

Scomposizione in fratti semplici

Evolutione forzata di un'equazione differenziale: la trasformata di Laplace $Y(s)$ del segnale di uscita $y(t)$ è uguale al prodotto della trasformata di Laplace $X(s)$ del segnale di ingresso $x(t)$ per la funzione di trasferimento $G(s)$ associata all'equazione differenziale:

$$\begin{array}{c} x(t) \\ \downarrow \\ X(s) \end{array} \rightarrow \boxed{G(s)} \rightarrow \begin{array}{c} y(t) \\ \downarrow \\ Y(s) \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad Y(s) = G(s) X(s)$$

La determinazione dell'evoluzione libera e dell'evoluzione forzata di un'equazione differenziale richiede l'antitrasformazione di una funzione razionale fratta di questo tipo:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{D(s)} := \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

La differenza $r = n - m$ fra i gradi del denominatore e del numeratore prende il nome di **grado relativo** della funzione razionale $Y(s)$.

La funzione $Y(s)$ può essere *scomposta in fratti semplici* solo se è strettamente propria, cioè se presenta un grado relativo $r \geq 1$. Se la funzione $Y(s)$ ha grado relativo $r = 0$ può essere scomposta nel seguente modo:

$$Y(s) = y_0 + Y_1(s)$$

dove la costante y_0 e la funzione $Y_1(s)$, con grado relativo $r \geq 1$, sono:

$$y_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s), \quad Y_1(s) = Y(s) - y_0.$$

La funzione $Y(s)$ può sempre essere espressa anche in forma fattorizzata:

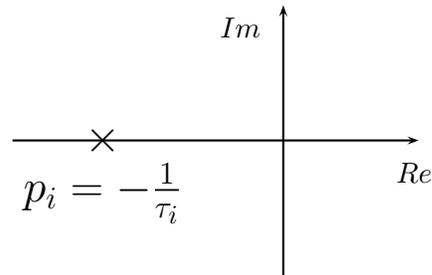
$$Y(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2) \dots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)}$$

Le costanti complesse z_1, \dots, z_m e p_1, \dots, p_n vengono dette, rispettivamente, **zeri** e **poli** della funzione $Y(s)$.

I poli della $Y(s)$ sono l'unione dei poli delle due funzioni $G(s)$ e $X(s)$.

Ad ogni *polo reale* p_i della funzione $Y(s)$ viene associata una **costante di tempo** τ_i così definita:

$$\tau_i = -\frac{1}{p_i}$$



La costante di tempo τ_i è positiva solo se il polo reale p_i è negativo. In modo analogo, per gli *zeri reali* z_j vale la relazione: $\tau_j = -1/z_j$.

Nel caso di *poli complessi coniugati*, $p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega$, ($-\sigma$ è la parte reale e ω è la parte immaginaria del polo) si utilizza anche la seguente parametrizzazione di “tipo polare”:

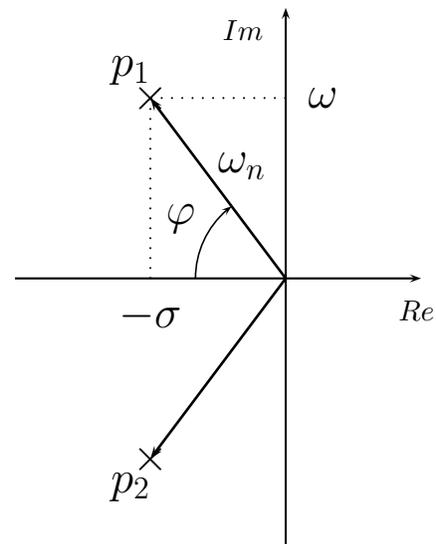
$$\begin{aligned} p_{1,2} &= -\sigma \pm j\omega \\ &= -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2} \\ &= -\omega_n\cos\varphi \pm j\omega_n\sin\varphi \end{aligned}$$

dove ω_n è detta pulsazione naturale:

$$\omega_n = |p_1| = |p_2| = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

e δ è detto coefficiente di smorzamento:

$$\delta = \cos\varphi = \frac{\sigma}{\omega_n} = \frac{\sigma}{\sqrt{\sigma^2 + \omega^2}}$$



Valgono le relazioni seguenti:

$$\sigma = \delta\omega_n, \quad \omega = \omega_n\sqrt{1-\delta^2}$$

La scomposizione in fratti semplici si distingue due diversi casi:

- i) *tutti i poli della funzione $Y(s)$ sono semplici*;
- ii) *la funzione $Y(s)$ ha anche poli multipli*.

