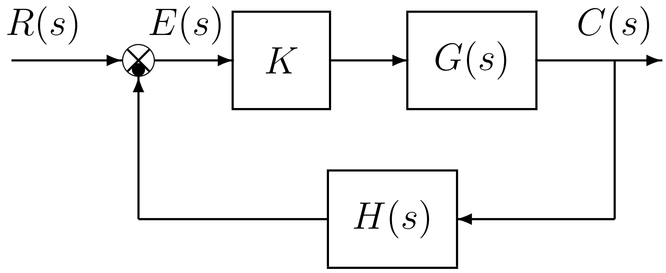
Luogo delle radici

- Si consideri il seguente schema in retroazione:



- La funzione di trasferimento $G_0(s)$ del sistema retroazionato è:

$$G_0(s) = \frac{K\,G(s)}{1 + K\,G(s)\,H(s)}$$

I poli del sistema retroazionato coincidono le radici dell'equazione caratteristica del sistema in retroazione:

$$1 + K\,G(s)\,H(s) = 0$$

- Per poter applicare il metodo del Luogo delle radici la funzione razionale fratta $G(s)\,H(s)$ deve essere posta nella forma fattorizzata *poli-zeri*:

$$F(s) = K\,G(s)\,H(s) = K_1 \frac{(s - z_1)\,(s - z_2)\;\ldots\;(s - z_m)}{(s - p_1)\,(s - p_2)\;\ldots\;(s - p_n)}\,, \quad n \geq m$$

- Il coefficiente K_1 é sempre proporzionale al coefficiente K:

$$K_1 = \alpha\,K$$

La costante α puó avere, a seconda dei casi, anche segno negativo.

- Al variare del parametro K_1 da 0 a ∞, le radici dell'equazione caratteristica (e quindi i poli del sistema retroazionato) descrivono una curva nel piano s, cui si dà il nome di *luogo delle radici*.

- Il luogo delle radici risulta di grande utilità per giudicare l'effetto di variazioni della costante di guadagno sulla stabilità e sulla risposta del sistema in retroazione.

- Il metodo puó essere modificato facilmente per ottenere anche le variazioni delle radici dell'equazione caratteristica in funzione di parametri diversi dalla costante di guadagno, come ad esempio la posizione di poli o zeri del sistema ad anello aperto: in casi di questo tipo il metodo viene indicato con il nome di *contorno delle radici*.

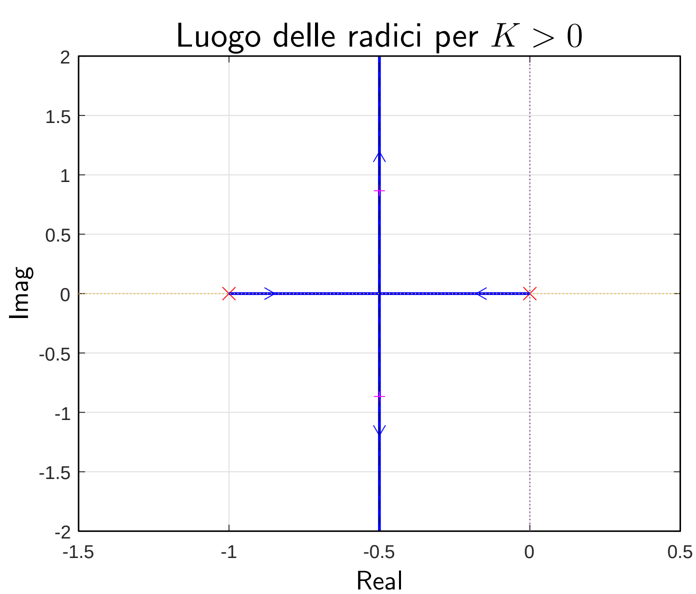
- Posto
$$G_1(s) := \frac{(s-z_1)\,(s-z_2)\,\ldots\,(s-z_m)}{(s-p_1)\,(s-p_2)\,\ldots\,(s-p_n)}$$
l'equazione caratteristica del sistema può essere riscritta come segue:
$$1 + K_1\, G_1(s) = 0$$

- Se la costante K_1 è positiva, si ha che:
$$|G_1(s)| = \frac{1}{K_1}\,, \qquad \arg G_1(s) = (2\,\nu + 1)\,\pi \qquad (\nu \text{ intero})$$

- Se K_1 è negativa, si ha che:
$$|G_1(s)| = -\frac{1}{K_1}\,, \qquad \arg G_1(s) = 2\,\nu\,\pi \qquad (\nu \text{ intero})$$

- La relazione relativa agli argomenti è sufficiente per la costruzione del luogo, mentre la relazione relativa ai moduli serve per la graduazione del luogo delle radici in funzione di K_1.
$$K_1 = \frac{-1}{G_1(s)}.$$

- Esempio. Dato il sistema
$$G(s)\,H(s) = \frac{K_1}{s(s+1)}$$
al variare di K_1 da 0 a ∞ si ottiene l'andamento riportato a fianco.



Proprietà del luogo delle radici

Il luogo delle radici presenta alcune proprietà che ne vincolano l'andamento e ne agevolano la costruzione.

- **Proprietà 1.** Il luogo delle radici ha tanti rami quanti sono i poli della funzione di trasferimento ad anello aperto $K_1\, G_1(s)$, che si intersecano sulle radici multiple. Ogni ramo parte da un polo di $G_1(s)$ e termina in uno zero di $G_1(s)$ o in un punto all'infinito.

