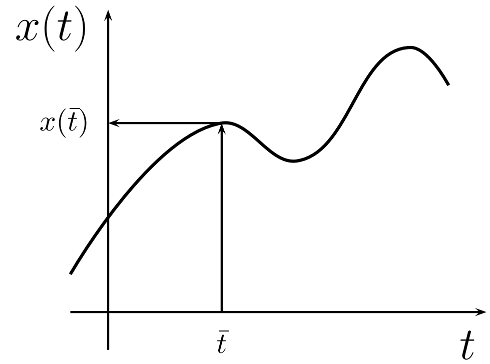
RICHIAMI MATEMATICI

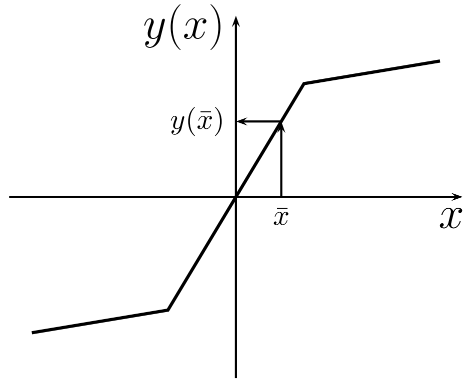
Funzioni reali del tempo:

$$x(t) : t \to x(t)$$



Funzioni reali dell'ingresso:

$$y(x) : x \to y(x)$$



Numeri complessi. Un numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali:

$$(x,\ y)$$

dove x è la parte reale ed yè la parte immaginaria. Vi sono molti modi equivalenti di rappresentare i numeri complessi:

1) Utilizzando il numero immaginario "j" si ha che:

$$(x,\ y) \equiv x + j\,y$$

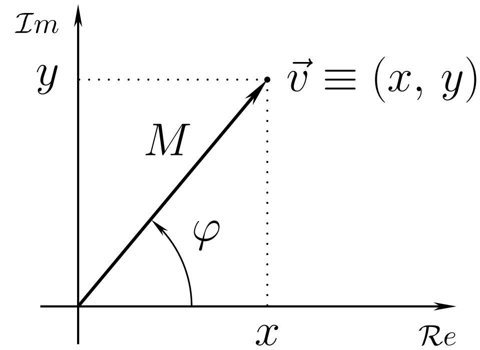
Il numero "j" indica qual è la parte immaginaria. Il numero soddisfa le seguenti relazioni:

$$j = \sqrt{-1}, \qquad j^2 = -1, \qquad j^3 = -j, \qquad j^4 = 1, \qquad j^5 = j.$$

2) I numeri complessi (x, y) possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti di un piano:

$$\vec{v} \equiv (x,\, y) \equiv x + j\, y$$

x indica la parte reale
y indica la parte immaginaria.



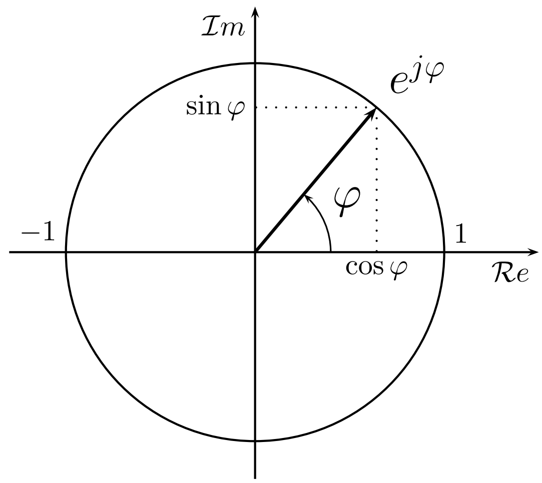
3) I punti del piano, a loro volta, possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i vettori $\vec{v}$ che collegano il punto (x, y) all'origine. Il vettore $\vec{v}$ può essere espresso in forma "cartesiana" o in forma "polare":

$$\vec{v} = x + j\, y = M \angle \varphi = M\, e^{j\varphi}$$

Con M si è indicato il modulo e con φ la fase del vettore $\vec{v}$.

