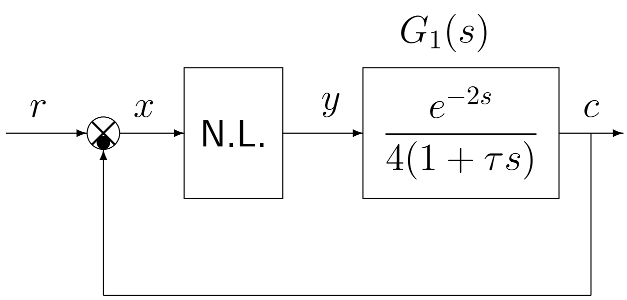
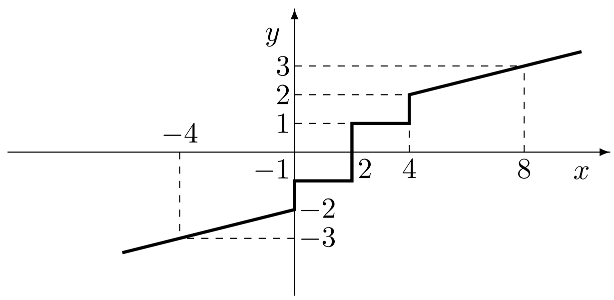
Funzione descrittiva: esempi

Esempio. Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:



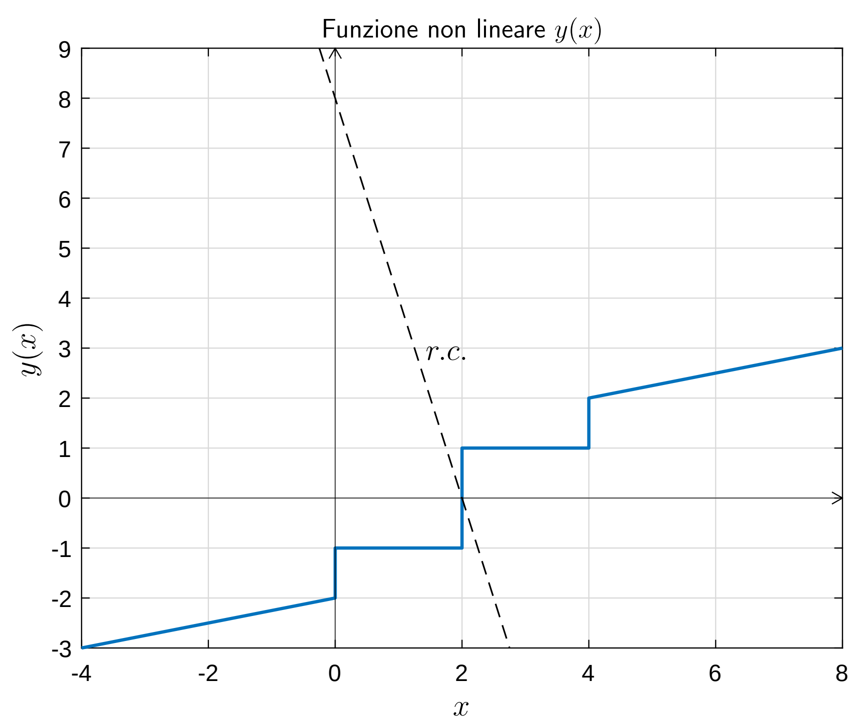


dove $\tau << 2$. Determinare il punto di lavoro (x_0, y_0) corrispondente all'ingresso costante $r = 2$. Tracciare qualitativamente l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della funzione $y = y(x)$ nell'intorno del punto di lavoro. Determinare inoltre l'ampiezza X^* e la pulsazione ω^* dell'oscillazione autosostenuta presente nel sistema.