Antitrasformazione nel caso di poli semplici

Nel caso di poli semplici la funzione può essere scomposta come segue:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_n)} = \sum_{i=1}^n \frac{K_i}{s - p_i}$$

Le costanti K_i (dette *residui*) sono reali in corrispondenza dei poli reali e complesse coniugate in corrispondenza delle coppie di poli complessi coniugati. Le costanti K_i si ricavano utilizzando la seguente formula:

$$K_i = (s - p_i)Y(s) \Big|_{s=p_i}$$

Una volta che la funzione $Y(s)$ è stata scomposta in fratti semplici, è immediato antitrasformarla:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n K_i e^{p_i t}$$

Esempio:

$$Y(s) := \frac{5s + 3}{(s + 1)(s + 2)(s + 3)} = \frac{K_1}{s + 1} + \frac{K_2}{s + 2} + \frac{K_3}{s + 3}$$

I residui si calcolano nel modo seguente:

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{5(-1) + 3}{(-1 + 2)(-1 + 3)} = -1 \\ K_2 &= \frac{5(-2) + 3}{(-2 + 1)(-2 + 3)} = 7 \\ K_3 &= \frac{5(-3) + 3}{(-3 + 1)(-3 + 2)} = -6 \end{aligned}$$

Ne segue che

$$Y(s) = -\frac{1}{s + 1} + \frac{7}{s + 2} - \frac{6}{s + 3}$$

e quindi

$$y(t) = -e^{-t} + 7e^{-2t} - 6e^{-3t}$$

Quando si hanno coppie di *poli complessi coniugati*

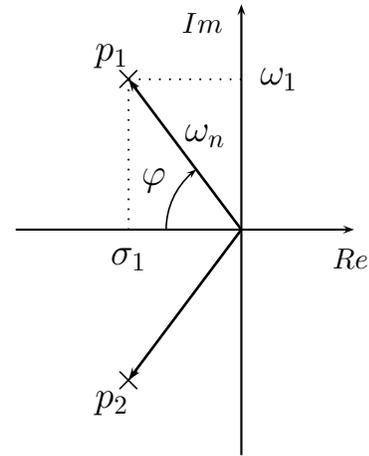
$$p_1 = \sigma_1 + j\omega_1, \quad p_2 = \sigma_1 - j\omega_1$$

anche i residui sono complessi coniugati

$$K_1 = u_1 + jv_1, \quad K_2 = u_1 - jv_1$$

La somma dei corrispondenti fratti semplici è

$$\frac{u_1 + jv_1}{s - \sigma_1 - j\omega_1} + \frac{u_1 - jv_1}{s - \sigma_1 + j\omega_1}$$



Posto

$$M_1 := 2|K_1| = 2\sqrt{u_1^2 + v_1^2}, \quad \varphi_1 := \arg K_1 = \arg(u_1 + jv_1),$$

si può scrivere

$$\frac{M_1}{2} \left(\frac{e^{j\varphi_1}}{s - \sigma_1 - j\omega_1} + \frac{e^{-j\varphi_1}}{s - \sigma_1 + j\omega_1} \right),$$

da cui, antitrasformando, si ottiene

$$\frac{M_1}{2} (e^{\sigma_1 t + j(\omega_1 t + \varphi_1)} + e^{\sigma_1 t - j(\omega_1 t + \varphi_1)}),$$

funzione che può essere posta nella forma

$$M_1 e^{\sigma_1 t} \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

oppure

$$M_1 e^{\sigma_1 t} \sin(\omega_1 t + \varphi_1 + \pi/2)$$

Esempio. Sia:

$$Y(s) = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s^3 + 2s^2 + 5s} = \frac{7s^2 - 8s + 5}{s[(s+1)^2 + 2^2]} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1-j2} + \frac{K_3}{s+1+j2}$$

I residui sono i seguenti:

$$K_1 = \frac{7 \cdot 0 - 8 \cdot 0 + 5}{(0+1-j2)(0+1+j2)} = 1$$

$$K_2 = \frac{7(-1+j2)^2 - 8(-1+j2) + 5}{(-1+j2)(-1+j2+1+j2)} = 3 + j4$$

$$K_3 = \frac{7(-1-j2)^2 - 8(-1-j2) + 5}{(-1-j2)(-1-j2+1-j2)} = 3 - j4$$

e pertanto

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{3 + j4}{s+1-j2} + \frac{3 - j4}{s+1+j2},$$

da cui, antitrasformando, si ottiene

$$y(t) = 1 + 10 e^{-t} \cos(2t + \varphi)$$

dove $10 = 2|K_2| = 2\sqrt{3^2 + 4^2}$ e $\varphi = \arctan(4/3) = 53.13^\circ$.

Antitrasformazione nel caso di poli multipli

Si suppone che la funzione razionale $Y(s)$ abbia h poli distinti p_i ($i = 1, \dots, h$), ciascuno caratterizzato da un ordine di molteplicità $r_i \geq 1$:

$$Y(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1)^{r_1} (s - p_2)^{r_2} \dots (s - p_h)^{r_h}} = \sum_{i=1}^h \sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(s - p_i)^{r_i - \ell + 1}}$$

Le costanti $K_{i\ell}$ si ricavano mediante la formula

$$K_{i\ell} = \frac{1}{(\ell - 1)!} \frac{d^{\ell-1}}{ds^{\ell-1}} \left[(s - p_i)^{r_i} Y(s) \right] \Big|_{s=p_i}$$

dove ($i = 1, \dots, h; \ell = 1, \dots, r_i$). Antitrasformando la $Y(s)$ si ottiene:

$$y(t) = \sum_{i=1}^h \sum_{\ell=1}^{r_i} \frac{K_{i\ell}}{(r_i - \ell)!} t^{r_i - \ell} e^{p_i t}$$

I coefficienti $K_{i\ell}$ sono complessi coniugati in corrispondenza di poli complessi coniugati. I termini complessi coniugati corrispondono a prodotti di esponenziali reali e funzioni trigonometriche, e si ottengono con un procedimento del tutto analogo a quello seguito nel caso di poli distinti.

Esempio:

$$Y(s) = \frac{1}{(s + 2)(s + 1)^2} = \frac{K_{11}}{s + 2} + \frac{K_{22}}{s + 1} + \frac{K_{21}}{(s + 1)^2}$$

dove

$$K_{11} = [(s + 2) Y(s)] \Big|_{s=-2} = 1$$

$$K_{22} = \frac{d}{ds} [(s + 1)^2 Y(s)] \Big|_{s=-1} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{s + 2} \right] \Big|_{s=-1} = -1$$

$$K_{21} = [(s + 1)^2 Y(s)] \Big|_{s=-1} = 1$$

Antitrasformando si ottiene:

$$y(t) = e^{-2t} - e^{-t} + t e^{-t}$$

Proprietá della scomposizione in fratti semplici

Si consideri la seguente funzione razionale fratta

$$Y(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}$$

Valgono le seguenti proprietà:

- i)* se è $n = m + 1$, la somma dei residui di $Y(s)$ è $\frac{b_m}{a_n}$;
- ii)* se è $n > m + 1$, la somma dei residui di $Y(s)$ è zero.

Si ricorda che, nello sviluppo in fratti semplici, i residui di $Y(s)$ sono i coefficienti dei termini con polinomio a denominatore di primo grado.

Esempio 1:

$$Y(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3)} = \frac{A}{s - p_1} + \frac{B}{s - p_2} + \frac{C}{s - p_3}$$

Calcolati A e B , il calcolo del residuo C è immediato: $C = -(A + B)$.

Esempio 2:

$$Y(s) = \frac{1}{(s - p_1)^2 (s - p_2)} = \frac{A}{(s - p_1)^2} + \frac{B}{s - p_1} + \frac{C}{s - p_2}$$

Il coefficiente A e il residuo C si possono calcolare immediatamente:

$$A = \frac{1}{p_1 - p_2}, \quad C = \frac{1}{(p_2 - p_1)^2}$$

Applicando la proprietà *ii)* si deduce: $B = -C$.

Esempio 3:

$$Y(s) = \frac{s - z_1}{(s - p_1)^3 (s - p_2)} = \frac{A}{(s - p_1)^3} + \frac{B}{(s - p_1)^2} + \frac{C}{s - p_1} + \frac{D}{s - p_2}$$

Il coefficiente A e il residuo D si calcolano immediatamente:

$$A = \frac{p_1 - z_1}{p_1 - p_2} \quad D = \frac{p_2 - z_1}{(p_2 - p_1)^3} \quad C = -D = \frac{z_1 - p_2}{(p_2 - p_1)^3}$$

Il coefficiente B viene calcolato nel seguente modo:

$$B = \frac{d}{ds} \left(\frac{s - z_1}{s - p_2} \right)_{s=p_1} = \frac{z_1 - p_2}{(s - p_2)^2} \Big|_{s=p_1} = \frac{z_1 - p_2}{(p_1 - p_2)^2}$$

Modi della risposta temporale

L'unica difficoltà nell'antitrasformazione di funzioni razionali fratte $Y(s)$ è la fattorizzazione del polinomio a denominatore.

Il comportamento temporale della funzione antitrasformata $y(t)$ è essenzialmente legato alla posizione dei poli p_i della funzione $Y(s)$. Ai poli semplici $s_i = -\sigma$ e ai poli complessi coniugati $s_j = -\sigma \pm j\omega$ sono associati termini temporali $y_i(t)$ e $y_j(t)$, detti *modi*, del seguente tipo:

$$(s + \sigma) \quad \Rightarrow \quad y_i(t) = K e^{-\sigma t}$$

$$(s + \sigma)^2 + \omega^2 \quad \Rightarrow \quad y_j(t) = M e^{-\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

Nel caso di poli con grado molteplicità $r > 1$ si hanno i seguenti *modi*:

$$(s + \sigma)^r \quad \Rightarrow \quad y_i(t) = \sum_{n=0}^{r-1} K_n t^n e^{-\sigma t}$$

$$[(s + \sigma)^2 + \omega^2]^r \quad \Rightarrow \quad y_j(t) = \sum_{n=0}^{r-1} M_n t^n e^{-\sigma t} \sin(\omega t + \varphi)$$

Nel caso di *poli semplici*, i modi $y_i(t)$ e $y_j(t)$ tendono a zero per t tendente all'infinito se la parte reale del polo è negativa ($-\sigma < 0$), restano limitati se essa è nulla ($\sigma = 0$) e divergono se essa è positiva ($-\sigma > 0$).

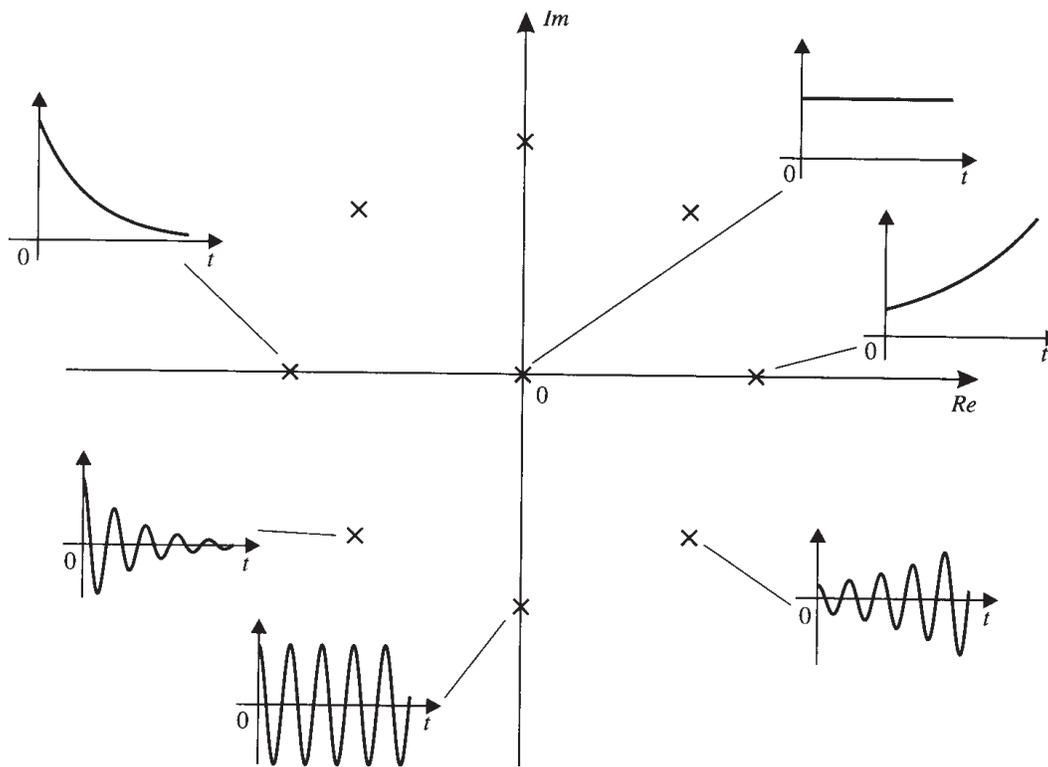
Nel caso di *poli multipli*, i modi tendono a zero se la parte reale del polo è negativa ($-\sigma < 0$) e divergono se essa è positiva o nulla ($-\sigma \geq 0$).

L'antitrasformata $y(t)$ di una funzione razionale fratta $Y(s)$ rimane limitata se e solo se la funzione $Y(s)$ non presenta alcun polo a parte reale positiva e gli eventuali poli a parte reale nulla sono semplici. In caso contrario la funzione $y(t)$ diverge.

I poli che caratterizzano la risposta $Y(s) = G(s)X(s)$ di un sistema lineare $G(s)$ ad un segnale in ingresso $X(s)$ (come l'impulso di Dirac, il gradino, la sinusoide) sono quelli della funzione di trasferimento $G(s)$ più quelli relativi alla funzione di ingresso $X(s)$.

Un sistema $G(s)$ è *asintoticamente stabile* se tutti i suoi poli sono a parte reale negativa: in questo caso tutti i modi $y_i(t)$ e $y_j(t)$ associati ai poli della funzione $G(s)$ tenderanno sicuramente a zero quando t tende all'infinito.

Modi della risposta nel caso di poli distinti ($r = 1$):



Modi della risposta nel caso di poli multipli con $r = 2$:

