante di ampiezza X_0.



$$\Rightarrow \qquad K_0 = \frac{Y_0}{X_0} = G(0).$$

Utilizzando il criterio del valore finale è facile dimostrare che il guadagno statico K_0 di un sistema $G(s)$ coincide con $G(0) = G(s)|_{s=0}$, cioè con il valore della funzione $G(s)$ per $s = 0$:

$$Y_0 = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \lim_{s\to 0} s\,G(s)\,\frac{X_0}{s} = G(0)\,X_0 \quad \Rightarrow \quad K_0 = \frac{Y_0}{X_0} = G(0).$$

Da un punto di vista teorico il guadagno statico è definibile solo per sistemi $G(s)$ asintoticamente stabili (gli unici per i quali l'uscita a regime tende ad un valore costante), ma per estensione è prassi parlare di guadagno statico $G(0)$ anche per i sistemi $G(s)$ instabili o semplicemente stabili.

• **La risposta $y(t)$ al gradino unitario** $x(t) = X_0 = 1$, $X(s) = \frac{1}{s}$, di un sistema dinamico $G(s)$**gode delle seguenti proprietà**:

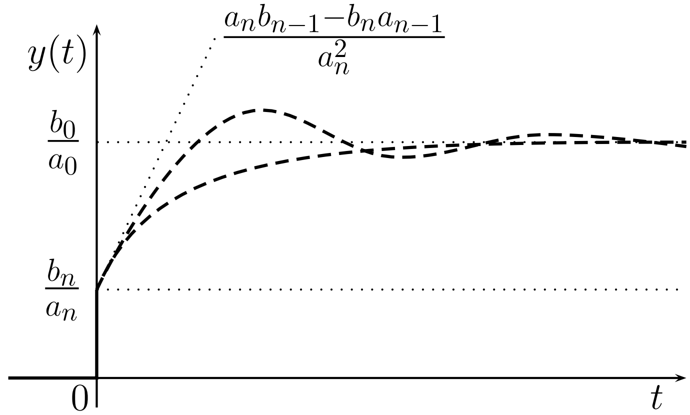
$$\begin{aligned}
1)\;\; y(\infty) &= \lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y(s) = \lim_{s\to 0} s\,G(s)\,\frac{1}{s} = \lim_{s\to 0} G(s) = G(0)\\
2)\;\; y(0^+) &= \lim_{t\to 0^+} y(t) = \lim_{s\to\infty} s\,Y(s) = \lim_{s\to\infty} s\,G(s)\,\frac{1}{s} = \lim_{s\to\infty} G(s) = G(\infty)\\
3)\;\; \dot{y}(0^+) &= \lim_{t\to 0^+} \dot{y}(t) = \lim_{s\to\infty} s^2\,Y(s) = \lim_{s\to\infty} s^2\,G(s)\,\frac{1}{s} = \lim_{s\to\infty} s\,G(s)\\
\vdots \;\; &= \;\; \vdots
\end{aligned}$$

Queste proprietà si ottengono direttamente applicando il teorema del valore finale e il teorema del valore iniziale. La proprietà 1) vale solo per sistemi $G(s)$ asintoticamente stabili, mentre tutte le altre proprietà valgono per un qualunque sistema $G(s)$.

• Si consideri un sistema dinamico caratterizzato dalle seguente funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

• Se $m = n$ e se il sistema è asintoticamente stabile (tutti i poli della G(s) sono a parte reale negativa), l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ del sistema $G(s)$ ad un gradino unitario $x(t) = 1$ è il seguente:



Infatti la funzione $G(s)$ può sempre essere riscritta nel seguente modo:

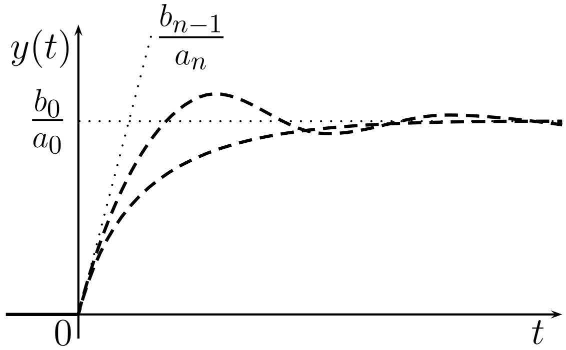
$$G(s) = \frac{b_n}{a_n} + \frac{(b_{n-1} - \frac{b_n}{a_n} a_{n-1}) s^{n-1} + (b_{n-2} - \frac{b_n}{a_n} a_{n-2}) s^{n-2} + \ldots}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

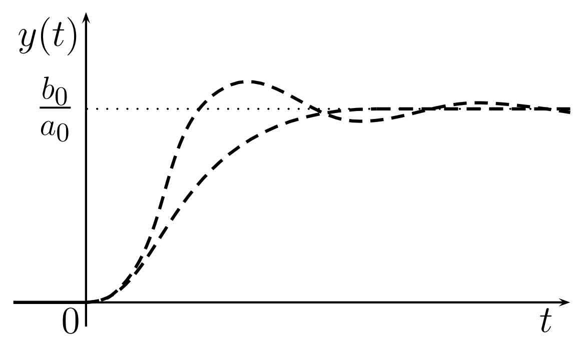
dove $\frac{b_n}{a_n}$ è un guadagno che moltiplica il gradino unitario in ingresso.

• Casi particolari:

1) $(b_n = 0) \leftrightarrow (n = m + 1)$:

2) $(b_n = b_{n-1} = 0) \leftrightarrow (n = m + 2)$:





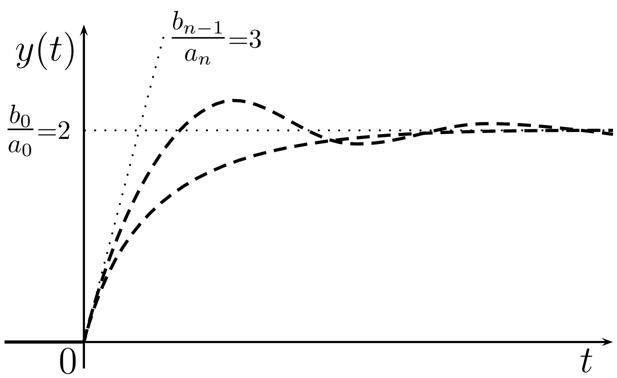
Esempio. Calcolare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ al gradino unitario della seguente equazione differenziale:

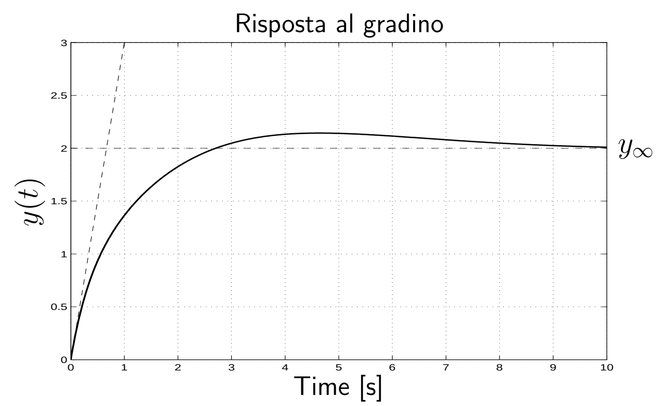
$$\dddot{y}(t) + 4\,\ddot{y}(t) + 3\,\dot{y}(t) + y(t) = 3\,\ddot{x}(t) + 5\,\dot{x}(t) + 2\,x(t)$$

Utilizzando la trasformata di Laplace si ricava immediatamente la funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{3\,s^2 + 5\,s + 2}{s^3 + 4\,s^2 + 3\,s + 1}$$

In questo caso il grado relativo della funzione $G(s)$ è $r = n - m = 1$ per cui l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ al gradino unitario è il seguente:

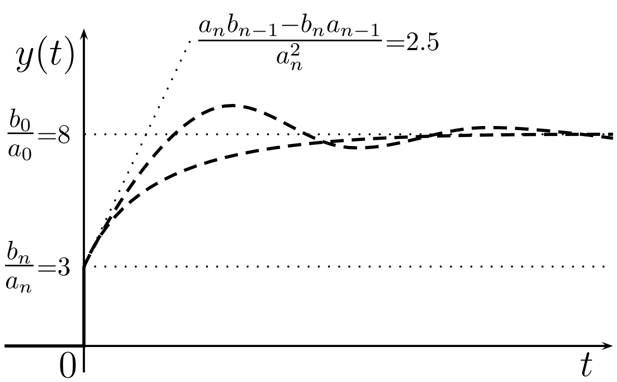


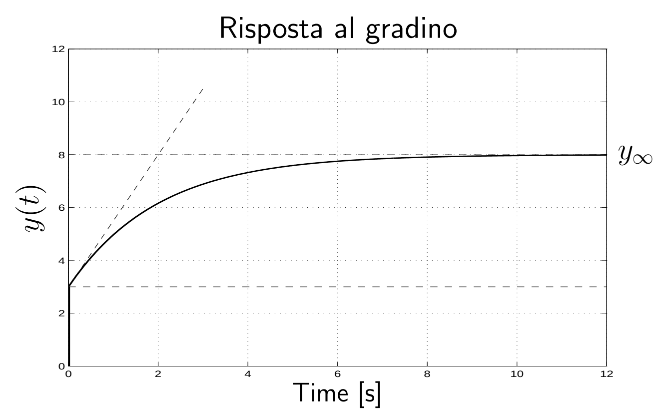


Esempio. Calcolare l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ al gradino unitario della seguente funzione di trasferimento $G(s)$:

$$G(s) = \frac{6\,s + 8}{2\,s + 1}$$

In questo caso il grado relativo della funzione $G(s)$ è nullo per cui l'andamento qualitativo della risposta $y(t)$ al gradino unitario è il seguente:





La funzione $G(s)$ può infatti essere riscritta nel seguente modo:

$$G(s) = 3 + \frac{5}{2\,s + 1}$$

Il primo termine corrisponde al gradino di ampiezza 3, mentre il secondo termine rappresenta un sistema del primo ordine con guadagno statico 5 e con pendenza iniziale $\frac{5}{2} = 2.5$.