Funzione di trasferimento $G(s)$ di sistemi fisici

- Sia $G(s)$ la funzione di trasferimento che descrive il funzionamento di un sistema fisico (di qualunque natura) che non abbia al proprio interno nessuna fonte di energia.

- Sotto questa ipotesi la funzione $G(s)$ sicuramente soddisfa le seguenti proprietá:

  1. L'ordine della funzione di trasferimento é uguale al numero di elementi fisici che accumulano energia in modo indipendente. Quest proprietá nasce dal fatto che ogni elemento dinamico che accumula energia é descritto da un'equazione differenziale del primo ordine.

  2. Tutti i poli della funzione $G(s)$ sono a parte reale o nulla, cioé il sistema é asintoticamente o semplicemente stabile. Infatti tutti i sistema fisici che non hanno fonti di energia al proprio interno possono solo accumulare o dissipare l'energia presente al loro interno. Inoltre, la funzione di trasferimento $G(s)$ descrive il modo in cui l'energia si muove e si sposta all'interno del sistema. Ne segue che l'energia all'interno del sistema puó solo diminuire (sistemi asintoticamente stabili) o rimanere costante nel tempo (sistemi semplicemente stabili).

  3. La funzione di trasferimento $G(s)$ di un sistema fisico che non ha elementi dissipativi al proprio interno é caratterizzata dal fatto che tutti i suoi poli si trovano sull'asse immaginario e l'energia contenuta all'interno del sistema rimane costante nel tempo. Infatti, se l'energia del sistema non diminuisce nel tempo il comportamento dinamico del sistema puó essere descritto solamente da segnali temporali costanti o sinusoidali. Entrambi questi segnali sono caratterizzati da poli posizionati sull'asse immaginario: poli nell'origine per i segnali costanti e poli complessi coniugati a parte reale nulla per i segnali sinusoidali.

  4. Se la funzione di trasferimento $G(s) = N(s)/D(s)$ ha tutti i suoi poli sull'asse immaginario, allora il polinomio a denominatore $D(s)$ é caratterizzato dal fatto di avere solo i termini a potenza pari in s, oppure solo i termini a potenza dispari in s. Questa é una proprietá

matematica che vale per tutti i polinomi a coefficienti reali che abbiano tutte le radici sull'asse immaginario. Non vale invece il viceversa: non tutti i polinomi a potenze pari o a potenze dispari sono caratterizzati dal fatto di avere tutte le proprie radici sull'asse immaginario.

5. Le frequenze di risonanza di un sistema fisico privo di dissipazioni al proprio interno coincidono con i poli sull'asse immaginario della corrispondente funzione di trasferimento $G(s)$.

6. Il massimo numero n_r di frequenze di risonanza di un sistema fisico di ordine n é il seguente:

$$n_r = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{se } n \text{ é pari} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é dispari} \end{cases}$$

.

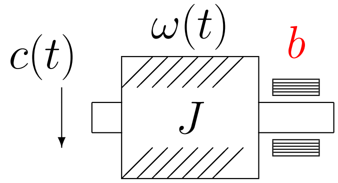
Tutte le precedenti proprietá possono essere facilmente verificate facendo riferimento ad esempi fisici.

Frequenze di risonanza dei sistemi fisici: esempi

1) Rotore con attrito.

Parametri del sistema fisico:

$\omega(t)$	:	velocità angolare	J	:	inerzia
$c(t)$	:	coppia in ingresso	b	:	Coefficiente di attrito lineare



Equazione differenziale e funzione di trasferimento:

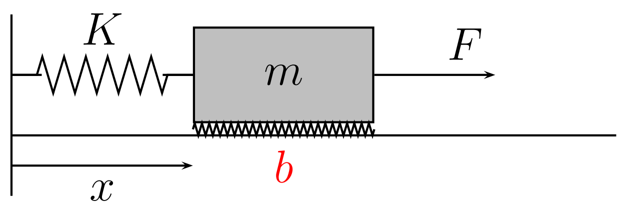
$$J\dot{\omega}(t) + b\,\omega(t) = c(t) \qquad \leftrightarrow \qquad G(s) = \frac{1}{b + J\,s}$$

In assenza di attriti, cioé $b = 0$, il sistema ha un polo nell'origine:

$$G(s) = \frac{1}{J\,s}$$

Essendo del primo ordine il sistema non ha frequenze di risonanza.

