Contorno delle radici: esempi

Si faccia riferimento all'equazione differenziale che descrive il comportamento dinamico di un sistema "massa, molla, smorzatore":

$$M\,\ddot{x}(t) + b\,\dot{x}(t) + K\,x(t) = F(t)$$

La corrispondente funzione di trasferimento è:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{M\,s^2 + b\,s + K}$$

Il comportamento dinamico del sistema dipende dalla posizione del poli e quindi dal valore dei parametri M, b e K.

Analisi parametrica al variare del parametro b. L'equazione che descrive la dinamica del sistema:

$$M\,s^2 + b\,s + K = 0$$

può essere riscritta mettendo in evidenza il parametro b:

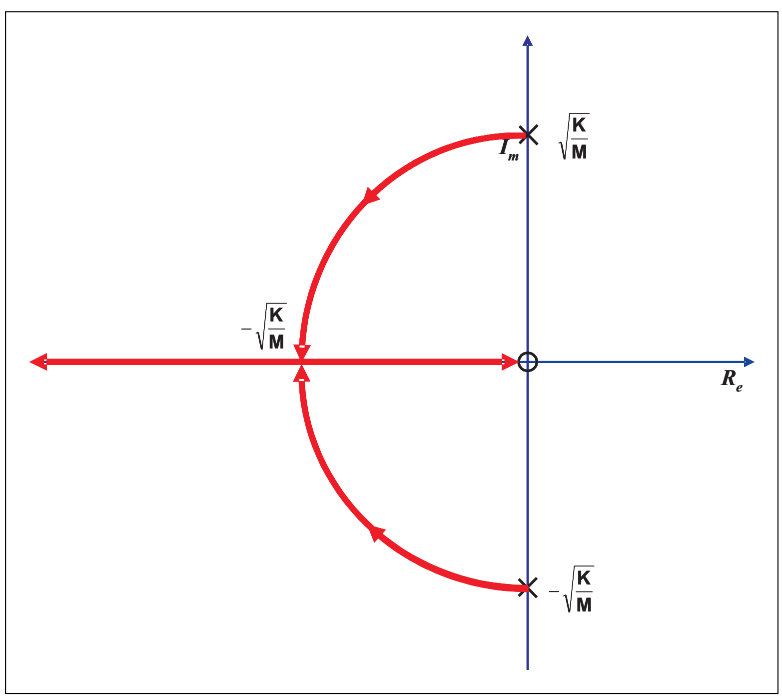
$$1 + \frac{b\,s}{M\,s^2 + K} = 0$$

Il corrispondente luogo delle radici al variare di $b > 0$ mostra che la condizione di minimo tempo di assestamento si ha in corrispondenza del punto di diramazione in

$$\sigma_a = -\sqrt{\frac{K}{M}}$$

Il corrispondente valore "ottimale" di b è:

$$b^* = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=\sigma_a} = 2\sqrt{K\,M}$$

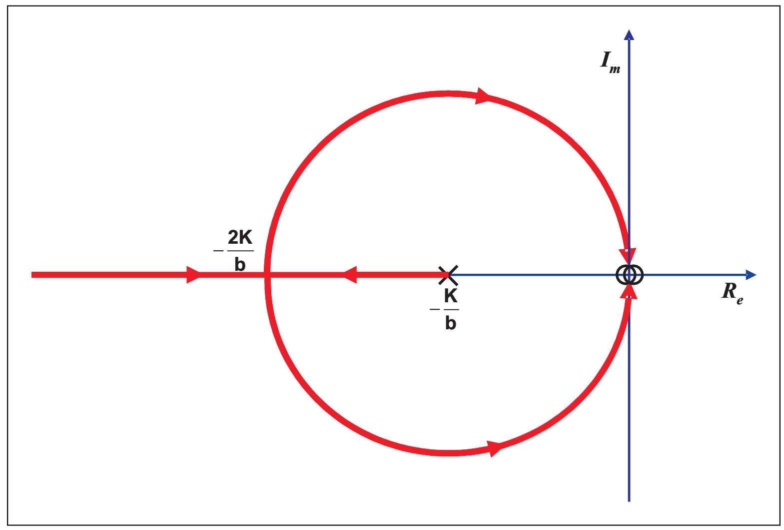


Analisi parametrica al variare del parametro M. L'equazione che descrive la dinamica del sistema può essere riscritta mettendo in evidenza il parametro M:

$$1 + \frac{M\,s^2}{b\,s + K} = 0$$

Il corrispondente luogo delle radici al variare di $M > 0$ mostra che la condizione di minimo tempo di assestamento si ha in corrispondenza del punto di diramazione in

$$\sigma_d = -\frac{2K}{b}$$

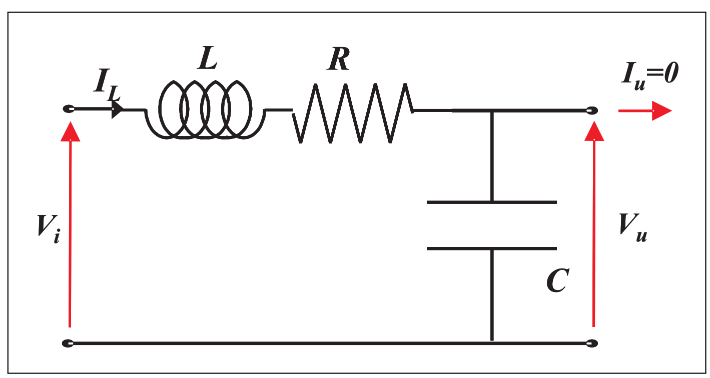


Il corrispondente valore "ottimale" di M è:

$$M^* = -\left.\frac{1}{G(s)}\right|_{s=\sigma_d} = \frac{b^2}{4K}$$

Sistema elettrico R, L, C.

La funzione di trasferimento del sistema fisico riportato di fianco si ricava agevolmente utilizzando la formula del partitore di tensione applicato alle impedenze complesse:

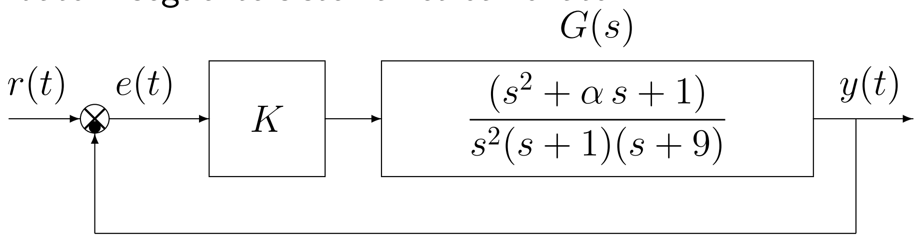


$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{\frac{1}{C\,s}}{L\,s + R + \frac{1}{C\,s}} = \frac{\frac{1}{C}}{L\,s^2 + R\,s + \frac{1}{C}}$$

A meno del guadagno $\frac{1}{C}$, l'analisi parametrica di questo sistema può essere ricondotta a quella del sistema meccanico illustrato sopra utilizzando la seguente analogia:

$$L \leftrightarrow M, \qquad R \leftrightarrow b, \qquad C \leftrightarrow \frac{1}{K}$$

Esempio. Sia dato il seguente sistema retroazionato:

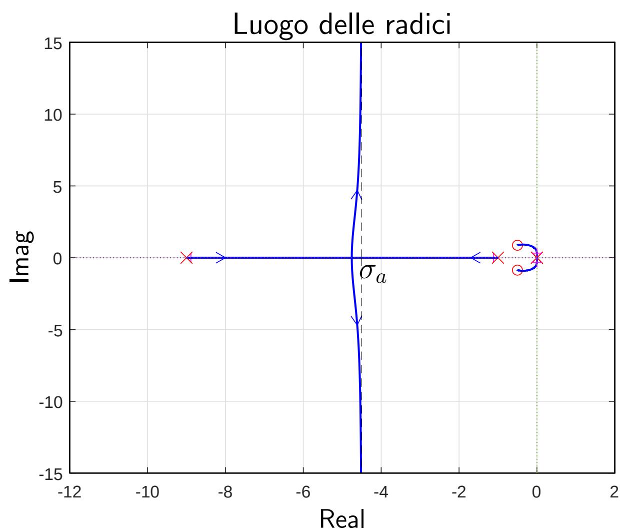


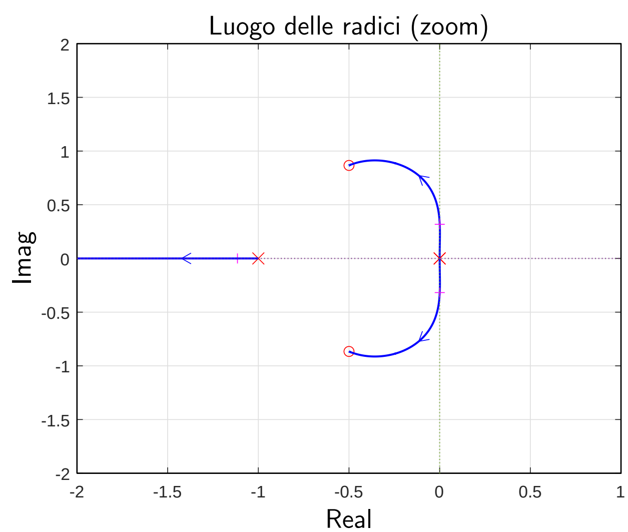
a.1) Posto $\alpha = 1$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro K. Tracciare il luogo delle radici per $K > 0$. Determinare esattamente la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^*. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Soluzione. Posto $\alpha = 1$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1\, G_1(s) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + K\frac{(s^2+\alpha\, s+1)}{s^2(s+1)(s+9)} = 0$$

dove $K_1 = K$. L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K_1 > 0$ é il seguente:





Il centro degli asintoti σ_a è:

$$\sigma_a = \frac{1}{2}(-1-9+1) = 4.5$$

L'intersezione con l'asse immaginario si calcola utilizzando il criterio di Routh:

$$1 + K\, G(s) = 0 \qquad \rightarrow \qquad s^4 + 10\, s^3 + (9+K)s^2 + K\, s + K = 0$$

Tabella di Routh:

$$\begin{array}{c|ccc}
4 & 1 & 9+K & K \\
3 & 10 & K & \\
2 & 10(9+K)-K & 10\,K & \\
1 & [10(9+K)-K-10^2]K & & \\
0 & 10\,K & &
\end{array}$$

Il sistema retroazionato é stabile per:

$$90 + 9K - 10^2 > 0 \qquad \rightarrow \qquad K > K^* = \frac{10}{9} = 1.11$$

L'intersezione con l'asse immaginario si ha alla pulsazione: $\omega^* = \sqrt{\frac{K^*}{10}} = \sqrt{0.111} = 0.333$.

a.2) Posto $K = 20$, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\alpha > 0$. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo". Nella graficazione si tenga conto che: a) la posizione dei poli del sistema retroazionato quando $K = 20$ e $\alpha = 0$ è $p_{1,2} = 0.11 \pm 0.81\,j$ e $p_{3,4} = -5.11 \pm 2.11\,j$; b) il sistema retroazionato è stabile per $\alpha_1^* < \alpha < \alpha_2^*$. Il calcolo dei parametri α_1^* e α_2^* non è necessario. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Soluzione. Posto $K = 20$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

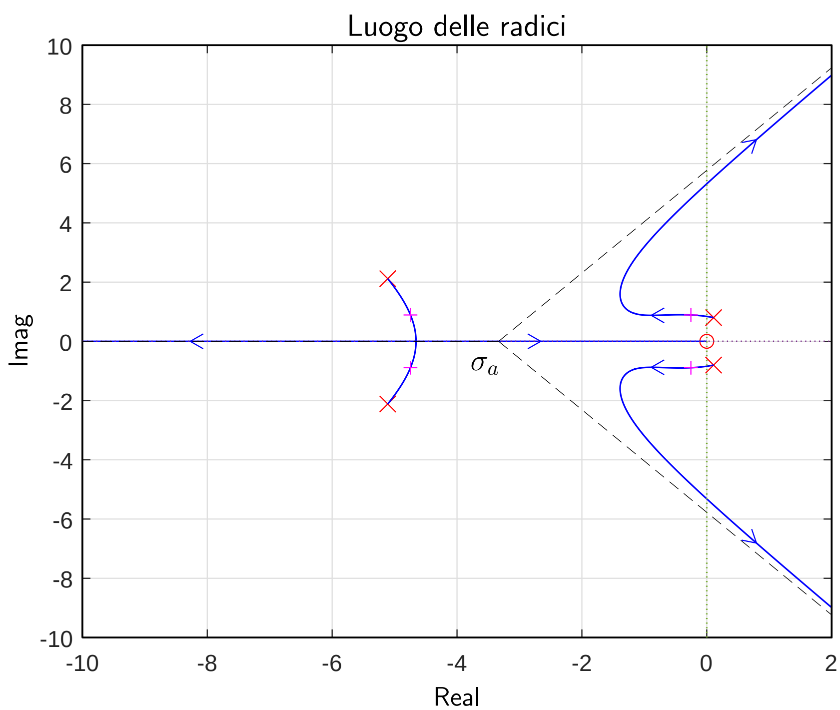
$$1 + K\frac{(s^2 + \alpha\, s + 1)}{s^2(s+1)(s+9)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^2(s+1)(s+9) + K(s^2 + \alpha\, s + 1) = 0 \quad \rightarrow$$