Il numero complesso $e^{j\varphi}$ rappresenta un vettore a modulo unitario e fase φ. Vale la relazione:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\, \sin\varphi$$

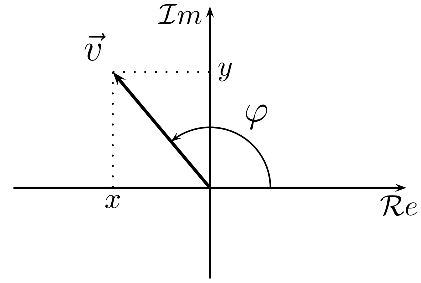


In qualsiasi momento è possibile passare da una rappresentazione "cartesiana" (x, y) ad una rappresentazione "polare" (e viceversa) del numero complesso utilizzando le seguenti relazioni:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} M & = & \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi & = & \arctan \dfrac{y}{x} \end{array} \right. \qquad \leftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x & = & M\cos\varphi \\ y & = & M\sin\varphi \end{array} \right.$$

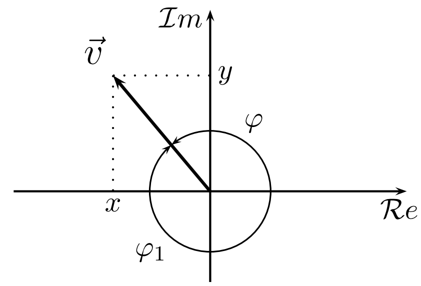
Attenzione: la funzione "$\arctan$" fornisce valori φ compresi nell'intervallo $-\frac{\pi}{2} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Quando x assume valori negativi occorre sommare a φ una fase costante $\varphi_0 = \pi$.

1) La fase φ di un vettore $\vec{v}$ del piano, e quindi la fase φ del corrispondente numero complesso $x + j\,y$, si misura in senso **antiorario** rispetto al **semiasse reale positivo**.



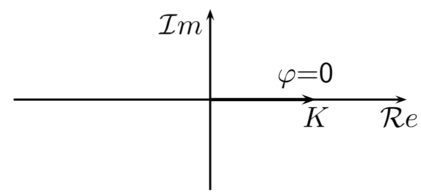
2) La fase φ di un vettore $\vec{v}$ del piano è definita a meno di un multiplo intero di 2π:

$$\arg[\vec{v}] = \varphi + 2k\pi, \qquad \forall k \in \mathcal{Z}$$



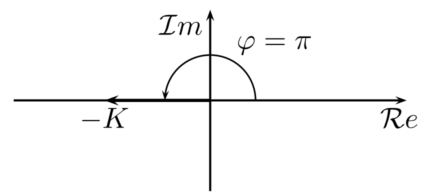
3) La fase dei numeri reali positivi $K > 0$ è nulla:

$$\varphi = \arg[K] = 0 + 2k\pi, \qquad \forall k \in \mathcal{Z}$$



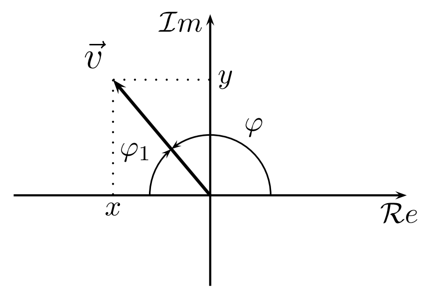
4) La fase dei numeri reali negativi $-K < 0$ è $\varphi = \pi$:

$$\varphi = \arg[-K] = \pi + 2k\pi, \qquad \forall k \in \mathcal{Z}$$



5) Per calcolare la fase φ di un vettore $\vec{v} = x + jy$ con parte reale negativa, $x < 0$, utilizzare la formula:

$$\varphi = \arg[\vec{v}] = \pi - \arctan\left[\frac{y}{|x|}\right]$$



6) Il modulo del prodotto di numeri complessi è uguale al **prodotto dei moduli**. Esempio:

$$\left|\frac{(1+3j)}{(2-5j)(-4+j)}\right| = \frac{|1+3j|}{|2-5j|\,|-4+j|} = \frac{\sqrt{1^2+3^2}}{\sqrt{2^2+5^2}\sqrt{4^2+1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{29}\sqrt{17}}$$