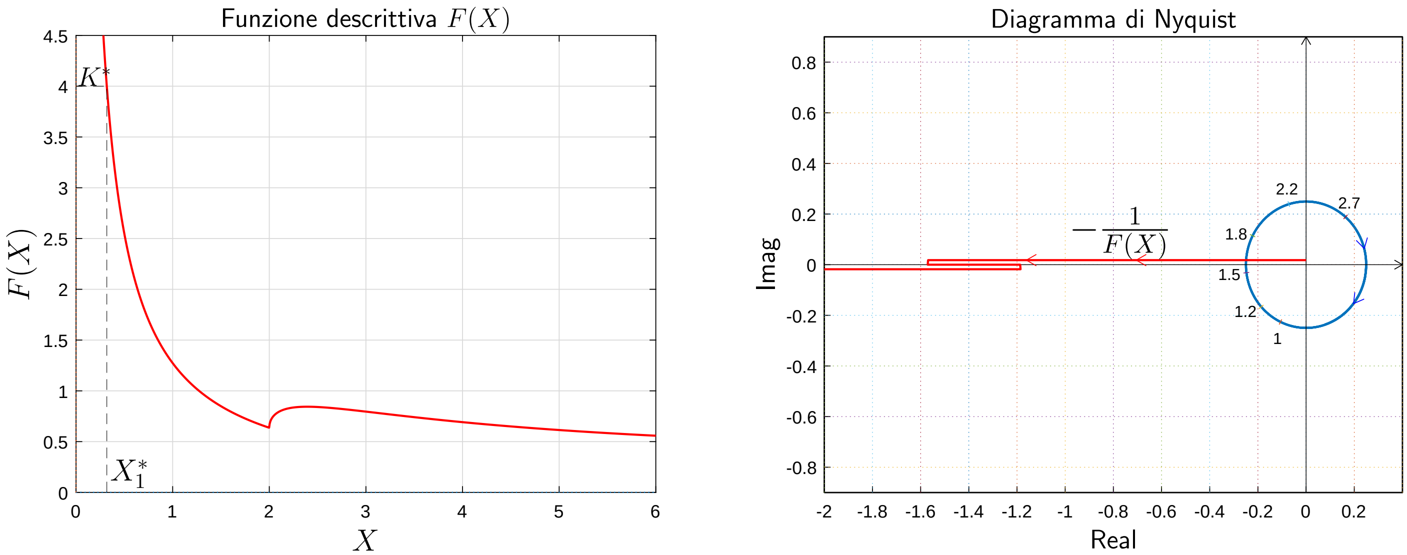
• Nel caso in esame i guadagni statici K_1, K_2 e K_3 valgono $K_1 = 1$, $K_2 = G_1(0) = 0.25$ e $K_3 = 1$. La retta di carico del sistema retroazionato è quindi la seguente:

$$y = \frac{1}{K_1 K_2 K_3}[K_1 r - x] \qquad \rightarrow \qquad y = 8 - 4x$$

Intersecando la retta di carico con la caratteristica non lineare $y = y(x)$, si determina facilmente che il punto di lavoro del sistema retroazionato è $(x_0, y_0) = (2, 0)$.



• La caratteristica non lineare $y = y(x)$ è simmetrica rispetto a questo punto di lavoro per cui è possibile applicare il metodo della funzione descrittiva nella sua versione semplificata. L'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ rispetto ad un sistema di riferimento centrato sul punto di lavoro $(x_0,\ y_0)$ è mostrata nella figura seguente.



• Nel caso in esame, per $X < 2$ la funzione descrittiva $F(X)$ della funzione $y = y(x)$ coincide con quella del relè ideale ($Y_1 = 1$):

$$F(X) = \frac{4}{\pi X}$$

• Se si trascura la costante di tempo τ, il diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$ è una circonferenza di raggio 0.25 percorsa "infinite volte" in senso orario per $\omega \in [0,\ \infty]$.

• Nel caso in esame é facile verificare che esiste un punto di intersezione tra le funzioni $G(j\omega)$ e $-1/F(X)$ a cui corrisponde un ciclo limite stabile. L'intersezione si trova sull'asse reale negativo nel punto $\sigma = -\frac{1}{K^*} = -0.25$ in corrispondenza della pulsazione

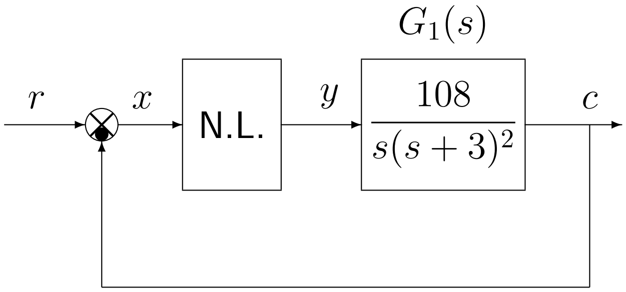
$$\arg\left(\frac{e^{-j\,2\,\omega^*}}{4}\right) = -2\,\omega^* = -\pi \qquad \rightarrow \qquad \omega^* = \frac{\pi}{2}.$$