- **Proprietà 2.** Il luogo delle radici è simmetrico rispetto all'asse reale.

- **Proprietà 3.** Se la costante K_1 è positiva, un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale dispari di zeri e poli. Se la costante K_1 è negativa, un punto dell'asse reale fa parte del luogo delle radici se si lascia alla sua destra un numero totale pari di zeri e poli.

- **Proprietà 4.** Se la costante K_1 è positiva, l'angolo secondo il quale il luogo delle radici lascia un polo p_i è

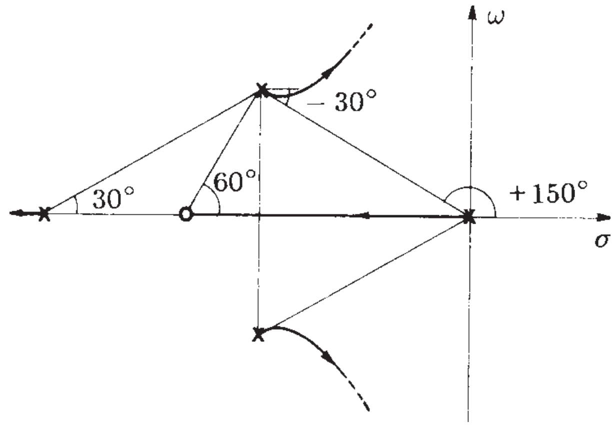
$$(2\,\nu+1)\,\pi+\sum_{j=1}^{m}\arg\left(p_i-z_j\right)-\sum_{j\in\mathcal{J}'}\arg\left(p_i-p_j\right)\;,$$

in cui è $\mathcal{J}':=\{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n\}$. L'angolo secondo il quale il luogo tende a uno zero z_i è

$$(2\,\nu+1)\,\pi-\sum_{j\in\mathcal{J}''}\arg\left(z_i-z_j\right)+\sum_{j=1}^{n}\arg\left(z_i-p_j\right)\;,$$

in cui è $\mathcal{J}'':=\{1,2,\ldots,i-1,i+1,\ldots,m\}$. Se la costante K_1 è negativa, nell'enunciato si sostituisce $2\nu\pi$ a $(2\nu+1)\,\pi$.

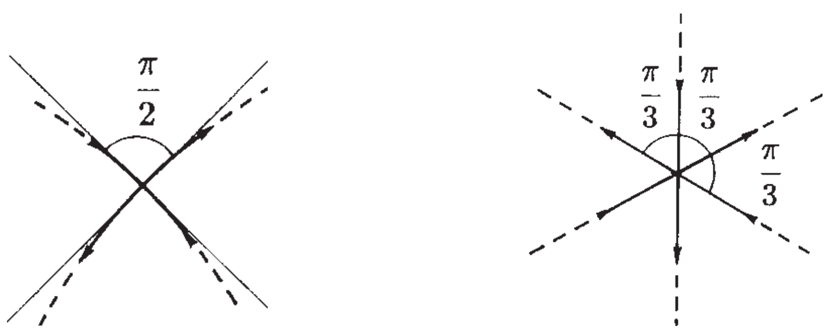
- Esempio:



- **Proprietà 5.** Una radice multipla di ordine h corrisponde a un punto comune ad h rami del luogo delle radici, in cui, oltre alla $1+K_1G_1(s) = 0$, sono soddisfatte le relazioni che esprimono l'annullarsi delle derivate della funzione di guadagno di anello fino alla $(h-1)$-esima.

$$\frac{d}{ds}G_1(s) = 0, \quad \ldots \quad , \frac{d^{h-1}}{ds^{h-1}}G_1(s) = 0$$

I due rami che convergono in un punto corrispondente ad una radice doppia, vi convergono da direzioni opposte; nel punto si originano altri due rami, che ne divergono secondo direzioni opposte, disposte a $90°$ rispetto alle direzioni di arrivo dei primi.



- **Proprietà 6.** In corrispondenza di una radice di ordine h il luogo presenta h rami entranti e h rami uscenti, alternati fra di loro, le cui tangenti dividono lo spazio circostante in settori uguali, di π/h radianti.

- **Proprietà 7.** Il numero degli asintoti del luogo delle radici è pari al grado relativo: $r = n - m$. Gli asintoti formano una stella di raggi con centro nel punto dell'asse reale di ascissa:

$$\sigma_a = \frac{1}{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i - \sum_{i=1}^{m} z_i\right)$$

Se la costante K_1 è positiva, gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

$$\vartheta_{a,\nu} = \frac{(2\,\nu+1)\,\pi}{n-m} \qquad\qquad (\nu = 0,\, 1,\, \ldots\, ,\, n{-}m{-}1)$$

Se la costante K_1 è negativa, gli asintoti formano con l'asse reale gli angoli

$$\vartheta_{a,\nu} = \frac{2\,\nu\,\pi}{n-m} \qquad\qquad (\nu = 0,\, 1,\, \ldots\, ,\, n{-}m{-}1)$$

- La proprietà 7 comporta un'interessante conseguenza: gli asintoti di un sistema in retroazione negativa avente funzione di trasferimento di anello stabile, a fase minima (cioè con tutti i poli e gli zeri nel semipiano sinistro del piano complesso) e con grado relativo $r = n - m \geq 3$ intersecano l'asse immaginario in punti diversi dall'origine, il che spiega il fatto che i poli dominanti, cioè quelli che per primi, all'aumentare del guadagno, tendono a passare nel semipiano destro, sono di regola complessi coniugati.

- Per il tracciamento del luogo delle radici, specie per ciò che riguarda i rami corrispondenti ai poli dominanti, è utile la conoscenza dei punti di intersezione del luogo con l'asse immaginario e dei relativi valori del parametro K_1. Poiché tali punti corrispondono al limite di stabilità del sistema in retroazione, per la loro determinazione si può impiegare il criterio di Routh, che fornisce il valore K^* corrispondente al limite di stabilità. Inoltre, risolvendo l'equazione ausiliaria si ricava anche il valore della pulsazione ω^* in corrispondenza della quale avviene l'intersezione con l'asse immaginario.

Esempio. Si consideri la funzione di trasferimento di anello

$$K\,G(s)\,H(s) = K_1\,G_1(s) = \frac{K_1}{s\,(s+1)\,(s+2)}\ .$$

Essendo $n-m=3$, il luogo delle radici presenta tre asintoti che si incontrano nel punto:

$$\sigma_a = \frac{0-1-2}{3} = -1$$

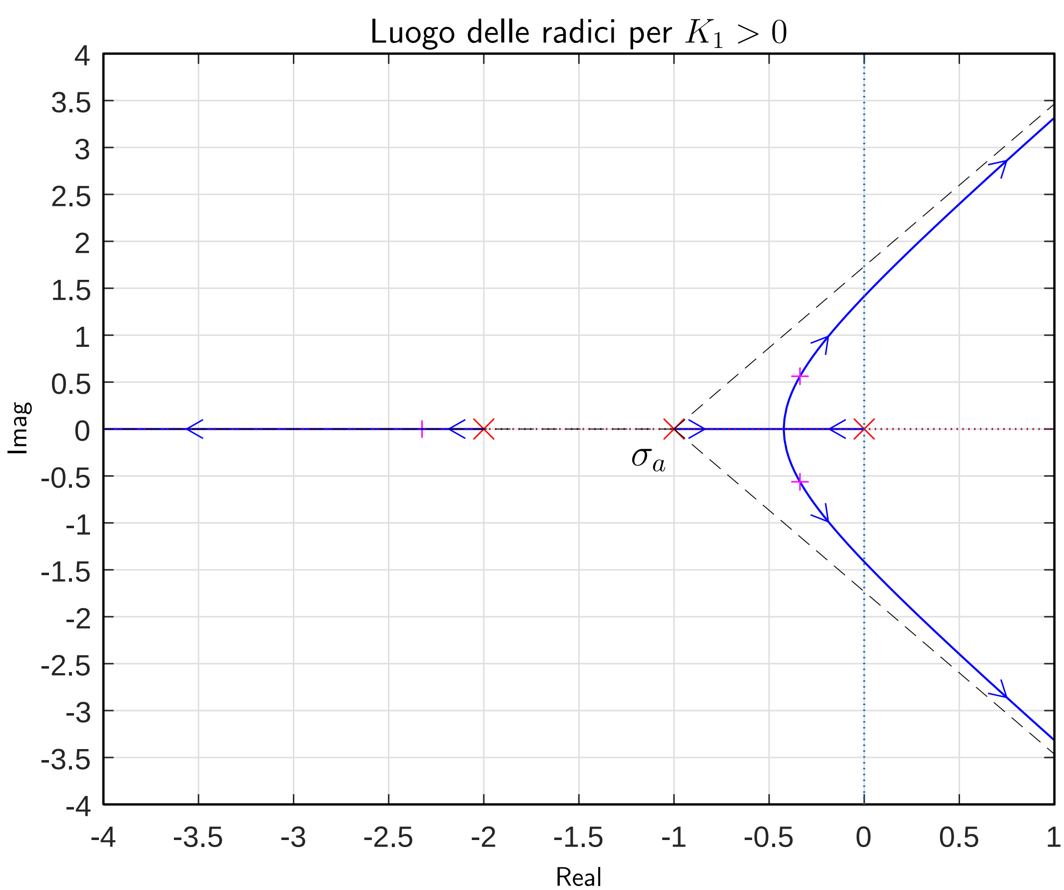
Nella graficazione degli asintoti si tenga sempre presente che:

- gli asintoti sono delle *semirette* che escono dal centro degli asintoti σ_a;
- gli asintoti sono *simmetrici* rispetto all'asse reale;
- gli asintoti *dividono il piano in parti uguali*;

Dalle precedenti affermazioni segue necessariamente che:

- esistono sempre solo "due" modi diversi di disporre gli asintoti;
- tra i due modi possibili quello corretto é quello che rispetta la Proprietá 3.
- se il numero di asintoti é dispari, uno degli asintoti appartiene all'asse reale;

Nel caso in esame l'andamento del luogo delle radici è il seguente:



Nota: all'aumentare di K_1 il sistema retroazionato diventa instabile.

Il punto di diramazione sull'asse reale si ottiene risolvendo l'equazione ottenuta derivando l'equazione caratteristica.

$$\frac{d}{ds}[1 + K\,G(s)\,H(s)] = 0 \qquad \rightarrow \qquad 3\,s^2 + 6\,s + 2 = 0\ .$$

Essa ammette due radici reali, $s_1 = -1.58$ e $s_2 = -0.422$. La radice $s_1 = -1.58$ non appartiene al luogo. L'altra, $\sigma_0 = s_2 = -0.422$, corrisponde al punto di diramazione cercato.
Il valore K_0 in corrispondenza del quale due radici del luogo si incontrano nel punto di diramazione σ_0 si determina utilizzando la seguente formula:

$$K_0 = -\left.\frac{1}{G_1(s)}\right|_{s=\sigma_0} = -\left.s\,(s+1)\,(s+2)\right|_{s=-0.422} = 0.3849.$$

Le intersezioni con l'asse immaginario si determinano utilizzando il criterio di Routh. L'equazione caratteristica:

$$1 + K_1\,G_1(s) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad s\,(s+1)\,(s+2) + K_1 = 0$$

viene riscritta in forma polinomiale:

$$s^3 + 3\,s^2 + 2\,s + K_1 = 0.$$

La corrispondente tabella di Routh è la seguente:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & K_1 \\ 1 & (6-K_1)/3 & 0 \\ 0 & K_1 & \end{array}$$

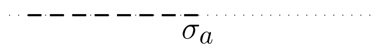
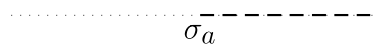
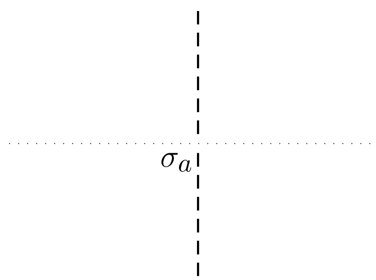
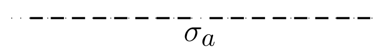
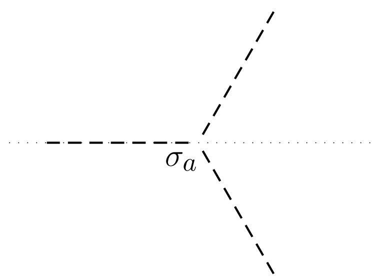
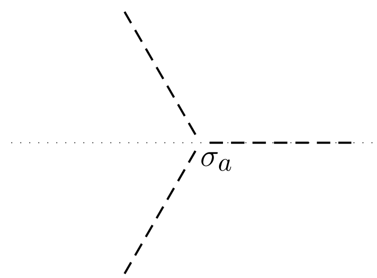
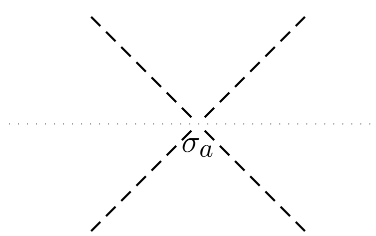
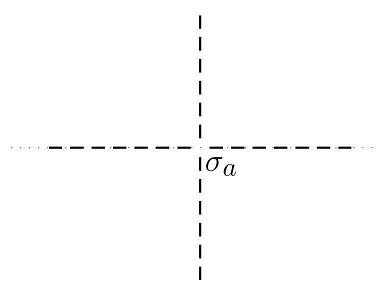
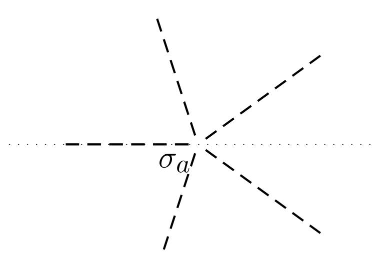
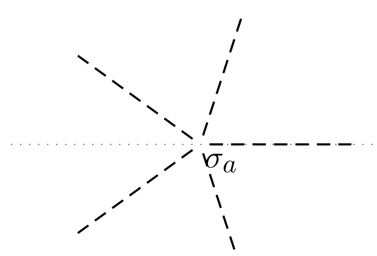
Il sistema retroazionato é stabile per $0 < K_1 < K^* = 6$. Il valore limite di stabilità si ha per $K_1 = K^* = 6$. Sostituendo nella tabella tale valore, si ottiene la seguente equazione ausiliaria:

$$3\,s^2 + 6 = 0$$

che ammette le radici $s_{1,2} = \pm j\sqrt{2} = \pm j\,1.41\ = \pm j\,\omega^*$. Queste corrispondono alle intersezioni del luogo delle radici con l'asse immaginario.

Luogo delle radici: disposizioni degli asintoti

La disposizione degli asintoti dipende essenzialmente dal grado relativo r.

r	$R^+ \notin LdR$	$R^+ \in LdR$
1		
2		
3		
4		
5		

R^+ = semiasse reale positivo; LdR = Luogo delle radici

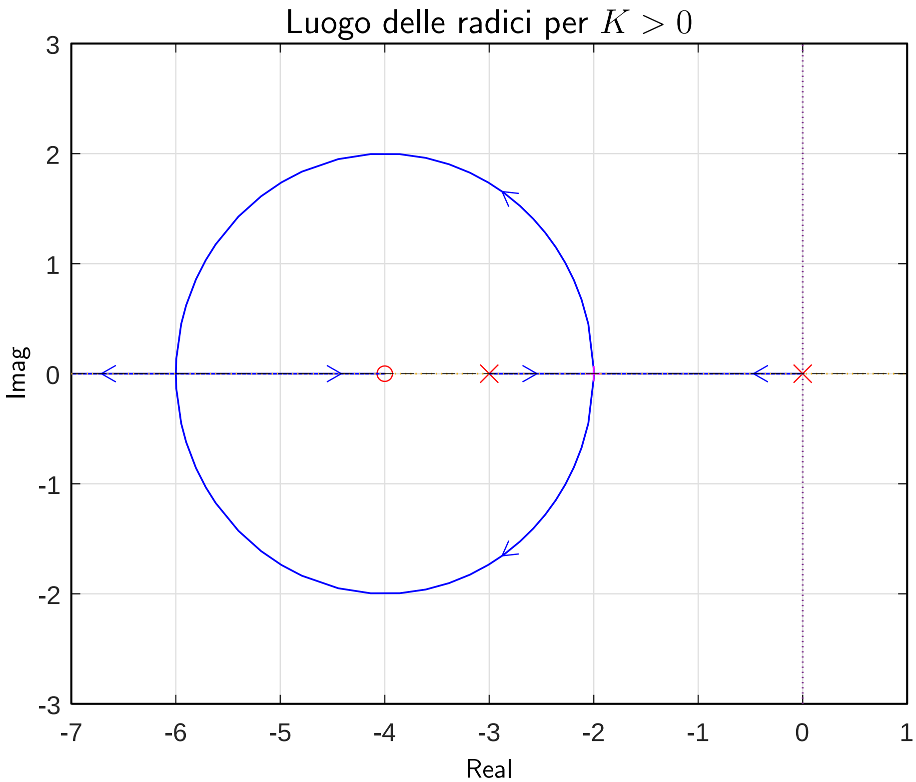
Esempio. Disegnare qualitativamente il luogo delle radici del seguente sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$.

$$K\,G_1(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+3)}$$

L'equazione caratteristica del sistema retroazionato è

$$1 + \frac{K(s+4)}{s(s+3)} = 0$$

Il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$ è il seguente:



I punti di diramazione sull'asse reale si determinano come segue:

$$\frac{d}{d\,s}\left[\frac{K(s+4)}{s(s+3)}\right] = 0 \quad \rightarrow \quad s(s+3) - (s+4)(2s+3) = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 + 8s + 12 = 0$$

I punti di diramazione sono posizionati in $\sigma_1 = -2$ e in $\sigma_2 = -6$. I corrispondenti valori di K si ricavano nel modo seguente:

$$K_1 = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=\sigma_1} = 1, \qquad\qquad K_2 = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=\sigma_2} = 9$$

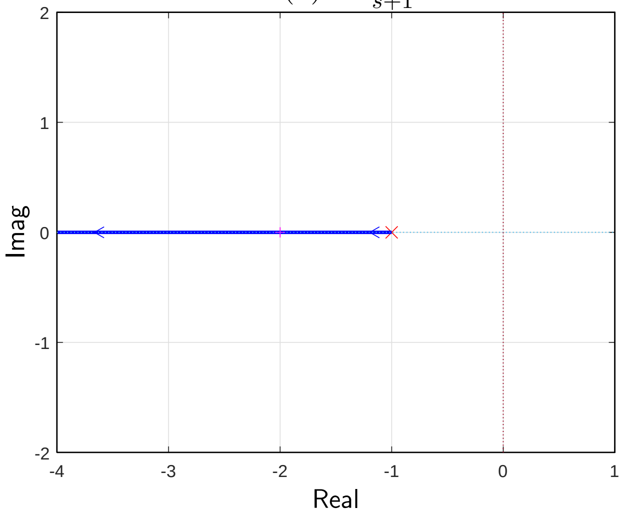
Nota. I due rami del luogo delle radici di un sistema avente solo due poli e uno zero, se escono dall'asse reale si spostano sempre lungo un tratto di circonferenza che ha centro nello zero e raggio $R = \sqrt{d_1 d_2}$, dove d_1 e d_2 sono la distanza dello zero dai 2 poli. Nel caso in esame si ha:

$$R = \sqrt{(4-1)(4-3)} = 2.$$

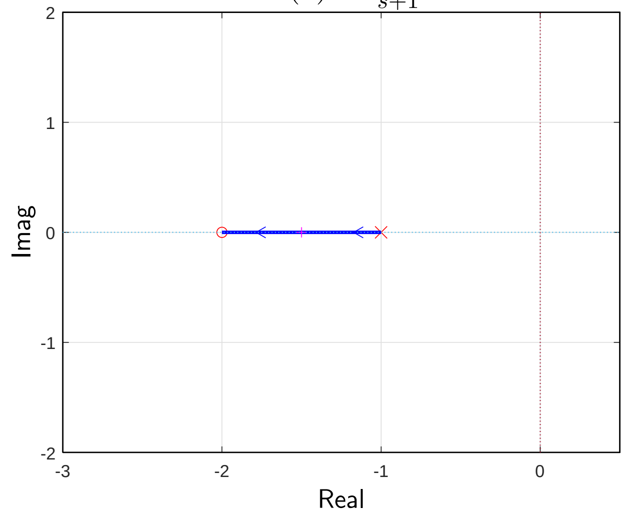
Alcuni esempi di luoghi delle radici

- Luogo delle radici di sistemi del primo ordine:

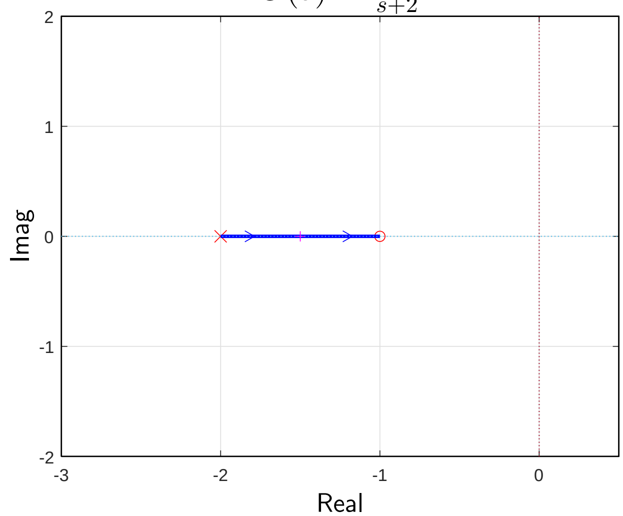
$G(s) = \frac{1}{s+1}$



$G(s) = \frac{s+2}{s+1}$

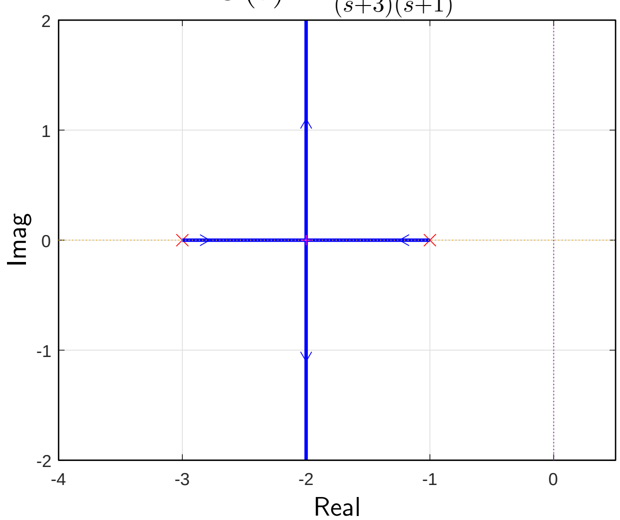


$G(s) = \frac{s+1}{s+2}$

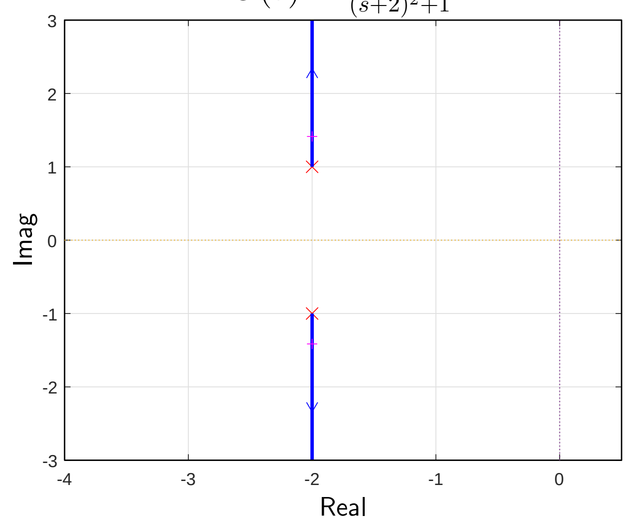


- Luogo delle radici di sistemi del secondo ordine:

$G(s) = \frac{1}{(s+3)(s+1)}$

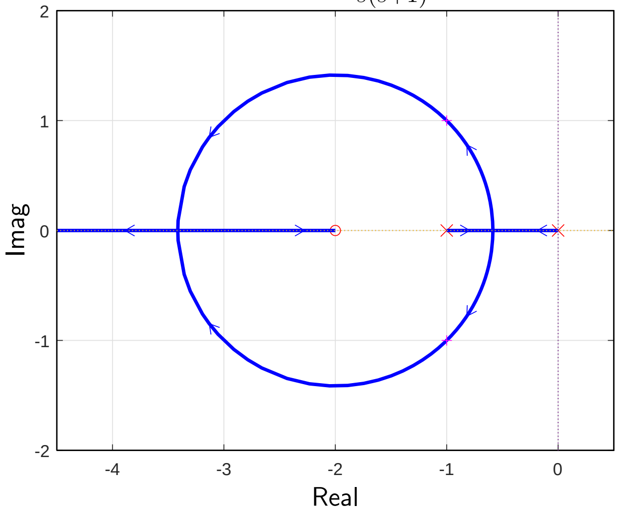


$G(s) = \frac{1}{(s+2)^2+1}$

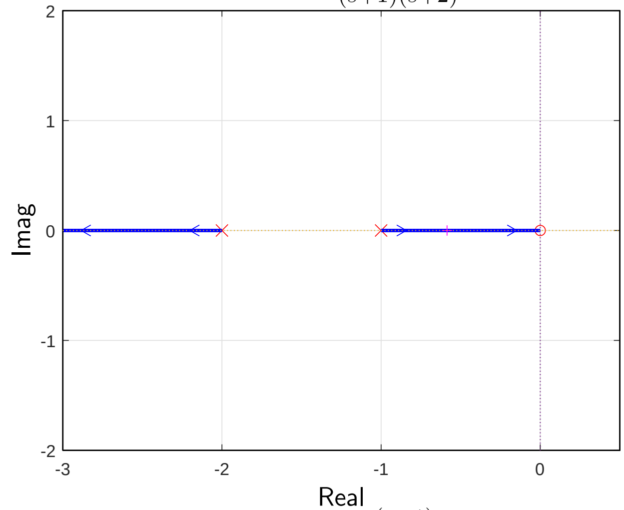


- Luogo delle radici di sistemi del secondo ordine:

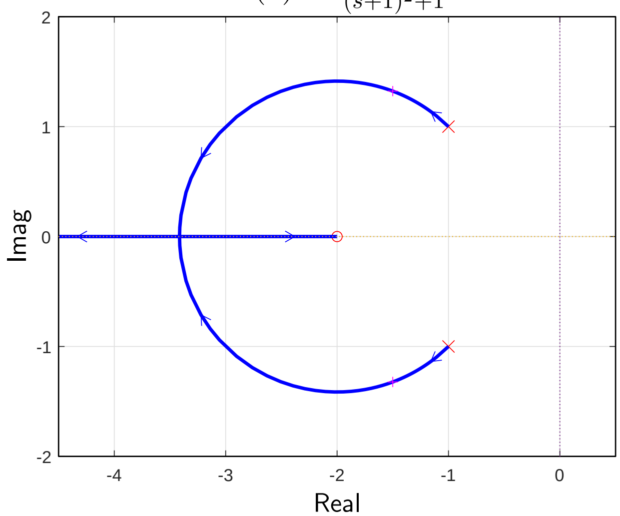
$G(s) = \frac{s+2}{s(s+1)}$



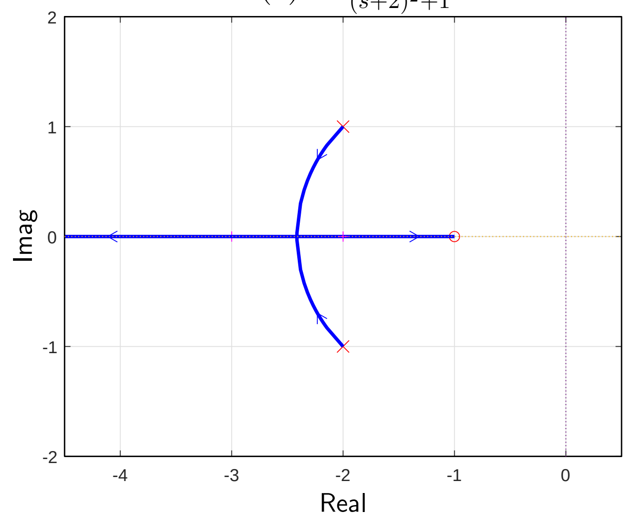
$G(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)}$



$G(s) = \frac{s+2}{(s+1)^2+1}$

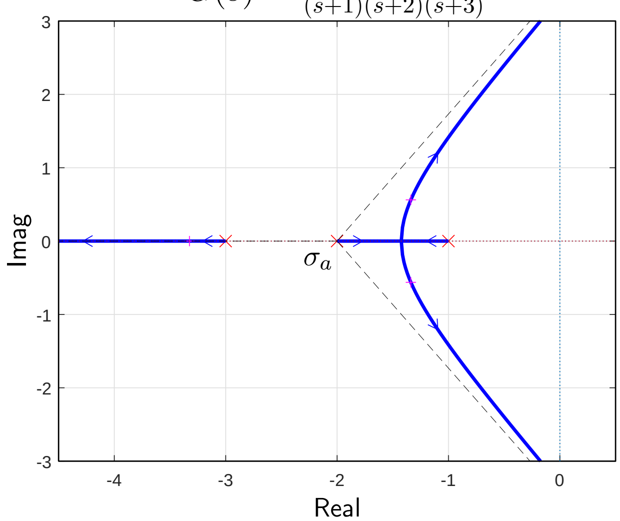


$G(s) = \frac{(s+1)}{(s+2)^2+1}$

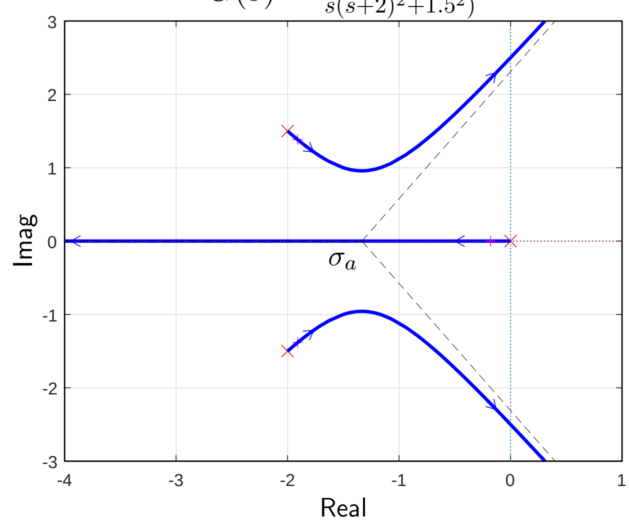


- Luogo delle radici di sistemi del terzo ordine:

$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$

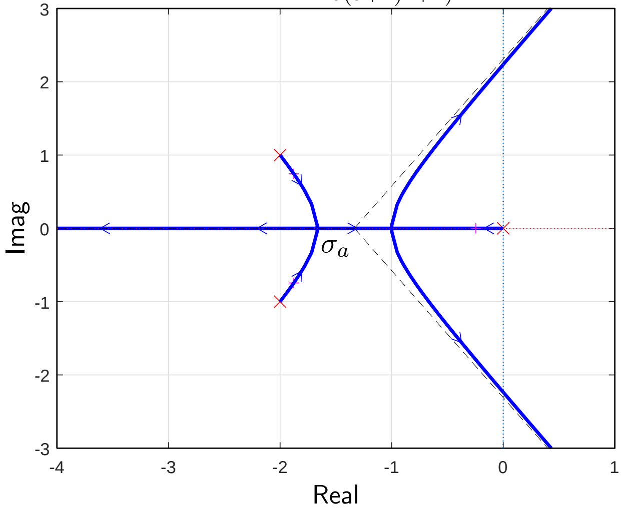


$G(s) = \frac{1}{s(s+2)^2+1.5^2)}$

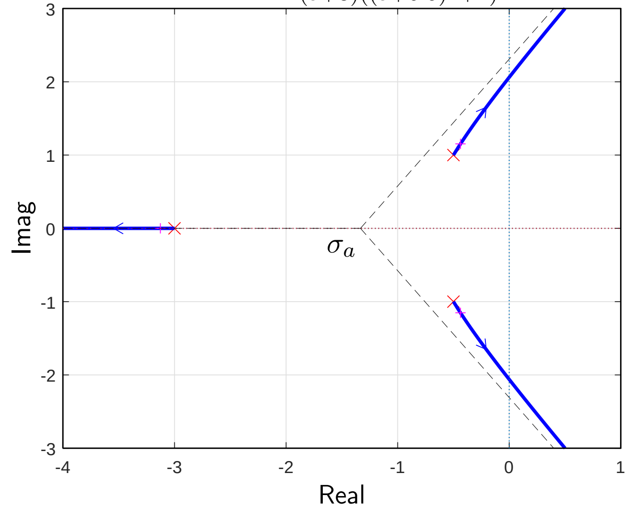


- Luogo delle radici di sistemi del terzo ordine:

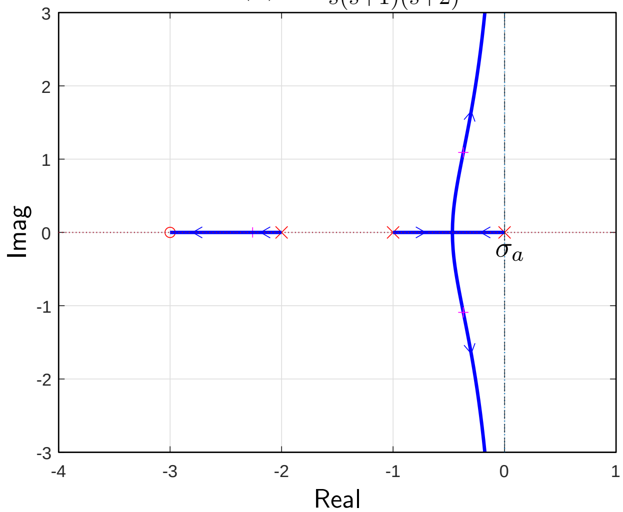
$$G(s) = \frac{1}{s((s+2)^2+1)}$$



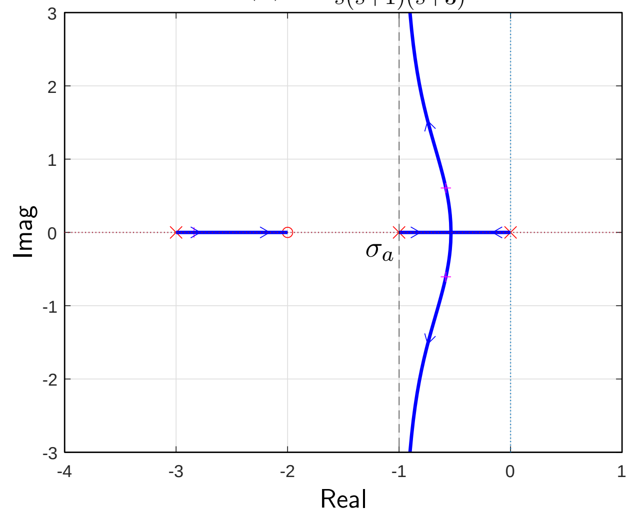
$$G(s) = \frac{1}{(s+3)((s+0.5)^2+1)}$$



$$G(s) = \frac{s+3}{s(s+1)(s+2)}$$

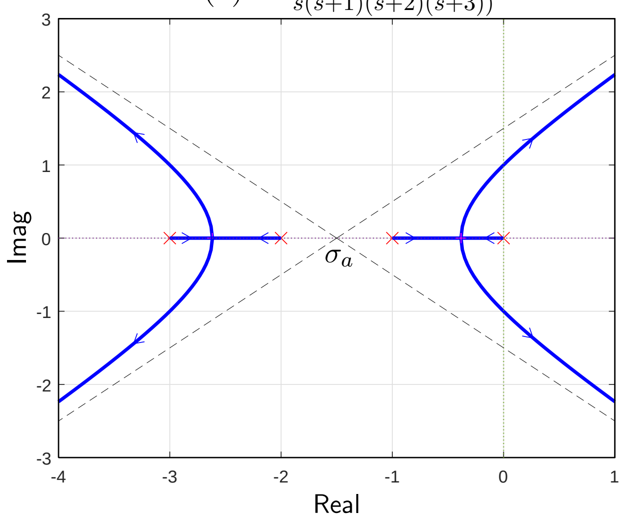


$$G(s) = \frac{s+2}{s(s+1)(s+3)}$$



- Luogo delle radici di sistemi del quarto ordine:

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)(s+3))}$$



$$G(s) = \frac{1}{s((s+2)^2+1)(s+4))}$$