7) La fase del prodotto o del rapporto di numeri complessi è uguale, rispettivamente, alla **somma o alla differenza delle fasi** dei singoli elementi. Esempio:

$$\arg\left[\frac{(1+3j)}{(2-5j)(-4+j)}\right] = \arctan\frac{3}{1} - \left[\arctan\frac{-5}{2} + \pi - \arctan\frac{1}{4}\right]$$

Esempi

Scrivere il modulo $M(\omega) = |G(j\omega)|$ e la fase $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$ delle seguenti funzioni di risposta armonica $G(j\omega)$ con $\omega > 0$:

1) $$G(j\omega) = \frac{(j\omega - 2)(j3\omega + 4)}{j\omega(j\omega + 2)}\, e^{-j5\omega}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{16+9\omega^2}}{\omega} \\ \varphi(\omega) = \pi - \arctan\frac{\omega}{2} + \arctan\frac{3\omega}{4} - 5\,\omega - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega}{2} \\ \qquad\;\; = \frac{\pi}{2} - 2\arctan\frac{\omega}{2} + \arctan\frac{3\omega}{4} - 5\,\omega \end{cases}$$

2) $$G(j\omega) = \frac{(2 + 3j\omega)(2j\omega - 1)}{(j\omega)^2(j\omega + 5)^2}\, e^{-4j\omega t_0}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{4+9\omega^2}\,\sqrt{1+4\omega^2}}{\omega^2(25+\omega^2)} \\ \varphi(\omega) = \arctan\frac{3\omega}{2} + \pi - \arctan 2\omega - 4\omega t_0 - \pi - 2\arctan\frac{\omega}{5} \\ \qquad\;\; = \arctan\frac{3\omega}{2} - \arctan 2\omega - 4\omega t_0 - 2\arctan\frac{\omega}{5} \end{cases}$$

3) $$G(j\omega) = \frac{(j\omega + 3)(j\omega - 3)}{j\omega(2 - 5j\omega)}\, e^{-j3\omega t_0}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{\omega^2+9}{\omega\sqrt{4+25\omega^2}} \\ \varphi(\omega) = \arctan\frac{\omega}{3} + \pi - \arctan\frac{\omega}{3} - 3\omega t_0 - \frac{\pi}{2} + \arctan\frac{5\omega}{2} \\ \qquad\;\; = \frac{\pi}{2} - 3\omega t_0 + \arctan\frac{5\omega}{2} \end{cases}$$

4) $$G(j\omega) = \frac{(1 - 5j\omega)^2}{(j\omega)^2(j\omega + 3)}\, e^{-2j\omega t_0}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{1+25\omega^2}{\omega^2\sqrt{\omega^2+9}} \\ \varphi(\omega) = -2\arctan 5\,\omega - 2\omega t_0 - \pi - \arctan\frac{\omega}{3} \end{cases}$$

5) $$G(j\omega) = \frac{(3 - j\omega)}{j\omega(1 + 5j\omega)^2}\, e^{-2j\omega t_0}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2+9}}{\omega(1+25\omega^2)} \\ \varphi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{3} - 2\omega t_0 - \frac{\pi}{2} - 2\,\arctan 5\,\omega \end{cases}$$

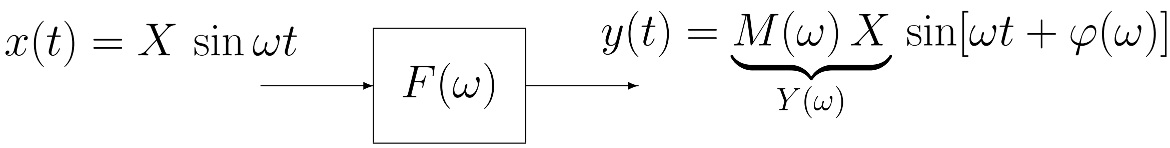
Funzioni complesse di variabile reale. Si consideri, per esempio, la seguente funzione $F(\omega)$:

$$F(\omega) = \frac{100}{(4 + j\,\omega)(13 - \omega^2 + j\,4\omega)} = M(\omega)\,e^{j\varphi(\omega)}$$

La funzione $F(\omega)$ associa ad ogni valore reale di ω un numero complesso $F(\omega)$ avente modulo $M(\omega) = |F(\omega)|$ e fase $\varphi(\omega) = \arg[F(\omega)]$.

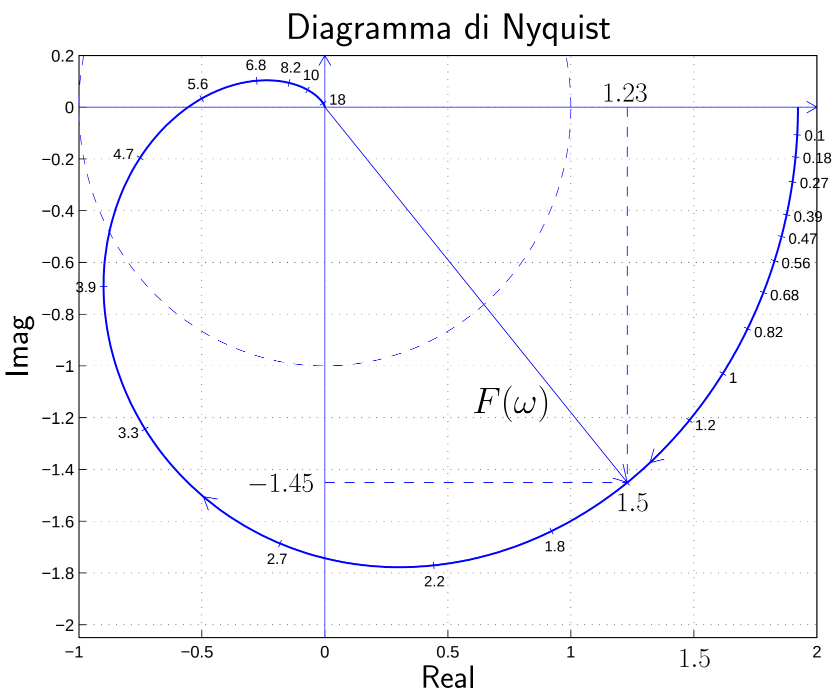
$$F(\omega)\ :\ \ \omega \rightarrow F(\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

La funzione $F(\omega)$ può rappresentare, per esempio, la funzione di risposta armonica di un sistema lineare:



In questo caso il modulo $M(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X}$ ha il significato di "guadagno" del sistema alla pulsazione ω, mentre $\varphi(\omega)$ rappresenta lo sfasamento della sinusoide di uscita $y(t) = Y(\omega)\,\sin[\omega t + \varphi(\omega)]$ rispetto a quella di ingresso $x(t) = X\,\sin\omega t$.

Funzioni $F(\omega)$ di questo tipo possono essere rappresentate, al variare del parametro ω, come curve sul piano complesso:



In corrispondenza della pulsazione $\omega = 1.5$ si ha:

$$F(\omega)|_{\omega=1.5} = 1.23 - 1.45\,j = \sqrt{1.23^2 + 1.45^2}\;e^{-j\arctan\frac{1.45}{1.23}} = M\,e^{-j\varphi}$$

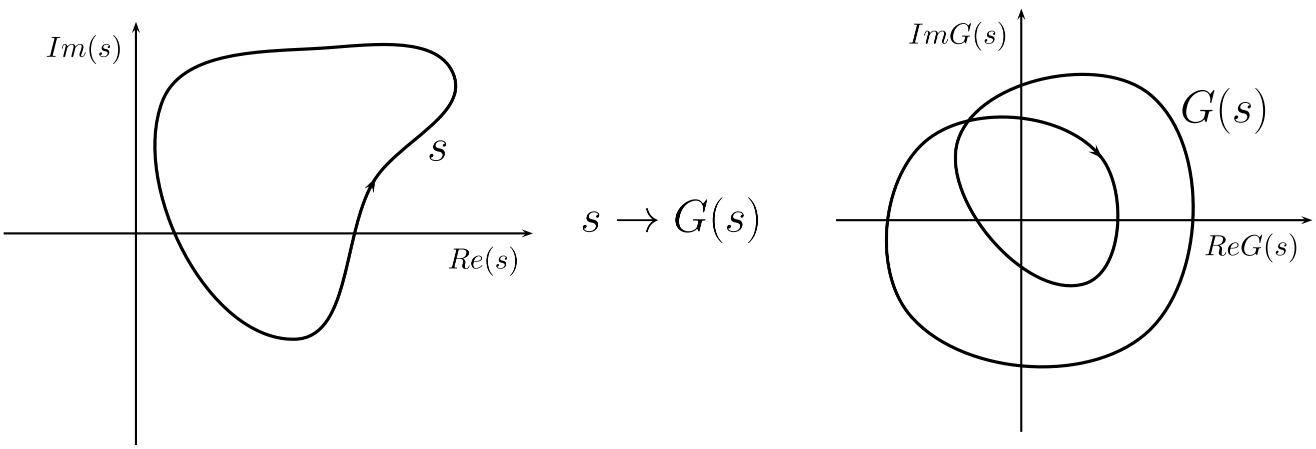
Funzioni complesse di variabile complessa. Ad esempio la trasformata di Laplace $G(s)$ di un segnale continuo $g(t)$:

$$g(t) \qquad \leftrightarrow \qquad G(s) = \int_0^\infty g(t)e^{-s\,t}\,dt$$

Per ogni valore della variabile complessa s, la funzione $G(s)$ fornisce un numero complesso $G(s)$:

$$G(s): \; s \to G(s) \qquad\qquad s \in \mathbb{C},\; G(s) \in \mathbb{C}$$

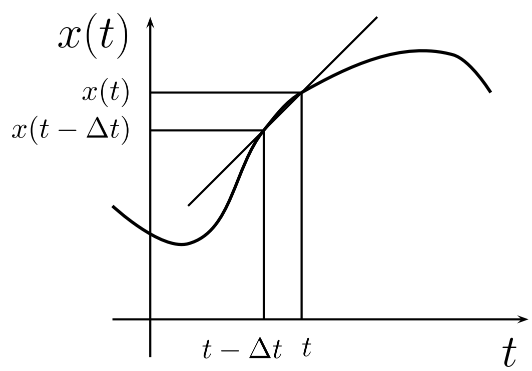
Ad ogni curva chiusa del piano complesso è associata una curva chiusa nel piano complesso:



Una funzione di questo tipo è in grado di descrivere una "trasformazione" del piano complesso.

Derivata di una funzione. Data la funzione $x(t)$, con $\dot{x}(t)$ si indica la derivata di $x(t)$ rispetto al parametro t, definita come segue:

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$$



La derivata $\dot{x}(t)$ descrive la "pendenza" funzione $x(t)$ nell'intorno del punto t.

Equazioni differenziali

Equazioni differenziali: sono dei legami algebrici tra una o più funzioni, per esempio $x(t)$, $y(t)$, ecc., e le loro derivate $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$, $\ddot{x}(t)$, $\ddot{y}(t)$, ecc.

Le equazioni differenziali possono essere:

1) non lineari:

$$f(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ldots) = 0$$

2) lineari tempo varianti (i coefficienti $a_i(t)$ e $b_i(t)$ variano nel tempo):

$$b_2(t)\ddot{y}(t) + b_1(t)\dot{y}(t) + b_0(t)y(t) = a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t)$$

3) lineari tempo-invarianti (i coefficienti a_i e b_i sono costanti):

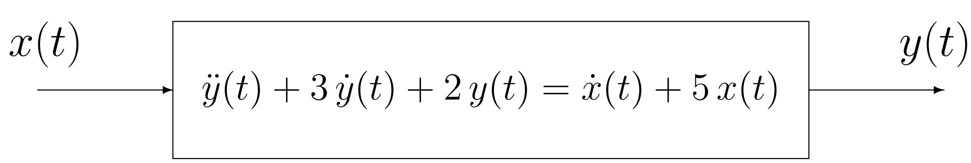
$$b_2\ddot{y}(t) + b_1\dot{y}(t) + b_0y(t) = a_1\dot{x}(t) + a_0x(t)$$

Nel seguito si farà riferimento solamente ad equazioni differenziali lineari tempo-invarianti. Esempio:

$$\ddot{y}(t) + 3\,\dot{y}(t) + 2\,y(t) = \dot{x}(t) + 5\,x(t)$$

Vengono utilizzate per descrivere il comportamento dinamico di un sistema fisico. Conoscere l'equazione differenziale che descrive un sistema dinamico vuol dire conoscere completamente il sistema stesso.

