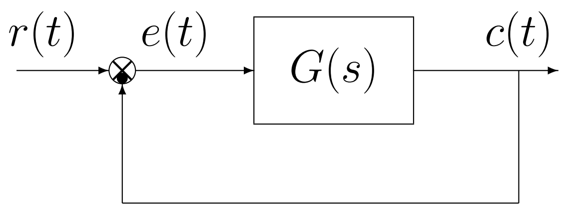
Errori a regime

- Si faccia riferimento al seguente schema a retroazione unitaria:



(1)

In questo schema semplificato la funzione $G(s)$ descrive il guadagno di anello del sistema, cioé il prodotto delle funzioni di trasferimento che descrivono il regolatore, il sistema controllato e il sensore.

- Nel caso di segnali di ingresso a gradino, a rampa e a parabola:

$$r(t) = R_0\, u(t), \qquad r(t) = R_0\, t, \qquad r(t) = \frac{R_0}{2}\, t^2$$

per il calcolo degli errori a regime si utilizzano le seguenti formule:

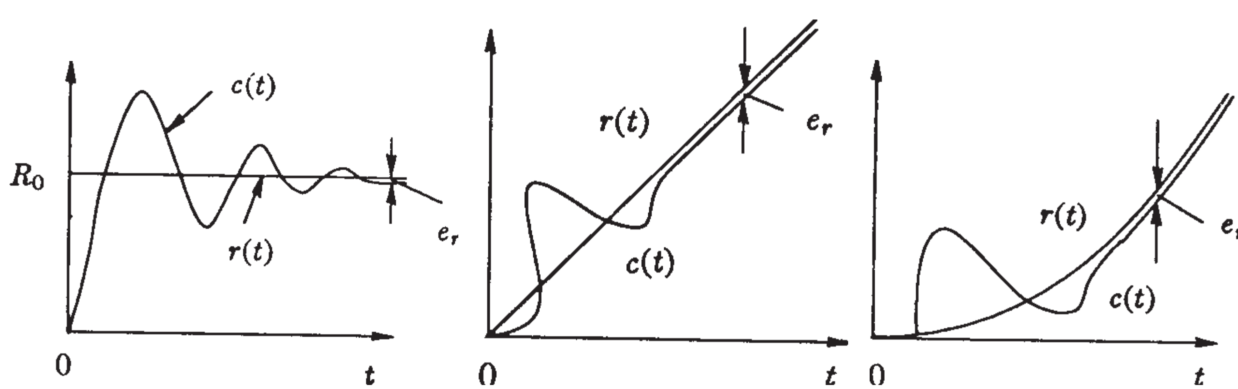
$$\boxed{e_p = \frac{R_0}{1+K_p}}, \qquad \boxed{e_v = \frac{R_0}{K_v}}, \qquad \boxed{e_a = \frac{R_0}{K_a}}$$

dove K_p, K_v e K_a:

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s), \qquad K_v = \lim_{s\to 0} sG(s), \qquad K_a = \lim_{s\to 0} s^2 G(s)$$

sono le costanti di posizione, di velocità e di accelerazione.

- Andamenti temporali.



- Utilizzando le trasformate di Laplace si ha:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} s\, E(s) = \lim_{s\to 0} s\, G_e(s)\, R(s) = \lim_{s\to 0} s\, \frac{1}{1+G(s)}\, R(s)$$

dove $G_e(s)$ rappresenta la funzione di trasferimento che lega l'ingresso $R(s)$ alla variabile errore $E(s)$.

- Nel caso di ingresso a gradino di ampiezza R_0 si ha $R(s) = \frac{R_0}{s}$. Dalla precedente relazione si ottiene:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} \frac{R_0}{1+G(s)} = \frac{R_0}{1+\lim_{s\to 0} G(s)} = \frac{R_0}{1+K_p} = e_p$$

Se il sistema $G(s)$ è di tipo 0 si ha che $K_p = K$, (cioè la costante di posizione coincide con il guadagno statico del sistema) e quindi l'errore di posizione e_p é finito. Se il sistema $G(s)$ è di tipo 1 o 2 si ha che $K_p\!=\!\infty$ e quindi l'errore a regime e_p è nullo.

- Nel caso di ingresso a rampa di pendenza R_0 si ha $R(s) = \frac{R_0}{s^2}$ e quindi:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} \frac{R_0}{s(1+G(s))} = \frac{R_0}{\lim_{s\to 0} s\, G(s)} = \frac{R_0}{K_v} = e_v$$

Se il sistema $G(s)$ è di tipo 0 si ha $K_v = 0$ e quindi l'errore a regime è infinito: $e_v = \infty$. Se $G(s)$ è di tipo 1 si ha $K_v = K$ e quindi l'errore l'errore a regime é finito: $e_v = R_0/K$. Se $G(s)$ è di tipo 2 si ha $K_v\!=\!\infty$ e quindi l'errore a regime è nullo: $e_v = 0$.