2) **Sistema massa-molla-smorzatore.**



Parametri del sistema fisico:

$x(t)$	:	posizione	m	:	massa
$\dot{x}(t)$	:	velocità	K	:	rigidità della molla
$\ddot{x}(t)$	:	accelerazione	b	:	Coefficiente di attrito lineare
$F(t)$	:	forza applicata	$P(t)$	:	Quantità di moto

Equazione differenziale e funzione di trasferimento:

$$m\ddot{x}(t) + b\,\dot{x}(t) + K\,x(t) = F(t) \qquad \leftrightarrow \qquad G(s) = \frac{1}{m\,s^2 + b\,s + K}$$

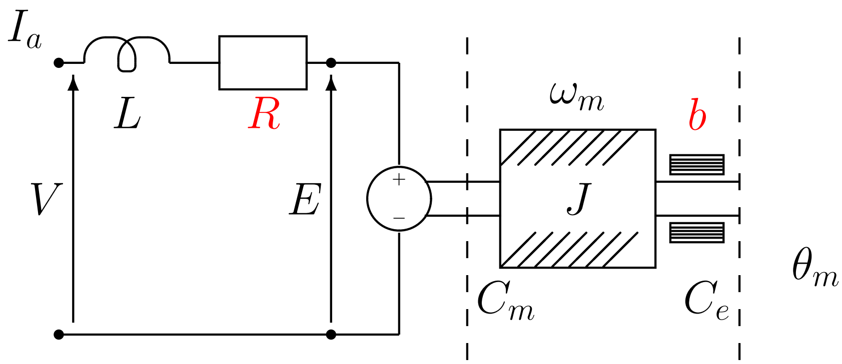
In assenza di attriti, cioé quando $b = 0$, il sistema ha due poli complessi coniugati sull'asse immaginario:

$$G(s) = \frac{1}{m\,s^2 + K}$$

In assenza di attriti, la frequenza di risonanza ω_r del sistema é:

$$m\,s^2 + K = 0 \qquad \rightarrow \qquad s_{1,2} = \pm j\sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \rightarrow \qquad \omega_r = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

3) Motore elettrico in corrente continua.



Trasformata di Laplace del legame tra le variabili di ingresso, $V(t)$ e $C_e(t)$, e la variabile di uscita $\omega(t)$:

$$\omega_m(s) = G_1(s)\, V(s) + G_2(s)\, C_e(s)$$

dove $G_1(s)$ lega l'ingresso di controllo $V(t)$ all'uscita $\omega_m(t)$

$$G_1(s) = \frac{K_e}{(R + L\,s)(b + J\,s) + K_e^2}$$

mentre $G_2(s)$ lega l'ingresso di disturbo $C_e(t)$ all'uscita $\omega_m(t)$:

$$G_2(s) = \frac{-(R + L\,s)}{(R + L\,s)(b + J\,s) + K_e^2}$$

In assenza di attriti, cioé quando $b = 0$ e $R = 0$, entrambe le funzioni $G_1(s)$ e $G_2(s)$ hanno due poli complessi coniugati sull'asse immaginario:

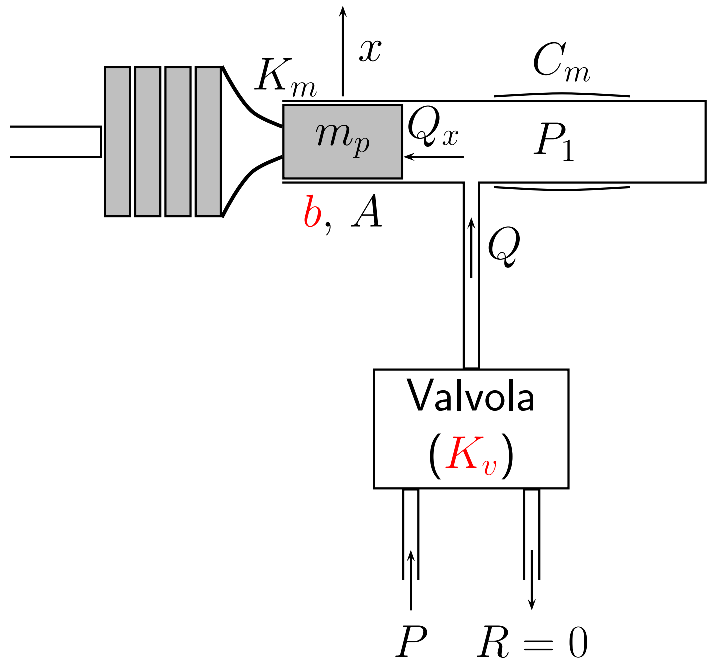
$$G_1(s) = \frac{K_e}{L\,J\,s^2 + K_e^2}, \qquad G_2(s) = \frac{-(R + L\,s)}{L\,J\,s^2 + K_e^2}$$

In assenza di attriti, la frequenza di risonanza ω_r del sistema é:

$$L\,J\,s^2 + K_e^2 = 0 \quad \rightarrow \quad s_{1,2} = \pm j\frac{K_e}{\sqrt{L\,J}} \quad \rightarrow \quad \omega_r = \frac{K_e}{\sqrt{L\,J}}$$

4) **Frizione idraulica.**

P	Pressione di alimentazione
Q	Portata volumetrica nella valvola
K_v	Costante di prop. della valvola
C_m	Capacità idraulica del cilindro
P_1	Pressione all'interno del cilindro
A	Sezione del pistone
x	Posizione del pistone
$\dot{x}$	Velocità del pistone
m_p	Massa del pistone
b	Attrito lineare del pistone
K_m	Rigidità della molla
F_m	Forza della molla sul pistone



- Funzione di trasferimento del sistema:

$$G(s) = \frac{F_m(s)}{P(s)} = \frac{A K_m K_v}{C_m m_p s^3 + (C_m\, b + K_v m_p) s^2 + (A^2 + C_m K_m + K_v\, b) s + K_m K_v}$$

In assenza di attriti, cioé quando $b = 0$ e $K_v = 0$, il denominatore della funzione $G(s)$ assume la seguente forma:

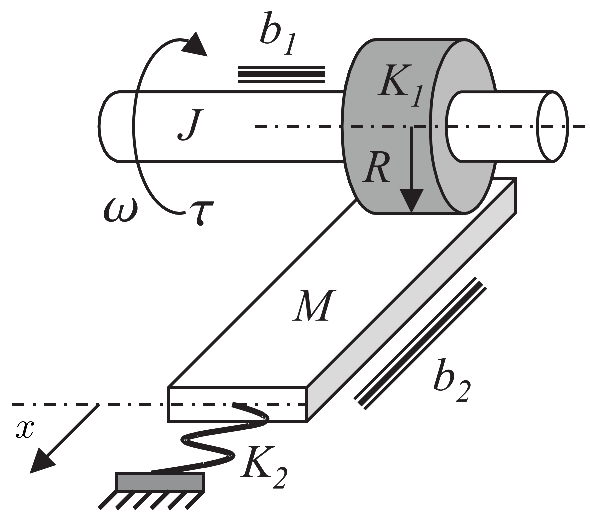
$$C_m m_p s^3 + (A^2 + C_m K_m) s = 0 \quad \rightarrow \quad [C_m m_p s^2 + (A^2 + C_m K_m)] s = 0$$

In assenza di attriti il sistema ha un polo nell'origine e due poli complessi coniugati sull'asse immaginario. La frequenza di risonanza ω_r del sistema é:

$$\omega_r = \sqrt{\frac{(A^2 + C_m K_m)}{C_m m_p}}$$

6) Sistema meccanico di trasmissione.

Il sistema meccanico é costituito da un albero di inerzia J, un coefficiente di attiro b_1, una velocità ω, una coppia esterna τ, un ingranaggio con raggio R e rigidità torsionale K_1, una massa M, un coefficiente di attiro b_2 e una molla lineare con rigidità K_2.



Funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema:

$$G(s) = \frac{F_2(s)}{\tau(s)} = \frac{K_1 K_2 R}{a_4\, s^4 + a_3\, s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

dove:

$$\begin{aligned} a_4 &= J\, M\, R^2 \\ a_3 &= (b_2 J + b_1 M) R^2 \\ a_2 &= J\, K_1 + b_1\, b_2\, R^2 + J\, K_2\, R^2 + K_1\, M\, R^2 \\ a_1 &= b_1\, K_1 + b_2\, K_1\, R^2 + b_1\, K_2\, R^2 \\ a_0 &= K_1\, K_2\, R^2 \end{aligned}$$

In assenza di attriti, cioé quando $b_1 = 0$ e $b_2 = 0$, la funzione $G(s)$ assume la seguente forma:

$$G(s) = \frac{F_2(s)}{\tau(s)} = \frac{K_1 K_2 R}{a_4\, s^4 + a_2 s^2 + a_0}$$

dove $a_4 = J\, M\, R^2$, $a_2 = J\, K_1 + J\, K_2\, R^2 + K_1\, M\, R^2$ e $a_0 = K_1\, K_2\, R^2$. In assenza di attriti il sistema ha due frequenze di risonanza:

$$\omega_{r1,2} = \sqrt{-p_{1,2}} = \sqrt{\frac{a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 4 a_4 a_0}}{2 a_4}}$$

dove $p_{1,2}$ sono le due soluzioni reali del polinomio $a_4\, p^2 + a_2 p + a_0 = 0$.