$$s^2(s+1)(s+9) + K(s^2+1) + K\alpha\, s = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + \frac{20\,\alpha\, s}{s^2(s+1)(s+9) + 20(s^2+1)} = 0$$

I poli della funzione $G_2(s)$ sono quelli indicati sopra:

$$1 + \frac{20\,\alpha\, s}{[(s-0.11)^2 + 0.81^2][(s+5.11)^2 + 2.11^2]} = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + \alpha\, G_2(s) = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è il seguente:



Il centro degli asintoti σ_a è il seguente:

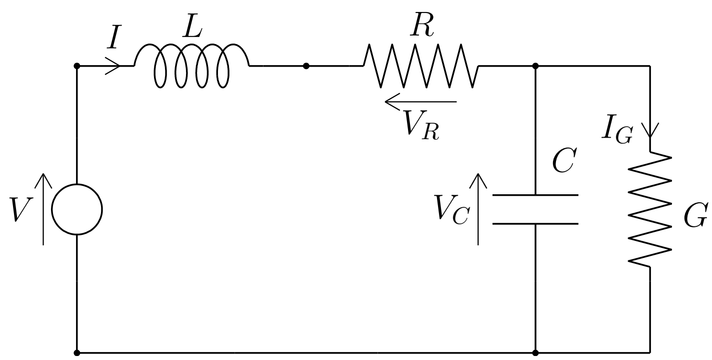
$$\sigma_a = \frac{1}{3}(2 \cdot 0.11 - 2 \cdot 5.11) = -\frac{10}{3} = -3.66$$

a.3) Sia data la seguente funzione di trasferimento $G_3(s)$ che descrive il legame tra la tensione in ingresso $V(s)$ e la corrente in uscita $I(s)$ di un circuito elettrico:

$$G_3(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{Cs + G}{CLs^2 + (CR + GL)s + GR + 1}$$

Posto $L = 1$, $C = 1$ e $G = 2$, mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso i poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ al variare del parametro $R > 0$. Calcolare il valore R^* a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento del sistema $G_3(s)$ alla risposta al gradino.

Soluzione. La funzione di trasferimento $G_3(s)$ è quella relativa al seguente schema elettrico:



I poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ coincidono con le radici del polinomio a denominatore:

$$CLs^2 + (CR + GL)s + GR + 1 = 0$$

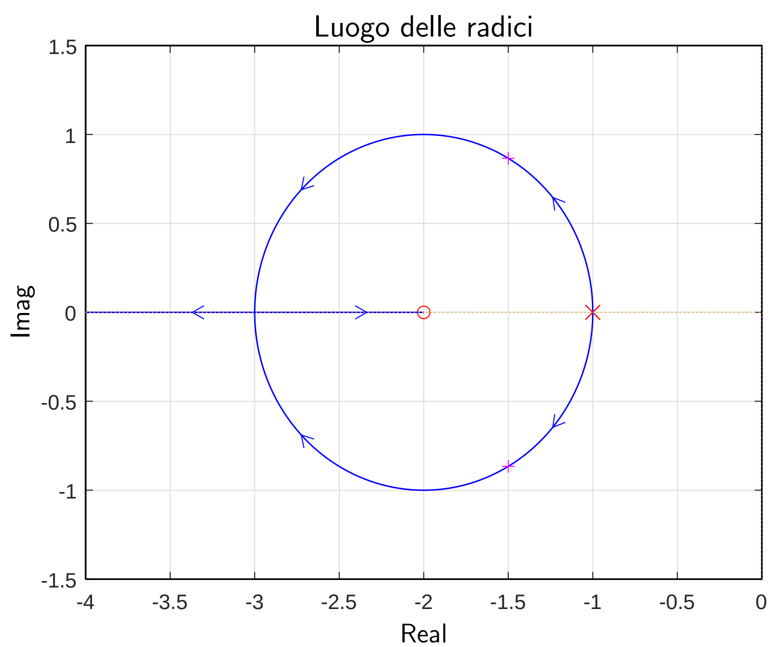
Posto $L = 1$, $C = 1$ e $G = 2$ si ottiene la seguente equazione:

$$s^2 + (R + 2)s + 2R + 1 = 0$$

che può essere riscritta nel seguente modo:

$$s^2 + 2s + 1 + R(s + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + R\,\frac{(s + 2)}{(s + 1)^2} = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + R\,G_4(s) = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $R > 0$ è il seguente:



In questo caso il contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in $z = -2$. Il raggio R della circonferenza è:

$$R = 1$$

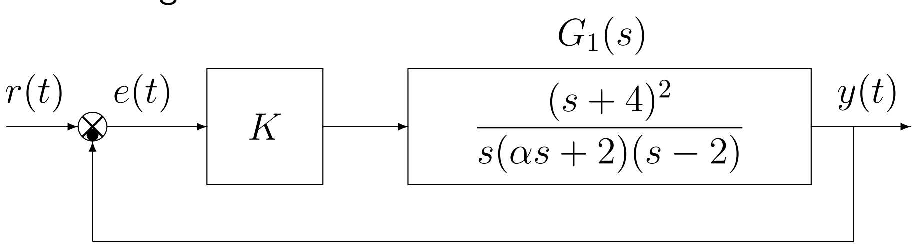
I punti di diramazione σ_1 e σ_2 del contorno delle radici sono:

$$\sigma_1 = -1, \qquad\qquad \sigma_2 = -3.$$

La condizione di minimo tempo di assestamento di ha in corrispondenza del punto di diramazione $\sigma_1 = -1$ e quindi per il seguente valore R^* del parametro R:

$$R^* = -\left.\frac{1}{G_4(s)}\right|_{s=\sigma_2} = -\left.\frac{(s+1)^2}{(s+2)}\right|_{s=-3} = 4.$$

Esempio. Sia dato il seguente sistema retroazionato:

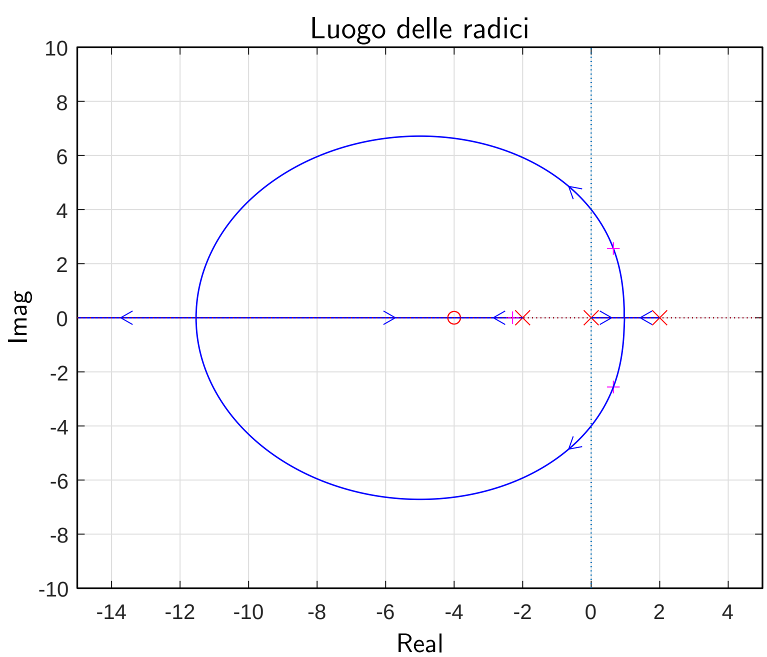


a1) Posto $\alpha = 1$, tracciare qualitativamente il luogo delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $K > 0$. Determinare la posizione degli asintoti, le intersezioni ω^* con l'asse immaginario e i corrispondenti valori del guadagno K^*. Determinare la posizione dei punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Soluzione. Posto $\alpha = 1$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è:

$$1 + K_1\, G_1(s) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + K\frac{(s+4)^2}{s(s+2)(s-2)} = 0$$

L'andamento qualitativo del luogo delle radici del sistema $G_1(s)$ al variare di $K > 0$ è:



Il luogo delle radici è caratterizzato da un solo asintoto coincidente con il semiasse reale negativo. Le intersezioni con l'asse immaginario si determinano utilizzando il criterio di Routh. Equazione caratteristica:

$$1 + K\frac{(s+4)^2}{s(s+2)(s-2)} = 0 \quad \rightarrow \quad s^3 + Ks^2 + (8K-4)s + 16K = 0$$

La tabella di Routh ha la seguente struttura:

$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & (8K-4) \\ 2 & K & 16K \\ 1 & K(8K-4)-16K & \\ 0 & 16K & \end{array}$$

Dalla tabella si ricavano i seguenti vincoli:

$$(8K-20)K > 0, \qquad\qquad K > 0$$

dai quali si ottiene che il sistema retroazionato è asintoticamente stabile per:

$$K > \frac{5}{2} = 2.5 = K^*.$$

La pulsazione ω^* corrispondente al valore limite K^* è:

$$\omega^* = \sqrt{14} = 4.$$

a.2) Posto $K = 8$ nel sistema retroazionato sopra definito, tracciare qualitativamente il contorno delle radici del sistema retroazionato al variare del parametro $\alpha > 0$. Nella graficazione del contorno delle radici si tenga conto che nei punti $p_1 \simeq -5.48$ e $p_2 \simeq -7.72$ sono presenti due punti di diramazione del contorno delle radici. Il calcolo di α^* non è necessario. Determinare la posizione degli altri punti di diramazione "solo in modo qualitativo".

Sol. Posto $K = 8$, l'equazione caratteristica del sistema retroazionato è la seguente:

$$1 + \frac{8(s+4)^2}{s(\alpha s+2)(s-2)} = 0 \qquad \rightarrow \qquad s(\alpha s+2)(s-2) + 8(s+4)^2 = 0$$

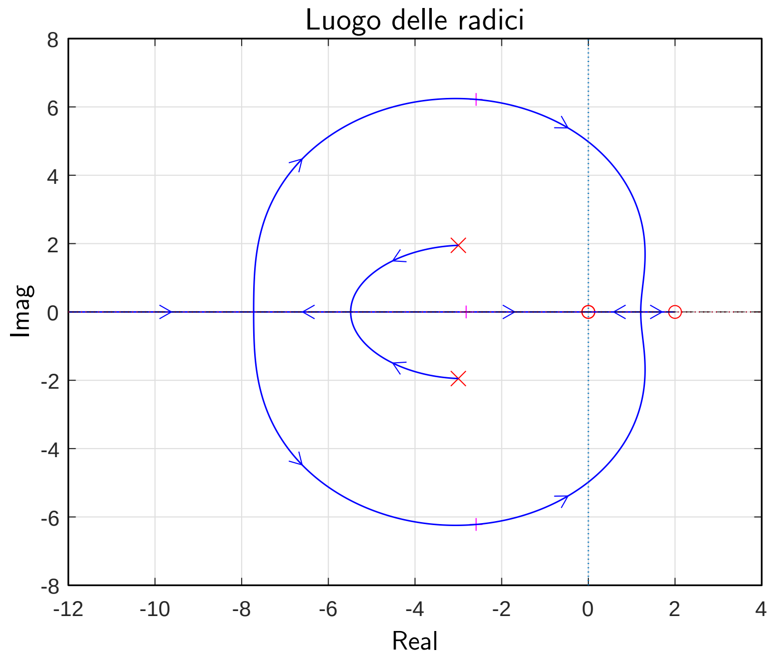
da cui si ricava l'equazione caratteristica $1 + \alpha\, G_2(s) = 0$:

$$2s(s-2) + 8(s+4)^2 + \alpha s^2(s-2) = 0 \qquad \rightarrow \qquad 1 + \frac{\alpha s^2(s-2)}{10(s^2+6s+12.8)} = 0$$

Mettendo in evidenza i poli della funzione $G_2(s)$ si ottiene:

$$1 + \alpha\, G_s(2) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad 1 + \frac{\alpha s^2(s-2)}{10[(s+3)^2 + 1.949^2]} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $\alpha > 0$ è il seguente:



Il contorno delle radici ha un solo asintoto coincidente con il semiasse reale negativo e percorso dall'infinito al finito.

a.3) Sia data la seguente funzione di trasferimento $G_3(s)$ che descrive il legame tra la tensione in ingresso $V(s)$ e la velocità angolare in uscita $\omega(s)$ di un motore elettrico in corrente continua:

$$G_3(s) = \frac{\omega(s)}{V(s)} = \frac{K_e}{(R + L\,s)(b + J\,s) + K_e^2}$$

Posto $J = 1$, $L = 1$, $K_e = 4$ e $R = 4$, mostrare graficamente come si muovono sul piano complesso i poli della funzione $G_3(s)$ al variare del parametro $b > 0$. Calcolare il valore b^* a cui corrisponde il minimo tempo di assestamento del sistema $G_3(s)$ alla risposta al gradino.

Soluzione. I poli della funzione di trasferimento $G_3(s)$ coincidono con le radici del polinomio a denominatore:

$$(R + L\,s)(b + J\,s) + K_e^2 = 0$$

Posto $J = 1$, $L = 1$, $K_e = 4$, e $R = 4$ si ottiene la seguente equazione:

$$(4 + s)(b + s) + 16 = 0$$

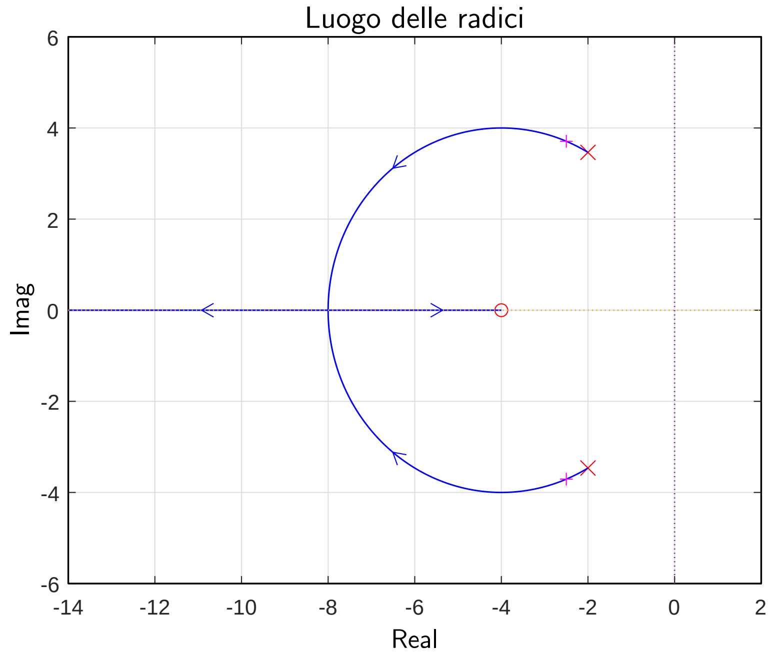
che, in modo equivalente, può essere riscritta nel seguente modo:

$$s^2 + 4s + 16 + b(s + 4) = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + b\,\frac{(s + 4)}{s^2 + 4s + 16} = 0 \quad \leftrightarrow \quad 1 + b\,G_4(s) = 0.$$

Mettendo in evidenza i poli della funzione $G_4(s)$ si ottiene:

$$1 + b\,\frac{(s + 4)}{(s + 2)^2 + 3.464^2} = 0$$

Il contorno delle radici al variare del parametro $b > 0$ è il seguente:



In questo caso il contorno delle radici si muove lungo una circonferenza centrata in $z = -4$. Il raggio R della circonferenza è:

$$R = \sqrt{2^2 + 3.464^2} = \sqrt{16} = 4$$

I punto di diramazione σ_1 del contorno delle radici è:

$$\sigma_1 = -4 - 4 = -8.$$

I punto di diramazione σ_1 poteva essere calcolato anche nel seguente modo:

$$\frac{dG_4(s)}{ds} = 0 \quad \rightarrow \quad (2s+4)(s+4)-(s^2+4s+16) = s^2+8s = 0 \quad \rightarrow \quad \sigma_1 = -8, \;\; \sigma_2 = 0.$$

La condizione di minimo tempo di assestamento del sistema $G_1(s)$ alla risposta al gradino si ha in corrispondenza del punto di diramazione $\sigma_1 = -8$ e quindi in corrispondenza del seguente valore del parametro b^*:

$$b^* = -\left.\frac{1}{G_4(s)}\right|_{s=\sigma_1} = -\left.\frac{s^2+4s+16}{s+4}\right|_{s=-8} = 12.$$