- Nel caso di ingresso a parabola $r(t) = \frac{R_0}{2} t^2$ si ha $R(s) = \frac{R_0}{s^3}$ e quindi:

$$e_\infty = \lim_{s\to 0} \frac{R_0}{s^2(1+G(s))} = \frac{R_0}{\lim_{s\to 0} s^2\, G(s)} = \frac{R_0}{K_a} = e_a$$

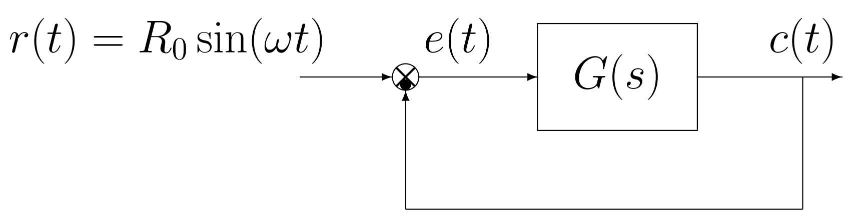
Se il sistema $G(s)$ è di tipo 0 o di tipo 1 si ha $K_a\!=\!0$, e quindi l'errore a regime è infinito: $e_a = \infty$. Se il sistema $G(s)$ è di tipo 2, si ha che $K_a\!=\!K$, e quindi l'errore a regime è finito: $e_a = R_0/K$.

- Tabella riassuntiva degli errori a regime:

Tipo	Gradino	Rampa	Parabola
0	$\dfrac{R_0}{1+K_p}$	∞	∞
1	0	$\dfrac{R_0}{K_v}$	∞
2	0	0	$\dfrac{R_0}{K_a}$

- Principio del modello interno: *dato un segnale $r(t)$ in ingresso al sistema retroazionato (1), il corrispondente l'errore a regime e_∞ é nullo se tutti i poli della trasformata di Laplace $R(s) = \mathcal{L}[r(t)]$ del segnale $r(t)$ di ingresso sono anche poli della funzione di trasferimento $G(s)$ del guadagno di anello.*

- Utilizzando il *Principio del modello interno* é possibile capire in quali condizioni un sistema retroazionato ammette un l'errore a regime nullo per ingesso sinusoidale:



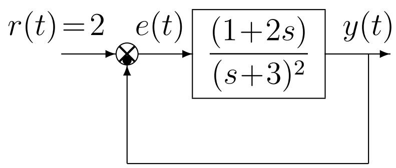
Essendo

$$R(s) = \mathcal{L}[r(t)] = \frac{R_0\,\omega}{s^2+\omega^2}$$

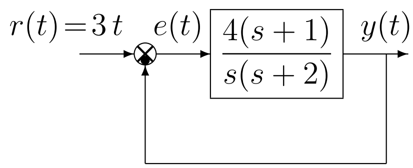
l'errore a regime e_∞ del sistema retroazionato é nullo solo se la funzione $G(s)$ ha due poli sull'asse immaginario in corrispondenza della pulsazione ω, $s_{1,2} = \pm j\,\omega$, cioé solo se il termine $s^2+\omega^2$ é un fattore del polinomio a denominatore della funzione $G(s)$.

Esempi

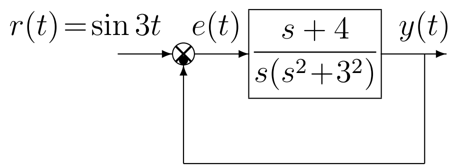
- Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{2}{1+\frac{1}{9}} = \frac{18}{10} = 1.8$$

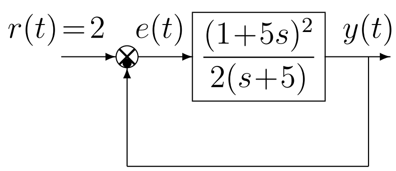


$$e(\infty) = \frac{3}{2} = 1.5$$

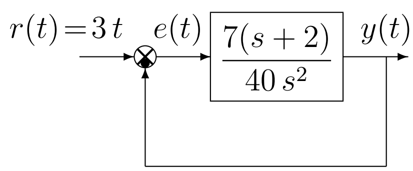


$$e(\infty) = 0$$

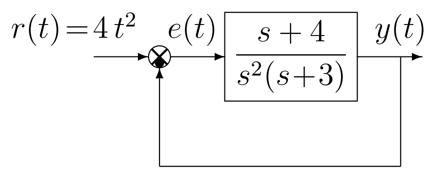
- Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{2}{1+\frac{1}{10}} = \frac{20}{11} = 1.8182$$

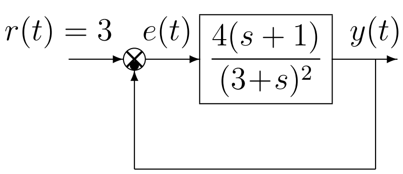


$$e(\infty) = 0$$

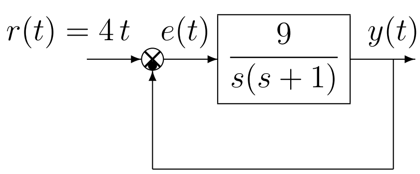


$$e(\infty) = 6$$

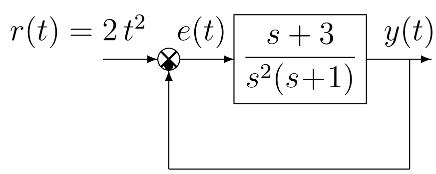
- Calcolare l'errore a regime $e(\infty)$ per i seguenti sistemi retroazionati:



$$e(\infty) = \frac{3}{1+\frac{4}{9}} = \frac{27}{13} = 2.08$$



$$e(\infty) = \frac{4}{9} = 0.444$$



$$e(\infty) = \frac{4}{3} = 1.333$$