Utilizzando l'equazione differenziale è possibile prevedere (cioè calcolare) quale sarà l'andamento futuro dell'uscita $y(t)$ del sistema, noto che sia l'andamento dell'ingresso $x(t)$.



Noto $x(t)$, l'incognita dell'equazione differenziale è la funzione $y(t)$. Eseguire questo calcolo vuol dire "risolvere" l'equazione differenziale del sistema per quel particolare andamento della funzione di ingresso $x(t)$.

Dall'equazione differenziale è possibile ricavare anche la descrizione "statica" del sistema, basta mettere a zero tutte le derivate ($\dot{y}(t) = 0$, $\ddot{y}(t) = 0, \ldots,\ \dot{x}(t) = 0, \ddot{x}(t) = 0, \ldots$):

$$2\,y(t) = 5\,x(t) \qquad \rightarrow \qquad y(t) = \frac{5}{2}\,x(t)$$

È possibile anche tenere conto, eventualmente, delle condizioni iniziali del sistema (cioè dell'energia accumulata nel sistema all'istante iniziale).

Nei problemi di controllo, le condizioni iniziali vengono spesso trascurate in quanto, per sistemi controllati stabili, la loro influenza tende ad annullarsi per $t \rightarrow \infty$.

Le equazioni differenziali si possono risolvere in vari modi. Il modo più efficiente, dal punto di vista dei controlli, è quello di utilizzare le **Trasformate di Laplace**.

Questo metodo si basa sull'utilizzo di funzioni complesse $X(s)$ ed $Y(s)$ della variabile complessa s messe in corrispondenza *biunivoca* con i corrispondenti segnali temporali $x(t)$ e $y(t)$:

$$x(t) \qquad \leftrightarrow \qquad X(s) = \int_0^\infty x(t)e^{-s\,t}\,dt$$

$$y(t) \qquad \leftrightarrow \qquad Y(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-s\,t}\,dt$$

Il vantaggio che si ha nell'utilizzo delle trasformate di Laplace è che l'equazione differenziale di partenza si trasforma in una semplice equazione algebrica facilmente risolubile.

Una proprietà importante della trasformata di Laplace è la seguente:

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) \qquad \rightarrow \qquad \mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0^-)$$

Nel caso in cui le condizioni iniziali siano nulle, $x(0^-) = 0$, si ha:

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = s\,X(s)$$

cioè in ambito trasformato per derivare un segnale basta moltiplicare per "s" la sua trasformata di Laplace.

Esempio. Applicando la trasformata di Laplace alla seguente equazione differenziale (se le condizioni iniziali sono nulle)

$$\ddot{y}(t) + 3\,\dot{y}(t) + 2\,y(t) = \dot{x}(t) + 5\,x(t)$$

si ottiene la seguente relazione algebrica

$$s^2 Y(s) + 3\,s\,Y(s) + 2\,Y(s) = s\,X(s) + 5\,X(s)$$
$$(s^2 + 3\,s + 2)Y(s) = (s+5)X(s)$$

dalla quale si ricava il seguente legame tra la funzione di ingresso $X(s)$ e la funzione di uscita $Y(s)$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(s+5)}{s^2 + 3\,s + 2}}_{G(s)} X(s) = G(s)\,X(s)$$

La funzione $G(s)$ prende il nome di **funzione di trasferimento** del sistema. Essa caratterizza completamente il sistema in esame e si ricava direttamente e in modo biunivoco dalla corrispondente equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + 3\,\dot{y}(t) + 2\,y(t) = \dot{x}(t) + 5\,x(t) \qquad \leftrightarrow \qquad G(s) = \frac{(s+5)}{s^2 + 3\,s + 2}$$

La relazione $Y(s) = G(s)X(s)$ indica che la risoluzione di equazioni differenziali in ambito trasformato è molto semplice: la trasformata del segnale di uscita si ricava semplicemente moltiplicando la funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema per la trasformata di Laplace $X(s)$ del segnale di ingresso:

$$Y(s) = G(s)X(s) \qquad \rightarrow \qquad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)X(s)]$$

Per ricavare $y(t)$ sarà sufficiente antitrasformare la funzione $Y(s)$.