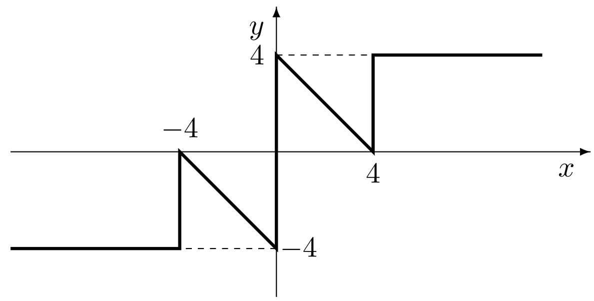
• Imponendo $F(X_1^*)G_1(j\omega^*) = -1$ si determina facilmente l'ampiezza X dell'oscillazione autosostenuta presente nel sistema retroazionato:

$$F(X_1^*) = K^* = 4, \qquad \rightarrow \qquad X_1^* = \frac{1}{\pi} = 0.3187$$

• Molto spesso l'analisi qualitativa è sufficiente per determinare "se esiste o meno" un ciclo limite stabile. Solo nel caso in cui tale ciclo esista e sia stabile si può procedere al calcolo "esatto" della $F(X)$ limitatamente, tra l'altro, al solo tratto di interesse. Nel caso in esame, per esempio, per determinare l'ampiezza X_1^* dell'oscillazione autosostenuta è stato sufficiente conoscere la funzione descrittiva $F(X)$ nel tratto iniziale per $X < 2$.

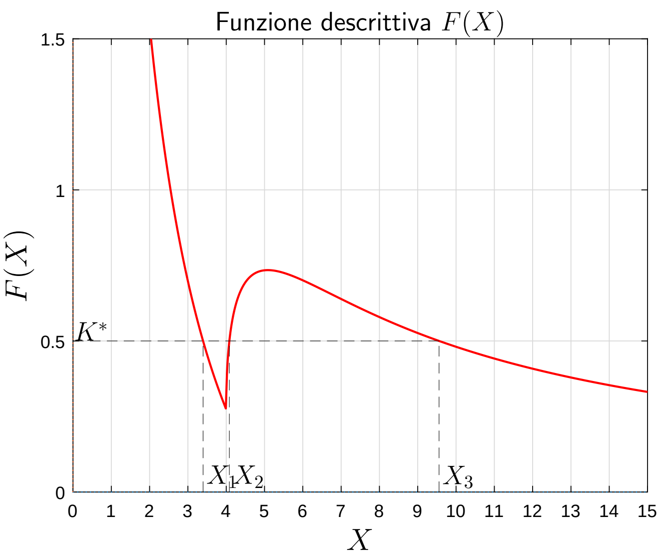
Esempio. Si consideri il seguente sistema non lineare retroazionato:

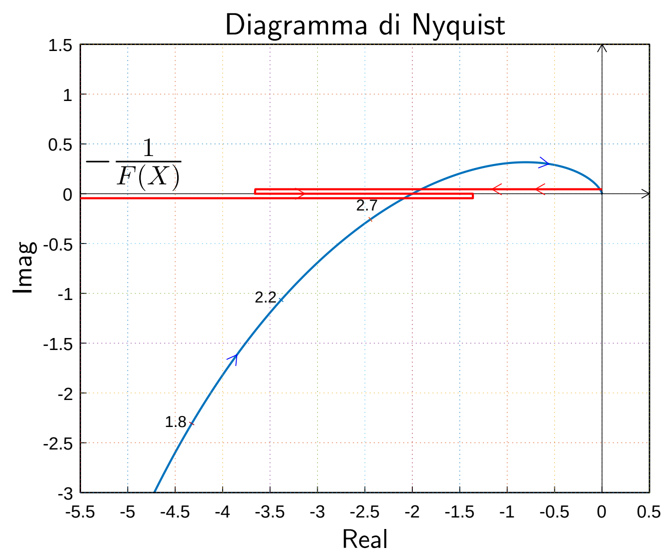




Tracciare qualitativamente l'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ della funzione $y = y(x)$ nell'intorno dell'origine e discutere la presenza o meno di oscillazioni autosostenute all'interno del sistema retroazionato. Determinare inoltre l'ampiezza X^* e la pulsazione ω^* dell'oscillazione autosostenuta presente nel sistema.

L'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ nell'intorno dell'origine è il seguente:





Tale andamento è facilmente determinabile pensando che per $X < 4$ la non linearità è la somma di un relè ideale con un elemento lineare di pendenza -1

$$F(X) = \frac{16}{\pi X} - 1, \qquad\qquad 0 < X < 4.$$

Il margine di ampiezza della funzione $G_1(s)$ può essere calcolato utilizzando il criterio di Routh: $K^* = \frac{3 \cdot 3 \cdot (3+3)}{108} = 0.5$. Esistono tre punti di intersezione tra $G_1(j\omega)$ e $-1/F(X)$:

$$X_1 = 3.395, \qquad X_2 = 4.084, \qquad X_3 = 9.557,$$

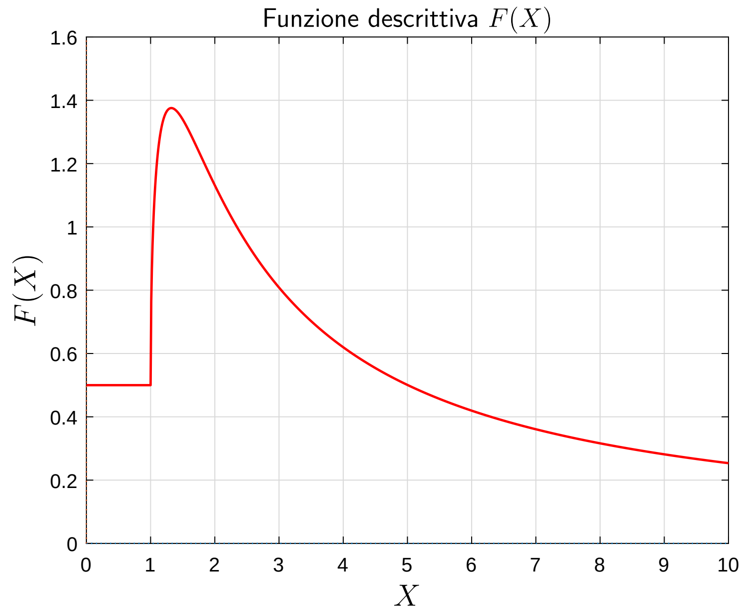
tutti e tre alla pulsazione $\omega = 3$. La prima e la terza intersezione rappresentano cicli limite stabile, la seconda un ciclo limite instabile. L'ampiezza X_1 della prima oscillazione può essere determinata esattamente utilizzando l'espressione di $F(X)$ sopra riportata:

$$F(X) = 0.5 \qquad \rightarrow \qquad X_1 = \frac{16}{1.5\pi} = 3.395$$

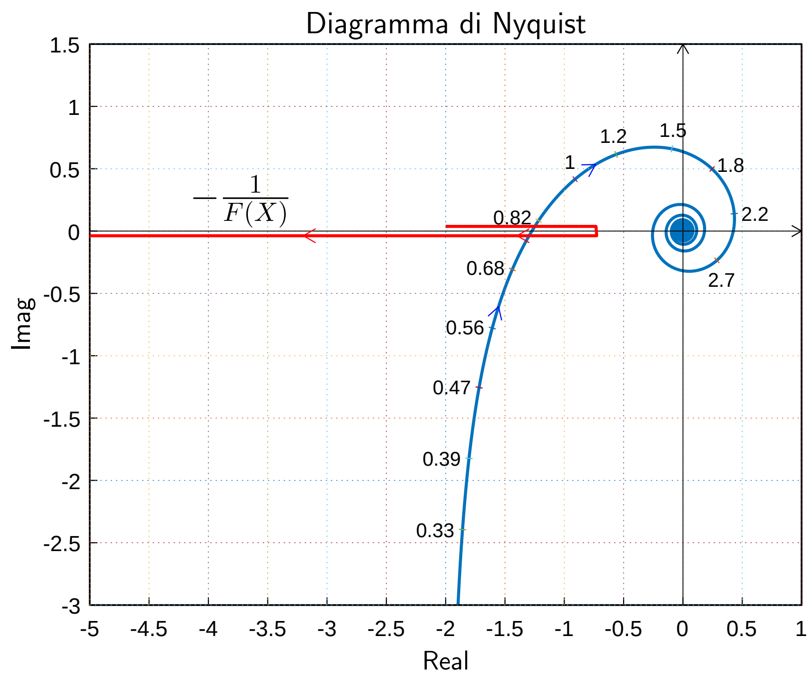
Esempio.

Sia dato il sistema $G_1(s) = \dfrac{e^{-2s}}{s}$ posto in retroazione negativa su di una nonlinarità caratterizzata dalla funzione descrittiva $F(X)$ mostrata in figura.

Supponendo che l'ingresso sia nullo, $r(t) = 0$, determinare la pulsazione ω e l'ampiezza X (approssimata) delle eventuali oscillazioni autosostenute presenti nel sistema retroazionato.



Il diagramma di Nyquist della funzione $G_1(s)$ è di tipo a spirale:



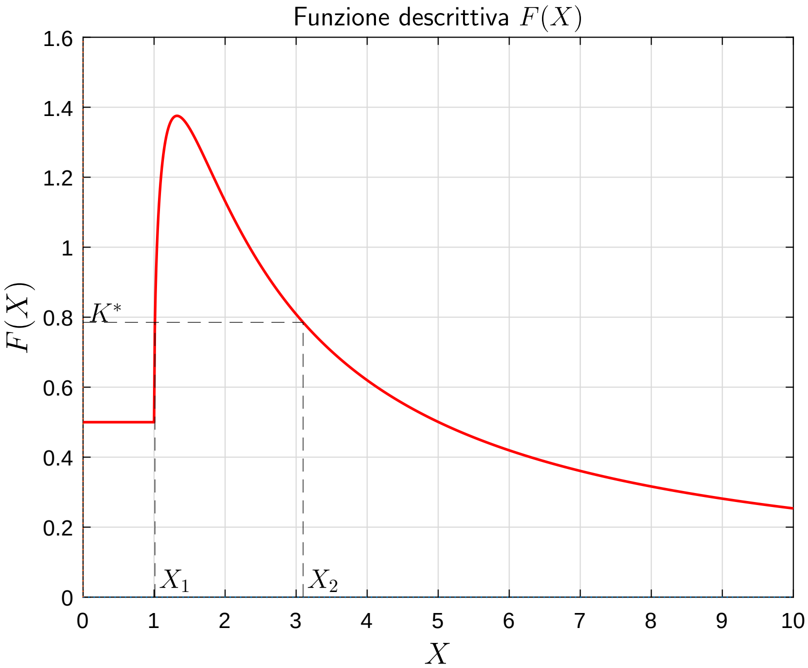
La prima intersezione con il semiasse negativo si ha in corrispondenza della pulsazione:

$$\omega_0 = \frac{1}{t_0}\left(\frac{\pi}{2} - M_F\right)_{M_F=0} = \frac{\pi}{2t_0} = \frac{\pi}{4} = 0.7854$$

Tale valore corrisponde anche al margine di ampiezza del sistema:

$$M_\alpha = K^* = \omega_0 = \frac{\pi}{4} = 0.7854$$

Entrando nel grafico della funzione descrittiva $F(X)$ con il valore $K^* = 0.7854$ si individuano 2 intersezioni alle quali corrispondono due oscillazioni autosostenute.



Le ampiezze X_1 e X_2 di queste autooscillazioni sono:

$$X_1 = 1.014, \qquad\qquad X_2 = 3.098,$$

L'oscillazione di ampiezza X_1 è instabile, mentre quella di ampiezza X_2 è stabile. Entrambe le oscillazioni avvengono alla pulsazione $\omega_0 = 0.7854$.

L'ampiezza $X_2 \simeq 3$ e il periodo $T = 2\pi/\omega_0 = 8$ s dell'oscillazione calcolati teoricamente concordano bene con i seguenti risultati simulativi: