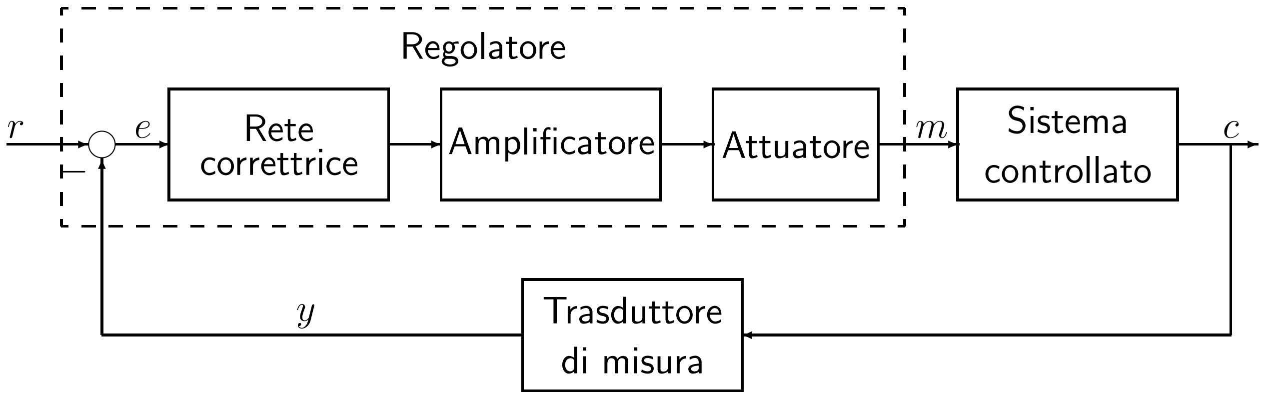
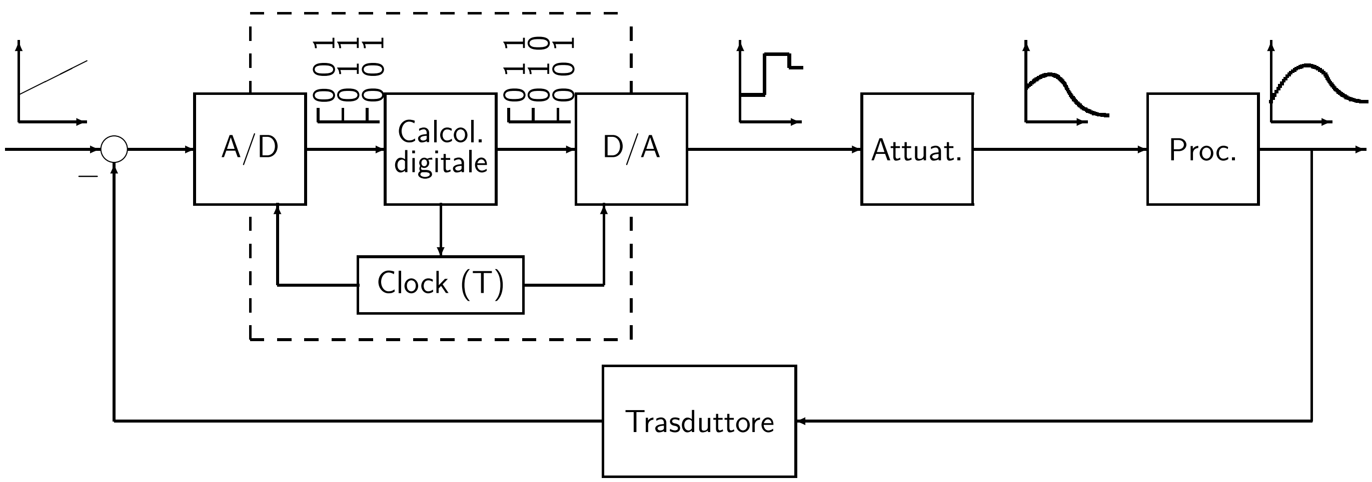
CONTROLLO DIGITALE

- SISTEMA DI CONTROLLO ANALOGICO:



- SISTEMA DI CONTROLLO DIGITALE:

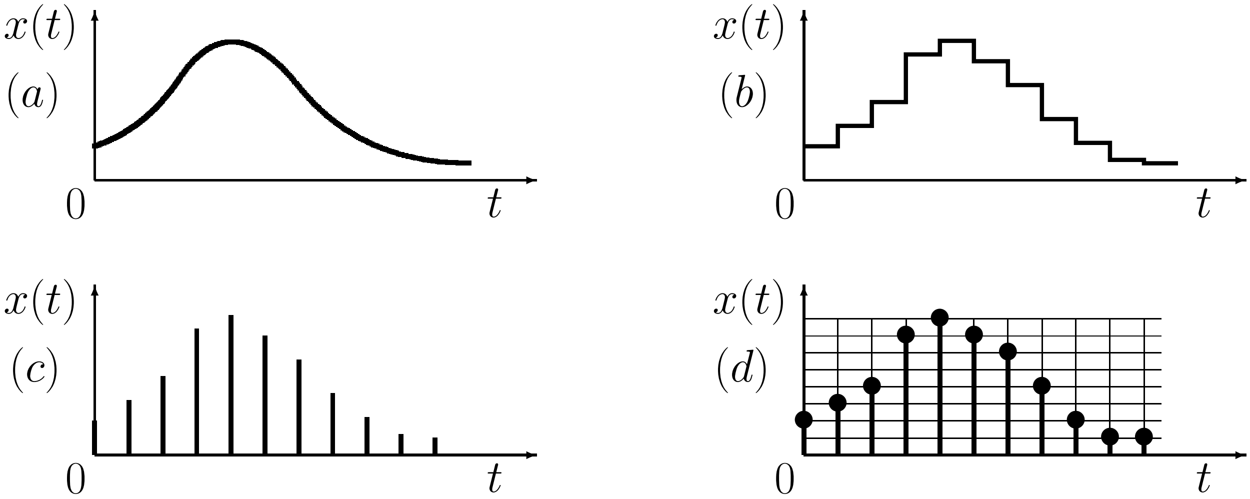


CONTROLLO DIGITALE: vantaggi e svantaggi:

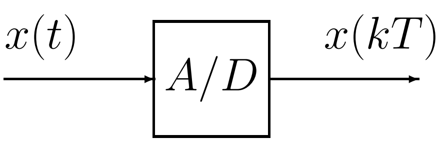
Vantaggi: Maggiore capacità e precisione di elaborazione. Maggiore flessibilità. Maggiore affidabilità e ripetibilità. Maggiore trasmissibilità dei segnali.

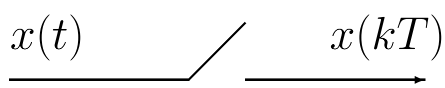
Svantaggi: Progettazione più difficile e articolata. Stabilizzabilità più precaria. Possibilità di arresti non previsti. Necessità di utilizzare energia elettrica.

SEGNALI DI INTERESSE: a) Analogico di tipo continuo; b) Tempo-continuo quantizzato; c) A dati campionati; d) Digitale ;

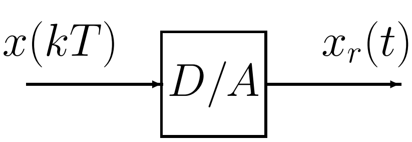


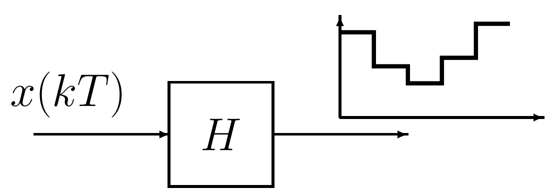
- <u>A/D: convertitore Analogico/Digitale</u>





- <u>D/A, convertitore Digitale/Analogico</u>





- Ricostruttore di ordine zero:

$$\boxed{G_r(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}}$$

- I sistemi discreti vengono descritti utilizzando le equazioni alle differenze.
- Equazioni alle differenze. Sono legami statici che legano i valori attuali (all'istante k) e passati (negli istanti $k-1$, $k-2$, ecc.) dell'ingresso e_k e dell'uscita y_k:

$$y_k = f(e_0, e_1, \ldots, e_k; y_0, y_1, \ldots, y_{k-1})$$

L'equazione alle differenze è lineare se $f(\cdot)$ è lineare:

$$y_k = -a_1 y_{k-1} - \ldots - a_n y_{k-n} + b_0 e_k + \ldots + b_m e_{k-m}$$

- La soluzione di un'equazione alle differenze è data dalla somma della "risposta libera" (ingresso nullo e condizioni iniziali non nulle) e della "risposta forzata" (condizioni iniziali nulle ed ingresso diverso da zero) del sistema:

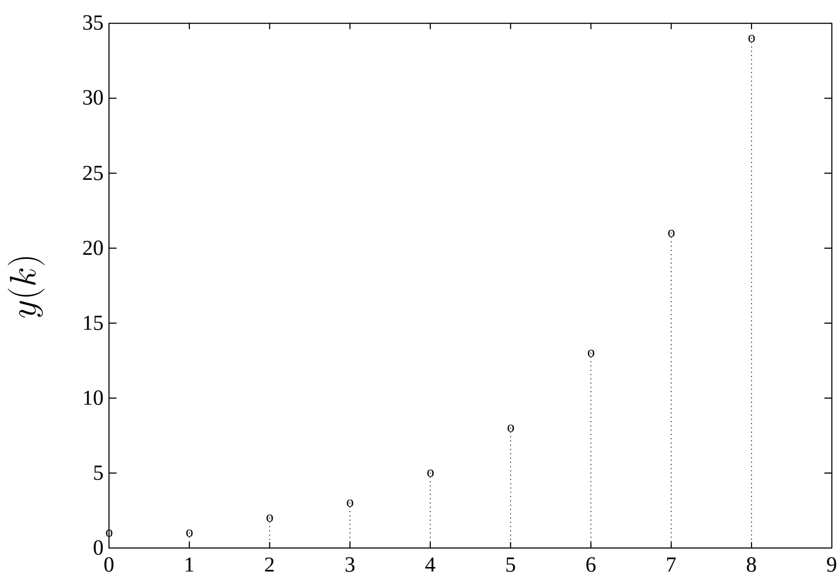
$$y_k = y_k^l + y_k^f$$

Per determinare la risposta libera occorrono tante condizioni iniziali quant'è l'ordine dell'equazione alle differenze.

- Esempio di soluzione recursiva di un'equazione alle differenze:

$$y_k = y_{k-1} + y_{k-2} \qquad k \geq 2$$

Successione di Fibonacci con condizioni iniziali: $y_0 = y_1 = 1$.



- Per risolvere le equazioni alle differenze si può utilizzare il metodo della $\mathcal{Z}$-trasformata.

$\mathcal{Z}$-trasformata

- Sia data una sequenza di valori $x_k \in \mathbb{R}$, definita per $k = 0, 1, 2, \ldots$ e nulla per $k < 0$. La $\mathcal{Z}$-trasformata (unilatera) della sequenza x_k è la funzione di variabile complessa z definita come

$$\boxed{X(z) = \mathcal{Z}[x_k] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, z^{-k} = x_0 + x_1\, z^{-1} + \cdots + x_k\, z^{-k} + \cdots}$$

- La $\mathcal{Z}$-trasformata crea una corrispondenza biunivoca tra la sequenza discreta x_k e la funzione complessa $X(z)$:

$$x_k \qquad \Leftrightarrow \qquad X(z)$$

  La sequenza x_k soddisfa sempre la seguente condizione: $x_k = 0$ for $k < 0$.

- Nel caso in cui la sequenza di valori x_k sia ottenuta campionando uniformemente con periodo T un segnale continuo descritto dalla funzione $x(t)$, $t \geq 0$, si avrà che $x_k = x(kT)$: Per indicare che una sequenza è stata ottenuta per campionamento di un segnale tempo continuo, spesso si usa la seguente notazione:

$$X(z) = \mathcal{Z}[X(s)]$$

  intendendo:

$$X(z) = \mathcal{Z}\big[\big\{\mathcal{L}^{-1}[X(s)]\big|_{t=kT}\big\}\big]$$

- Nelle applicazioni ingegneristiche la funzione $X(z)$ assume in generale una espressione razionale fratta del tipo:

$$X(z) = \frac{b_0\, z^m + b_1\, z^{m-1} + \cdots + b_m}{z^n + a_1\, z^{n-1} + \cdots + a_n}$$

  che si può esprimere anche in potenze di z^{-1}:

$$X(z) = \frac{b_0\, z^{-(n-m)} + b_1\, z^{-(n-m+1)} + \cdots + b_m\, z^{-n}}{1 + a_1\, z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

- Esempio:

$$X(z) = \frac{z(z+0.5)}{(z+1)(z+2)} = \frac{1 + 0.5\, z^{-1}}{(1 + z^{-1})(1 + 2\, z^{-1})}$$

La $\mathcal{Z}$-trasformata di alcuni segnali di base

- Impulso discreto unitario, detta anche funzione di Kronecker $\delta_0(t)$:

$$x(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad X(z) = 1$$

- Gradino unitario:

$$x(k) = \begin{cases} 1 & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & k < 0 \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad X(z) = \frac{z}{z-1}$$

- Rampa unitaria:

$$x(k) = \begin{cases} k & k \geq 0 \\ 0 & k < 0 \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}$$

- Funzione potenza a^k:

$$x(k) = \begin{cases} a^k & k = 0, 1, 2, \ldots \\ 0 & k < 0 \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad X(z) = \frac{z}{z-a}$$

- Funzione sinusoidale:

$$x(k) = \begin{cases} \sin(\omega k T) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad X(z) = \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

- Funzione cosinusoidale:

$$x(k) = \begin{cases} \cos(\omega k T) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad \leftrightarrow \qquad X(z) = \frac{z(z - \cos \omega T)}{z^2 - 2z \cos \omega T + 1}$$

Trasformata s e trasformata z: confronto

Trasformata di Laplace: $$X(s) = \int_0^\infty x(t)\, e^{-st}\, dt$$	$\mathcal{Z}$-Trasformata: $$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k\, z^{-k}$$
Risolve equazioni differenziali: $$\dot{y}(t) + a\, y(t) = b\, x(t)$$	Risolve equazioni alle differenze: $$y_{k+1} + a\, y_k = b\, x_k$$
Funzione di trasferimento $G(s)$: $$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{b}{s+a}$$	Funzione di trasferimento $G(z)$: $$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b}{z+a}$$

Trasformate $X(s)$ di segnali $x(t)$:

$x(t)$	$X(s)$	polo s	ν
$\delta(t)$	1		
1	$\frac{1}{s}$	0	1
t	$\frac{1}{s^2}$	0	2
$e^{b\,t}$	$\frac{1}{s-b}$	b	1

Trasformate $X(z)$ di segnali x_k:

x_k	$X(z)$	polo $z = e^{sT}$	ν
$\delta(k)$	1		
1	$\frac{z}{z-1}$	1	1
k	$\frac{z}{(z-1)^2}$	1	2
a^k	$\frac{z}{(z-a)}$	$a = e^{bT}$	1

PROPRIETÀ E TEOREMI DELLA $\mathcal{Z}$-TRASFORMATA

- Linearità. Dato il segnale $x(k) = a\, f(k) + b\, g(k)$.

$$\boxed{X(z) = a\, F(z) + b\, G(z)}$$

- Moltiplicazione per a^k. Sia $X(z)$ la $\mathcal{Z}$-trasformata di $x(k)$ e a una costante.

$$\boxed{\mathcal{Z}\left[a^k x(k)\right] = X(a^{-1}z)}$$

- Teorema della traslazione nel tempo. Sia $x(k) = 0$ per $k < 0$, $X(z) = \mathcal{Z}[x(k)]$ e $n = 1, 2, \ldots$, allora:

$$\boxed{\mathcal{Z}[x(k-n)] = z^{-n}X(z)} \qquad \text{(ritardo)}$$

$$\boxed{\mathcal{Z}[x(k+n)] = z^n \left[X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)z^{-k}\right]} \qquad \text{(anticipo)}$$

- Teorema del valore iniziale. Sia $X(z)$ la $\mathcal{Z}$-trasformata di $x(k)$. Se esiste il $\lim\limits_{z\to\infty} X(z)$, allora il valore iniziale $x(0)$ di $x(k)$ è dato da:

$$\boxed{x(0) = x(k)|_{k=0} = \lim_{z\to\infty} X(z)}$$

- Teorema del valore finale. Siano tutti i poli di $X(z)$ all'interno del cerchio unitario, con al più un polo semplice per $z = 1$.

$$\boxed{\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1} \left[(1 - z^{-1})X(z)\right]}$$

Discretizzazione di segnali tempo continui

- Gradino unitario:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s}\right] = \mathcal{Z}[h(t)|_{t=kT}] = \frac{z}{z-1}$$

- Rampa unitaria:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s^2}\right] = \mathcal{Z}[t|_{t=kT}] = \mathcal{Z}[k\,T] = T\frac{z}{(z-1)^2}$$

- Funzione esponenziale:

$$\mathcal{Z}\left[\frac{1}{s+b}\right] = \mathcal{Z}\left[e^{-b\,t}\big|_{t=kT}\right] = \mathcal{Z}\left[e^{-b\,k\,T}\right] = \mathcal{Z}\left[(e^{-b\,T})^k\right] = \frac{z}{z-e^{-b\,T}}$$

- Esempio: Si consideri il segnale descritto da

$$X(z) = \frac{T z(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)}$$

Il valore iniziale della sequenza $x(kT)$ è quindi dato da

$$x(0) = \lim_{k\to 0} x(k) = \lim_{z\to\infty} \frac{T z(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)} = \frac{T}{2}$$

Il valore finale della sequenza $x(kT)$ è quindi dato da

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} x(k) &= \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{T z(z+1)}{2(z-0.5)(z-1)}\\ &= \lim_{z\to 1}\frac{T(z+1)}{2(z-0.5)}\\ &= 2T\end{aligned}$$

$\mathcal{Z}$ Trasformata inversa

- Esistono diversi metodi per antitrasformare una funzione $X(z)$. Tra questi il più semplice è il "Metodo della scomposizione in fratti semplici":

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \cdots + b_{m-1} z + b_m}{(z-p_1)(z-p_2)\cdots(z-p_n)}$$

- Caso 1. Se tutti i poli sono semplici, $X(z)$ può essere riscritta come segue:

$$X(z) = \frac{\bar{c}_1}{z-p_1} + \frac{\bar{c}_2}{z-p_2} + \cdots + \frac{\bar{c}_n}{z-p_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{c}_i}{z-p_i}$$

dove i coefficienti $\bar{c}_i$ vengono calcolati utilizzando la regola dei "residui":

$$\bar{c}_i = \Big[(z-p_i)X(z)\Big]_{z=p_i}$$

- Antitrasformando si ottiene:

$$X(z) = z^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{\bar{c}_i\, z}{z-p_i} \qquad \Leftrightarrow \qquad x(k) = \begin{cases} 0 & k=0 \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \bar{c}_i\, p_i^{k-1} & k \geq 1 \end{cases}$$

- Se nell'espressione di $X(z)$ compare almeno uno zero nell'origine, è opportuno scomporre in fratti semplici la funzione $X(z)/z$:

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{c_1}{z-p_1} + \cdots + \frac{c_n}{z-p_n} \qquad c_i = \left[(z-p_i)\frac{X(z)}{z}\right]_{z=p_i}$$

- In questo caso, antitrasformando si ottiene:

$$X(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i\, z}{z-p_i} \qquad \Rightarrow \qquad x(k) = \sum_{i=1}^{n} c_i\, p_i^k$$

- Il caso di funzione $X(z)$ con poli multipli non viene preso in considerazione in questa breve trattazione.

Esempio. Si calcoli la soluzione $c(n)$ della seguente equazione alle differenze:

$$c(n+1) = c(n) + i\, c(n)$$

partendo dalla condizione iniziale $c(0) = c_0$. Tale equazione può essere interpretata come legge di capitalizzazione di un capitale iniziale c_0 al tasso di interesse i.

[Soluzione.] Applicando la Z-trasformata all'equazione precedente si ottiene

$$z\, C(z) - z\, c_0 = (i+1) C(z) \qquad \to \qquad [z - (1+i)] C(z) = z\, c_0$$

da cui

$$C(z) = \frac{z\, c_0}{z - (1+i)} \qquad \to \qquad c(n) = c_0 (1+i)^n$$

Esempio. Determinare l'espressione analitica della sequenza di Fibonacci descritta dalla seguente equazione alle differenze

$$y(n+2) = y(n+1) + y(n)$$

a partire dalle condizioni iniziali $y(0) = y(1) = 1$.

[Soluzione.] Applicando il metodo della Z-trasformata

$$z^2 [Y(z) - y(0) - y(1)\, z^{-1}] = z[Y(z) - y(0)] + Y(z)$$

si ottiene

$$Y(z) = \frac{z[zy(0) + y(1) - y(0)]}{z^2 - z - 1}$$

Imponendo le condizioni iniziali $y(0) = y(1) = 1$ si ottiene

$$Y(z) = \frac{z^2}{z^2 - z - 1} = z \left[\frac{z}{(z-a)(z-b)} \right] = z \left[\frac{k_1}{(z-a)} + \frac{k_2}{(z-b)} \right] = \frac{1}{a-b} \left[\frac{a\, z}{(z-a)} - \frac{b\, z}{(z-b)} \right]$$

dove a e b sono le radici della funzione $Y(z)$

$$a = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \qquad b = \frac{1-\sqrt{5}}{2}, \qquad k_1 = \frac{a}{a-b}, \qquad k_2 = -\frac{b}{a-b}.$$

Antitrasformando si ottiene

$$y(n) = \frac{1}{a-b} [a\, a^n - b\, b^n] = \frac{1}{a-b} \left[a^{n+1} - b^{n+1} \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]$$

Esempio. Calcolare la risposta all'impulso $g(n)$ del seguente sistema dinamico discreto

$$G(z) = \frac{z(z+1)}{(z-0.8)(z+0.5)}$$

[Soluzione.] Per calcolare la risposta all'impulso $g(n)$ del sistema $G(z)$ si procede utilizzando il metodo della scomposizione in fratti semplici

$$\frac{G(z)}{z} = \frac{(z+1)}{(z-0.8)(z+0.5)} = \frac{1.8}{1.3}\frac{1}{(z-0.8)} - \frac{0.5}{1.3}\frac{1}{(z+0.5)}$$

da cui

$$G(z) = 1.3846\frac{z}{(z-0.8)} - 0.3846\frac{z}{(z+0.5)}$$

Antitrasformando si ottiene:

$$g(n) = 1.3846(0.8)^n - 0.3846(-0.5)^n$$

Il sistema discreto $G(z)$ è stabile.

Esempio. Determinare la risposta $y(n)$ al gradino unitario $u(n) = 1$ del seguente sistema dinamico discreto

$$y(n-1) = 0.5\, y(n) + u(n+1)$$

partendo da condizione iniziale nulla $y(0) = 0$.

[Soluzione.] La funzione di trasferimento discreta $G(z)$ associata all'equazione alle differenze assegnata è la seguente:

$$G(z) = \frac{z}{z-0.5}$$

La Z-trasformata del segnale di ingresso $u(n) = 1$ è:

$$U(z) = \frac{z}{z-1}$$

Quindi, la Z-trasformata del segnale di uscita $y(n)$ è

$$Y(z) = G(z)U(z) = \frac{z}{(z-0.5)}\,\frac{z}{(z-1)} = \frac{z^2}{(z-0.5)(z-1)}$$

Operando la scomposizione in fratti semplici della funzione $Y(z)/z$ si ottiene

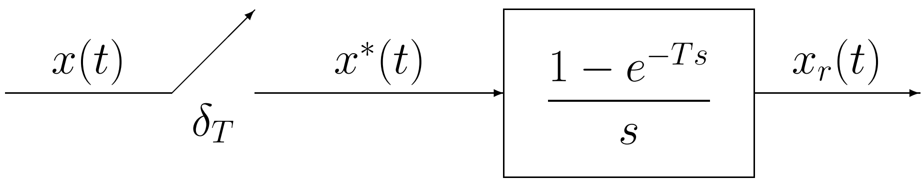
$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{z-1} - \frac{1}{z-0.5}$$

da cui si ricava $y(n)$

$$Y(z) = \frac{2\,z}{z-1} - \frac{z}{z-0.5} \qquad \rightarrow \qquad y(n) = 2 - 0.5^n$$

- CAMPIONAMENTO E RICOSTRUZIONE

- Da un punto di vista teorico il problema del campionamento $x^*(t)$ e della ricostruzione $x_r(t)$ di un segnale temporale $x(t)$ puó essere descritto graficamente nel seguente modo:



- Campionamento impulsivo:

$$x^*(t) = x(t)\delta_T(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\delta(t-kT) \quad \leftrightarrow \quad X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

- Legame teorico che lega la variabile s della trasformata di Laplace alla variabile z della $\mathcal{Z}$-trasformata:

$$\boxed{z = e^{sT}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{s = \frac{1}{T}\ln z}$$

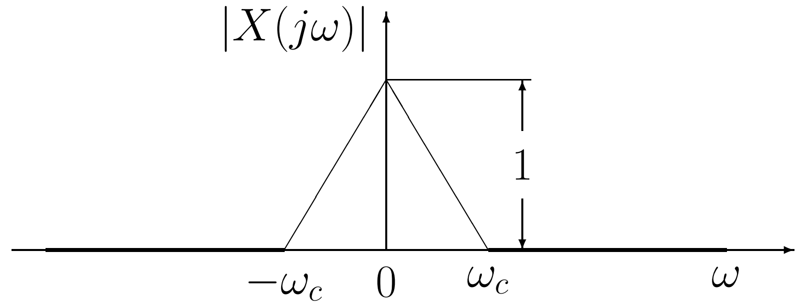
- La trasformata $\mathcal{Z}$ di una sequenza di valori $x(kT)$ é in corrispondenza biunivoca con la trasformata di Laplace della sequenza $x^*(t)$ di impulsi di Dirac δ_T di area pari ai valori $x(kT)$:

$$X^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k} = X(z)$$

- La trasformata $X_r(s)$ del segnale ricostruito $x_r(t)$ puó essere calcolato in modo esatto nel seguente modo:

$$X_r(s) = H_0(s)\, X^*(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} X^*(s)$$

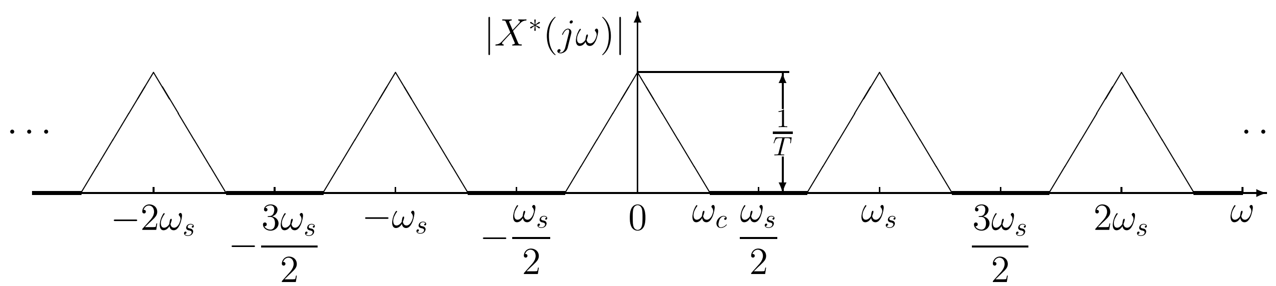
- Sia dato un segnale $x(t)$ caratterizzato dal seguente andamento spettrale:



- L'andamento spettrale del corrispondente segnale campionato $x^*(t)$ puó essere espresso nel seguente modo:

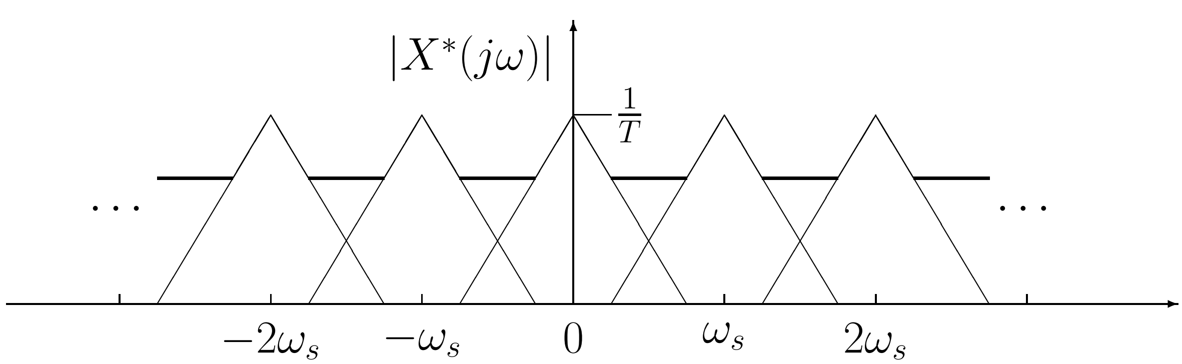
$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T}\sum_{n=-\infty}^{\infty} X(j\omega - j\,n\omega_s), \qquad \omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

a cui corrisponde la seguente rappresentazione grafica:



- La condizione $\omega_s > 2\omega_c$, tipica del Teorema di Shannon, mantiene distinto lo spettro originario dalle componenti complementari per cui, mediante filtraggio, è possibile ricostruire completamente il segnale $x(t)$.

- Nel caso in cui la condizione $\omega_s > 2\omega_c$ non sia rispettata si ha sovrapposizione tra le varie bande spettrali e quindi si ha "perdita di informazione":



- Lo spettro originario è parzialmente sovrapposto alle componenti complementari contigue per cui mediante filtraggio non è più possibile ricavare il segnale originario a partire dal segnale campionato.

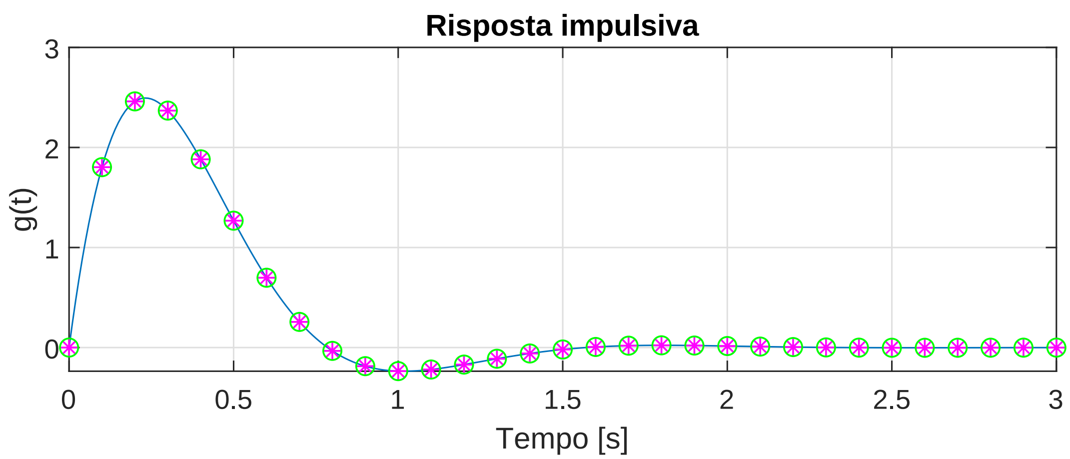
- Si consideri il seguente sistema del secondo ordine:

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 6\,s + 25}$$

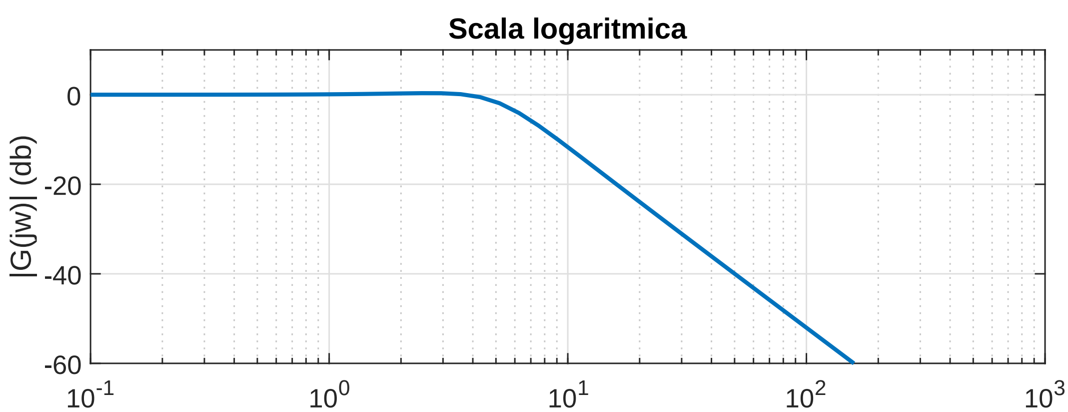
- Applicando la $\mathcal{Z}$-trasformata alla funzione $G(s)$ si ottiene la seguente funzione $G(z)$:

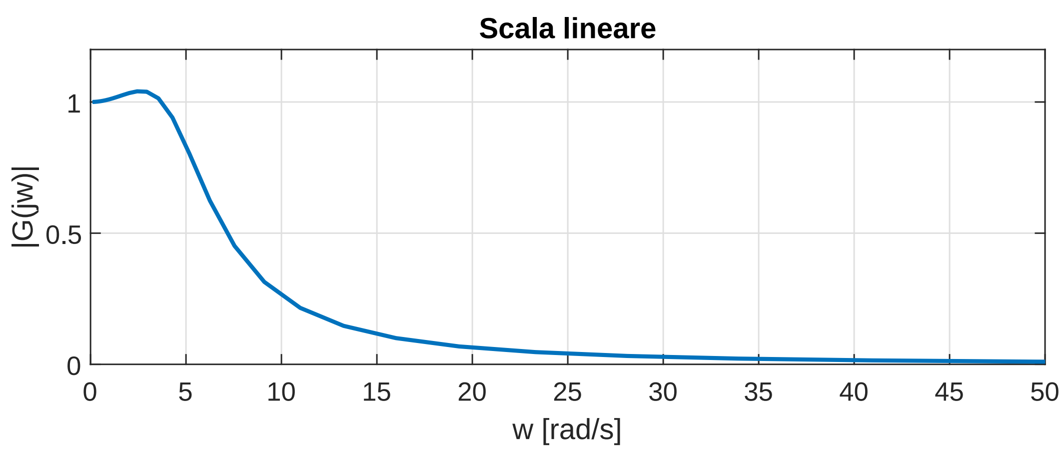
$$G(z) = \frac{25}{4} \frac{T\,e^{-3T}\sin(4T)\;z}{z^2 - 2e^{-3T}\cos(4T)\;z + e^{-6T}}$$

- Risposta impulsiva del sistema $G(s)$ e del sistema $G(z)$ con $T = 0.1$:



- Diagramma delle ampiezze di $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$:





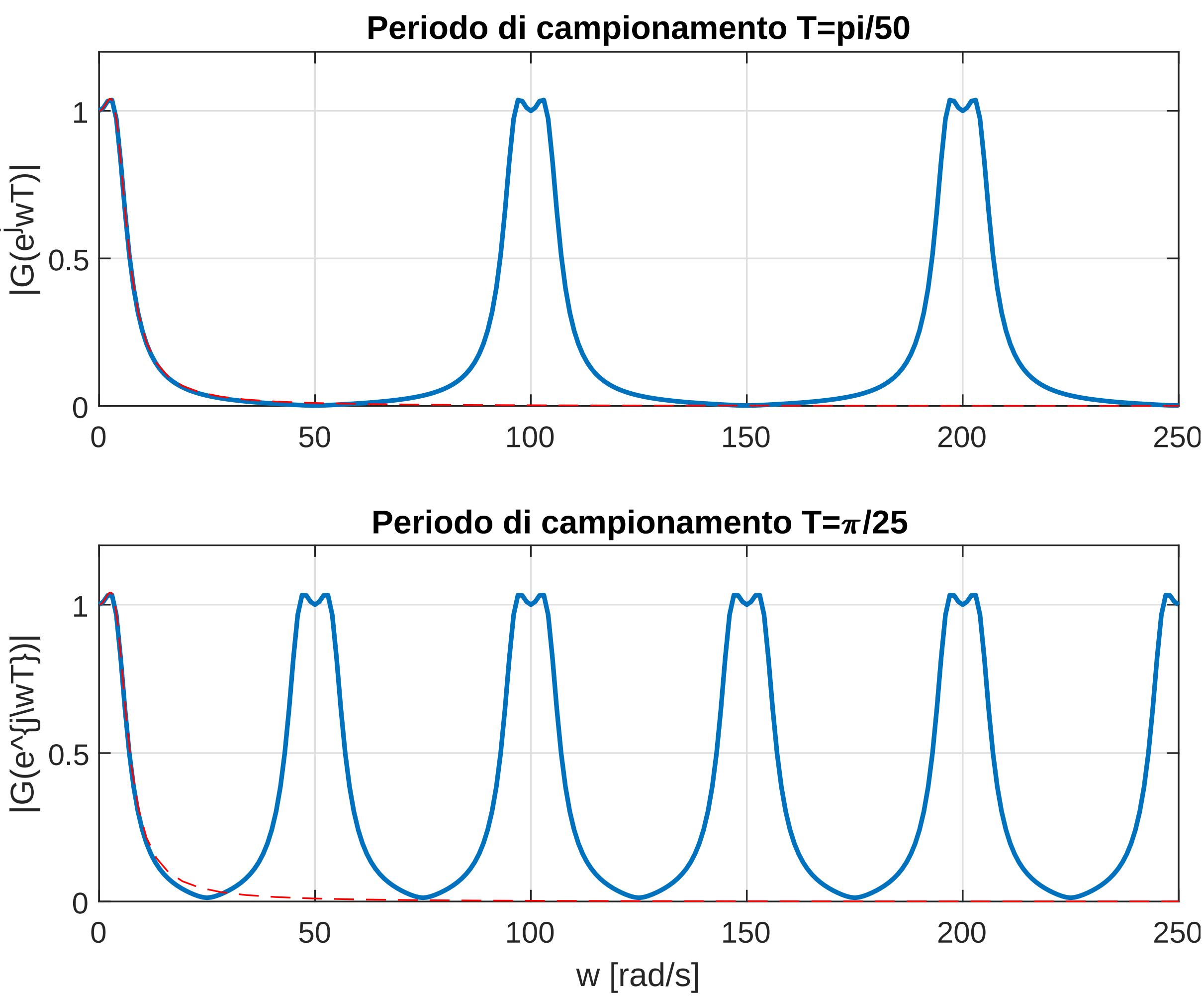
- Per $\omega > 10\,\omega_n = \bar{\omega} = 50$ rad/s, l'ampiezza di $G(j\omega)$ è inferiore ad un centesimo (-40 db) del guadagno statico.

- Lo spettro, pur essendo a banda teoricamente illimitata, risulta essere praticamente trascurabile per pulsazioni maggiori di $\bar{\omega} = 50$ rad/s.

- La risposta frequenziale di un sistema discreto $G(z)$ si ottiene nel seguente modo:

$$\boxed{G(e^{j\omega T}) = G(z)\big|_{z=e^{j\omega T}}} \qquad\qquad 0 \leq \omega \leq \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_s}{2}$$

- Andamento spettrale di $G(e^{j\omega T}) = G(z)\big|_{z=e^{j\omega T}}$ quando $T = \frac{\pi}{50}$ e $T = \frac{\pi}{25}$



Corrispondenza tra il piano s e il piano z.

- Le variabili complesse s e z sono legate dalla seguente relazione:

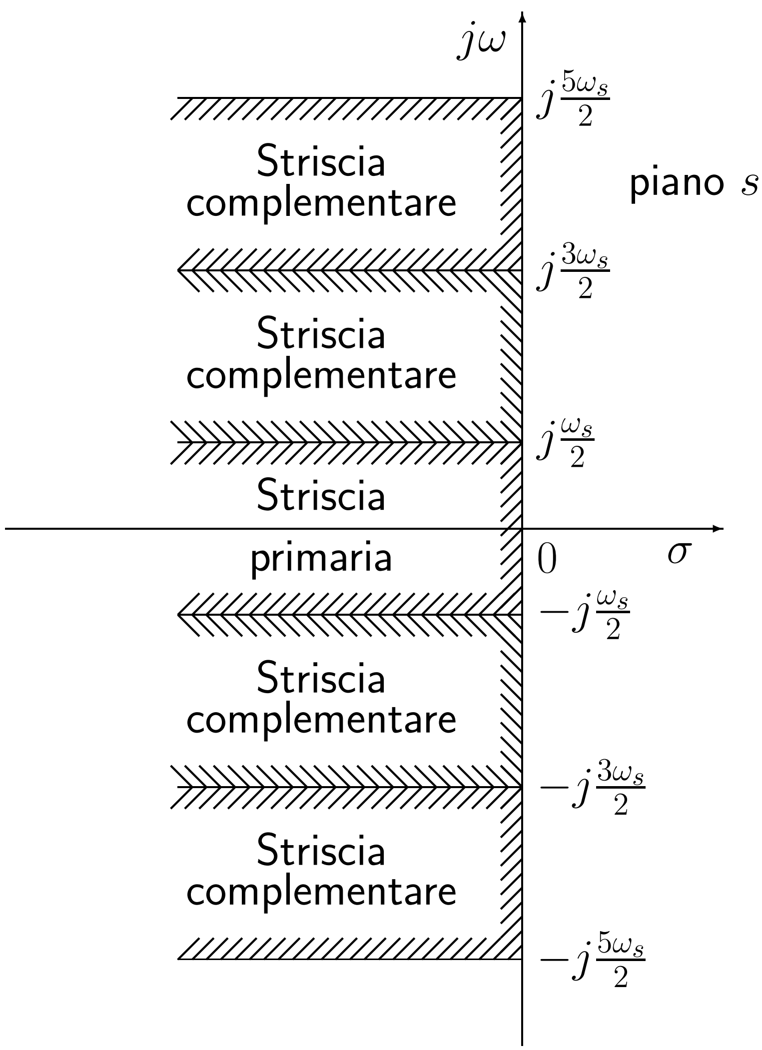
$$\boxed{z = e^{sT}}$$

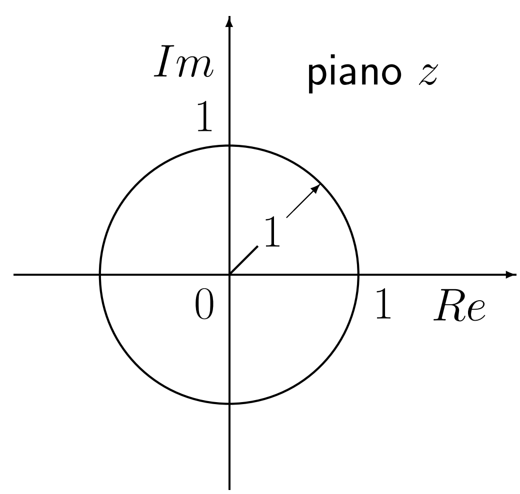
- Posto $s = \sigma + j\omega$ si ha:

$$z = e^{T(\sigma+j\omega)} = e^{T\sigma}e^{jT\omega} = e^{T\sigma}e^{jT(\omega+\frac{2k\pi}{T})}$$

- La funzione $z = e^{sT}$ NON é una "corrispondenza biunivoca" tra il piano s e il piano z.

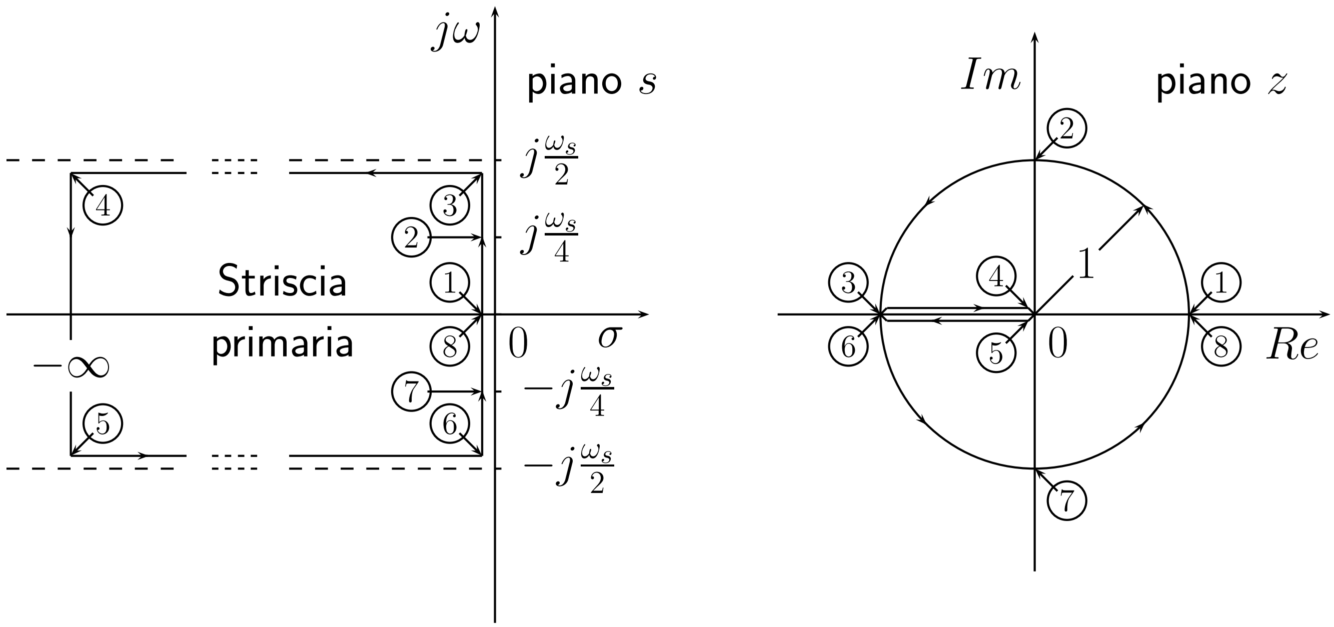
- Striscia primaria e strisce complementari:



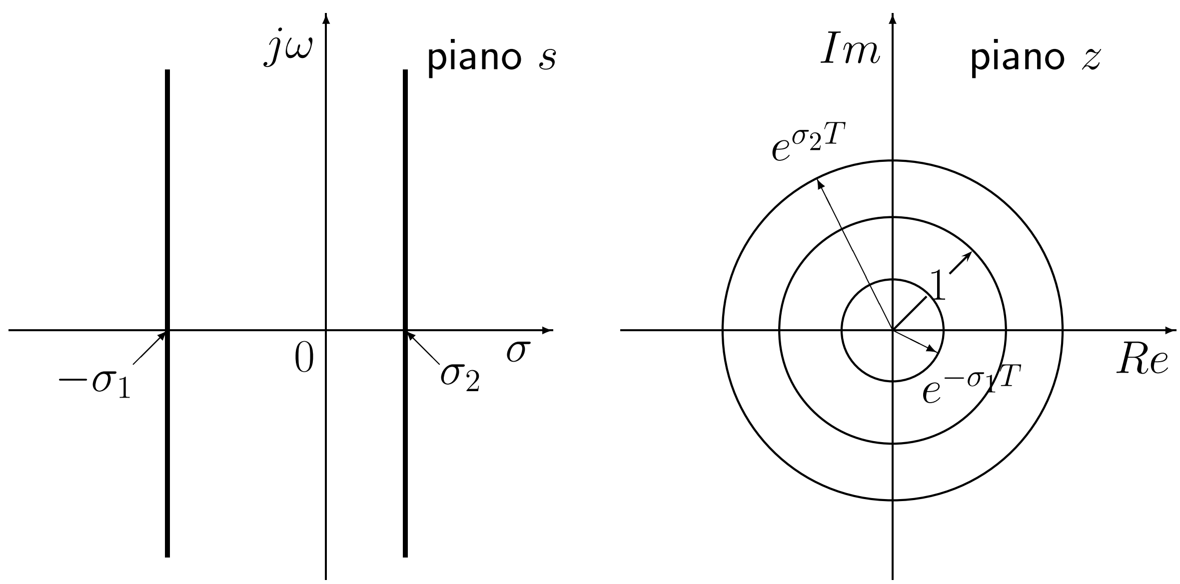


- Il piano z é in corrispondenza biunivoca con la Striscia primaria del piano s.

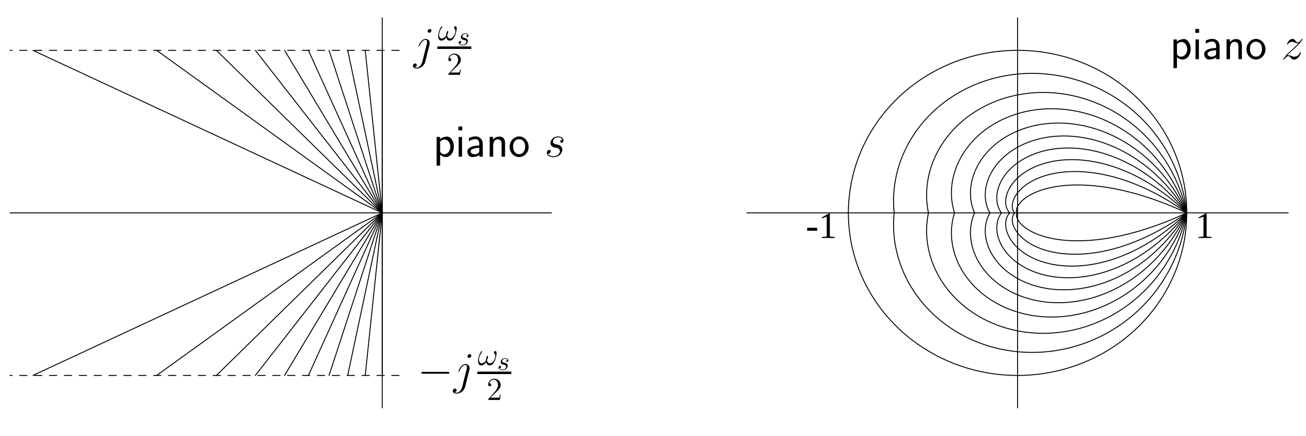
- Corrispondenza biunivoca tra striscia primaria e piano z:



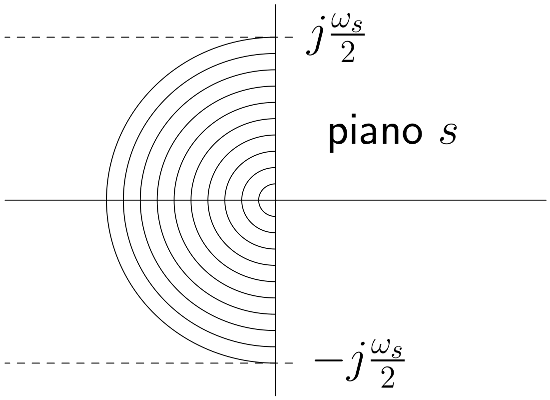
- Luoghi a decadimento esponenziale costante:

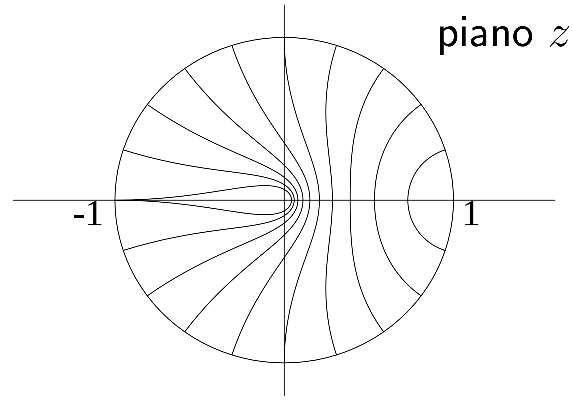


- Luoghi a coefficiente di smorzamento δ costante:

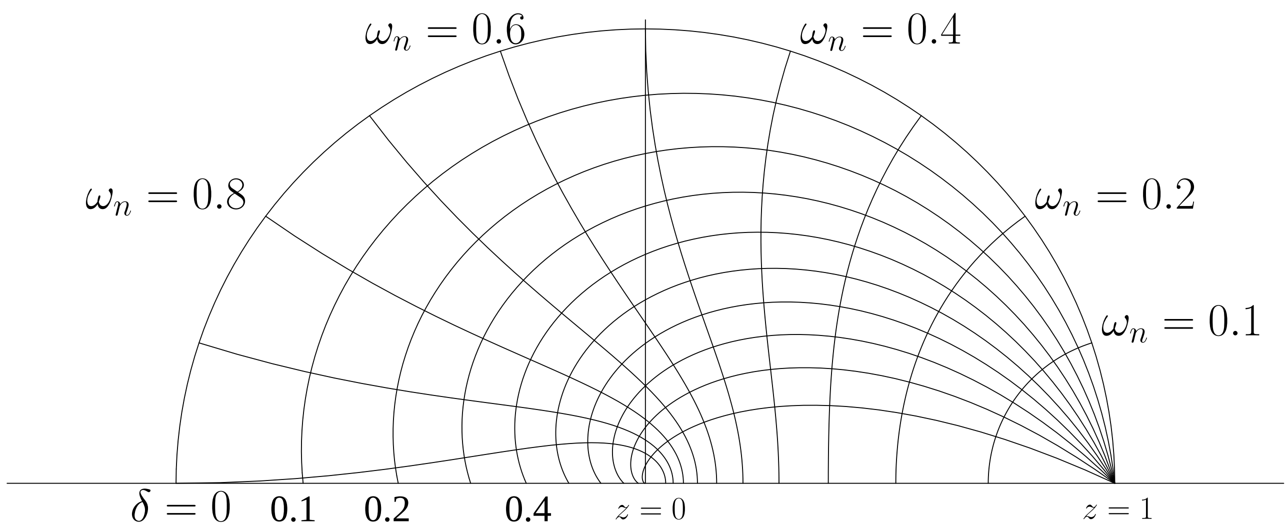


- Luoghi a pulsazione naturale ω_n costante:

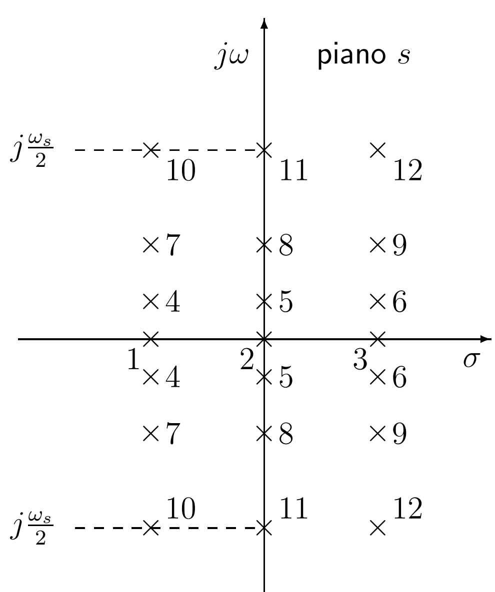


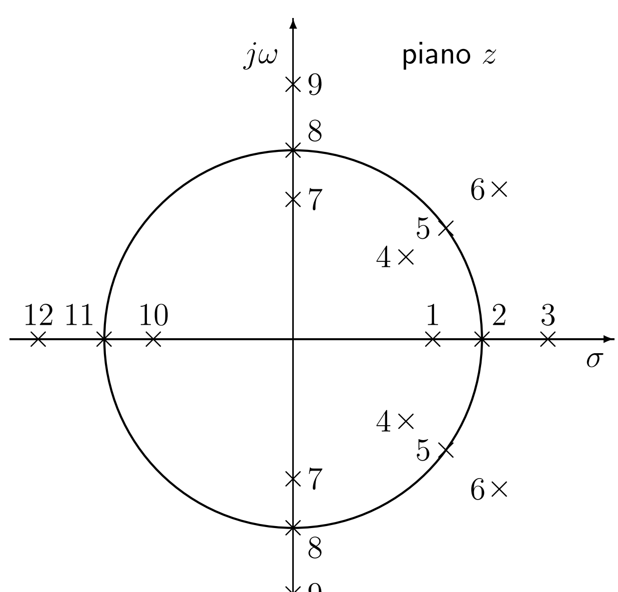


- Luoghi del piano z a δ e ω_n costanti:

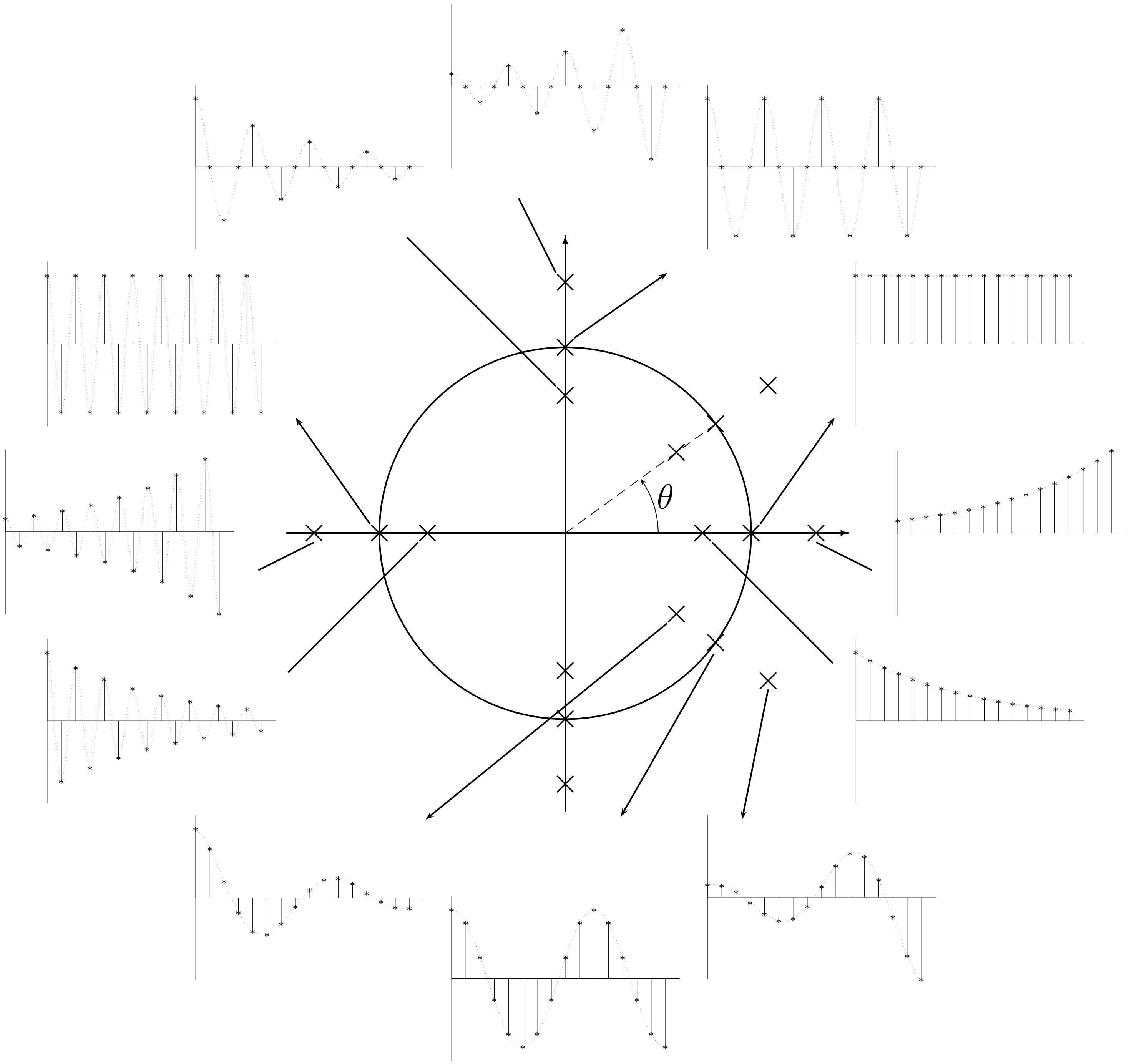


- I punti del piano s e del piano z, posti in corrispondenza per mezzo della relazione $z = e^{sT}$, mettono in corrispondenza i poli s_i di una funzione continua $F(s)$ con i poli z_i della corrispondente funzione trasformata $F(z)$.





POSIZIONE DEI POLI E RISPOSTE TRANSITORIE



- Numero N_p di campioni per periodo:

$$N_p = \frac{2\pi}{\theta}$$

Stabilità dei sistemi discreti

- Stabilità dei sistemi discreti:

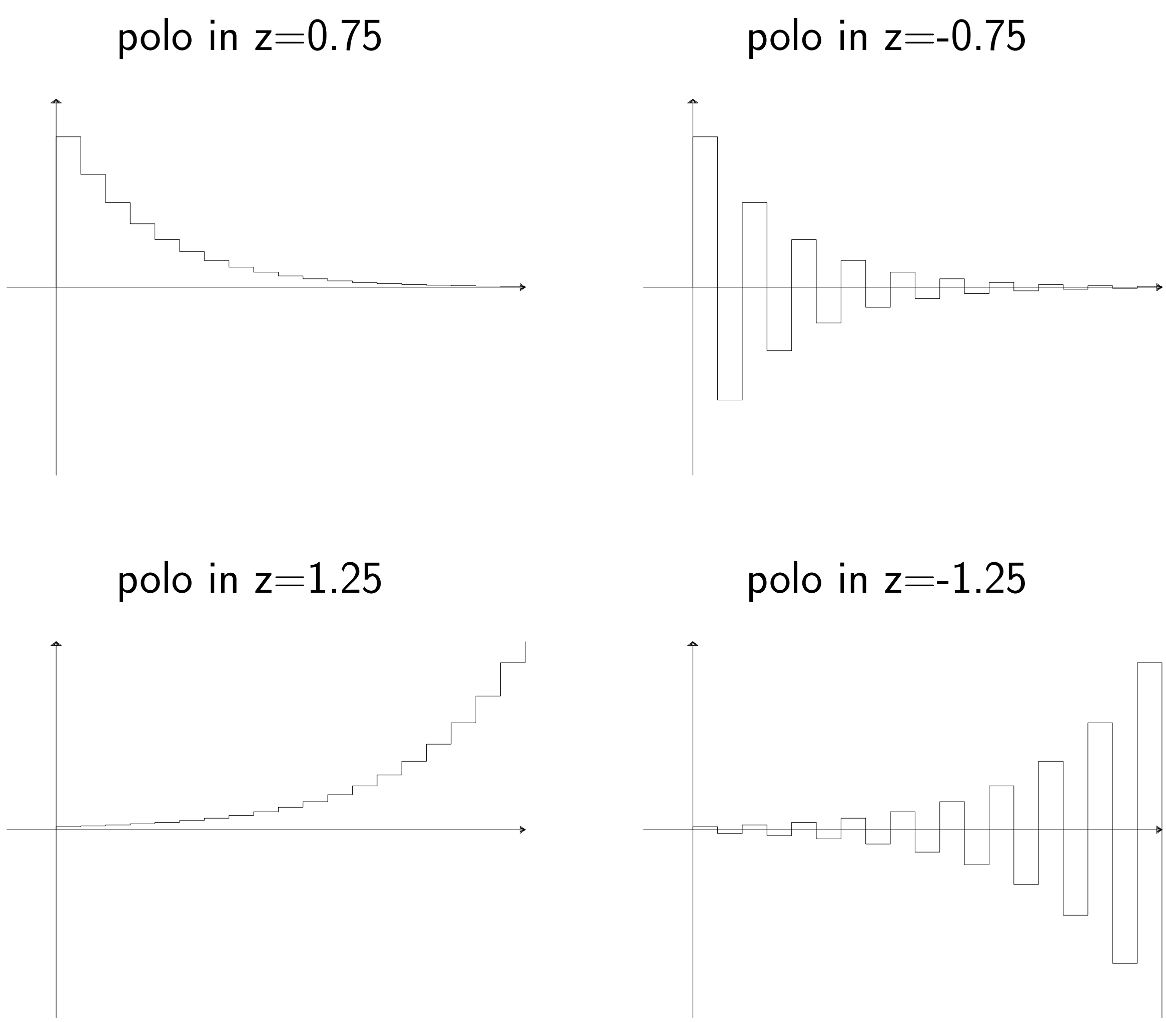
$$G(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

I poli della funzione $G(z)$ sono le radici del polinomio $A(z)$ a denominatore della funzione $G(z)$.

<u>Stabilità asintotica</u>: tutti i poli p_i della $G(z)$ devono essere interni al cerchio unitario: $|p_i| < 1$.

<u>Stabilità semplice</u>: tutti i poli p_i della $G(z)$ devono appartenere al disco unitario $(|p_i| \leq 1)$ e quelli che si trovano sul cerchio unitario $(|p_i| = 1)$ devono avere molteplicità unitaria.

- Andamenti temporali che si ottengono in corrispondenza dei valori $z = 0.75$, $z = -0.75$, $z = 1.25$ and $z = -1.25$:



- É possibile utilizzare il criterio di Nyquist anche per sistemi discreti.

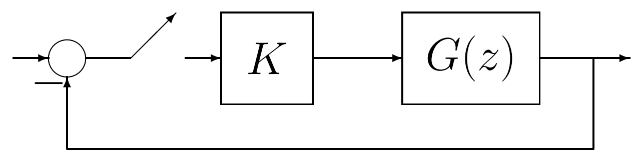
- Il criterio di Nyquist permette di decidere circa la stabilità di sistemi in retroazione analizzando il comportamento frequenziale della funzione di anello $G(z)$:

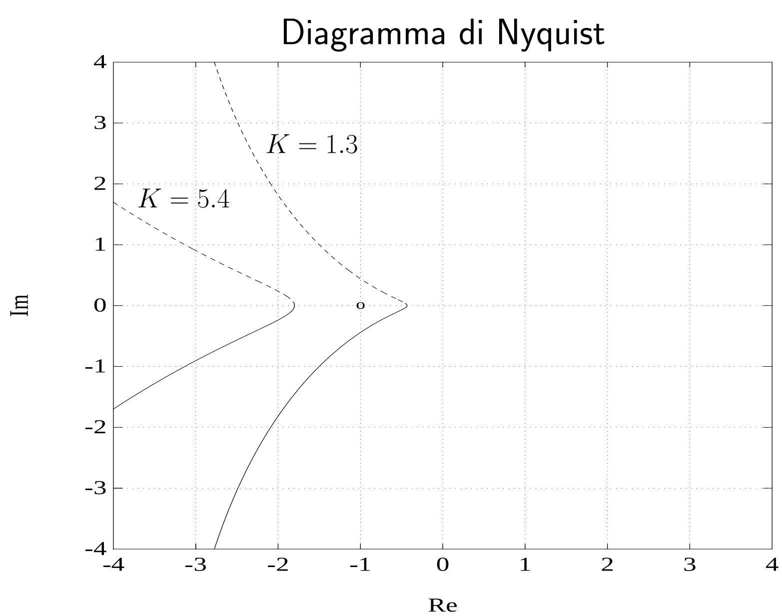
$$G(e^{j\omega T}) = G(z)\big|_{z=e^{j\omega T}} \qquad \text{per} \qquad -\frac{\pi}{T} \leq \omega \leq \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_s}{2}.$$

- Criterio di Nyquist I

  Sia data una funzione di guadagno d'anello $G(z)$ con tutti i poli stabili (a modulo minore di uno), con l'eventuale eccezione di un polo semplice o doppio in $z = 1$. Condizione necessaria e sufficiente perchè il sistema in retroazione sia asintoticamente stabile è che il diagramma polare completo della funzione $G(e^{j\omega T})$ tracciato per $-\pi/T \leq \omega \leq \pi/T$ non circondi nè tocchi il punto critico $-1 + j0$.

- Esempio: $\qquad G(z) = \dfrac{z}{(z-1)(z-0.5)}$





Il sistema in retroazione è stabile per $K = 1.3$ ed instabile per $K = 5.4$

- É possibile utilizzare il *Luogo delle Radici* anche per sistemi discreti.
- Il Luogo delle radicié il luogo descritto dagli zeri della seguente equazione caratteristica:

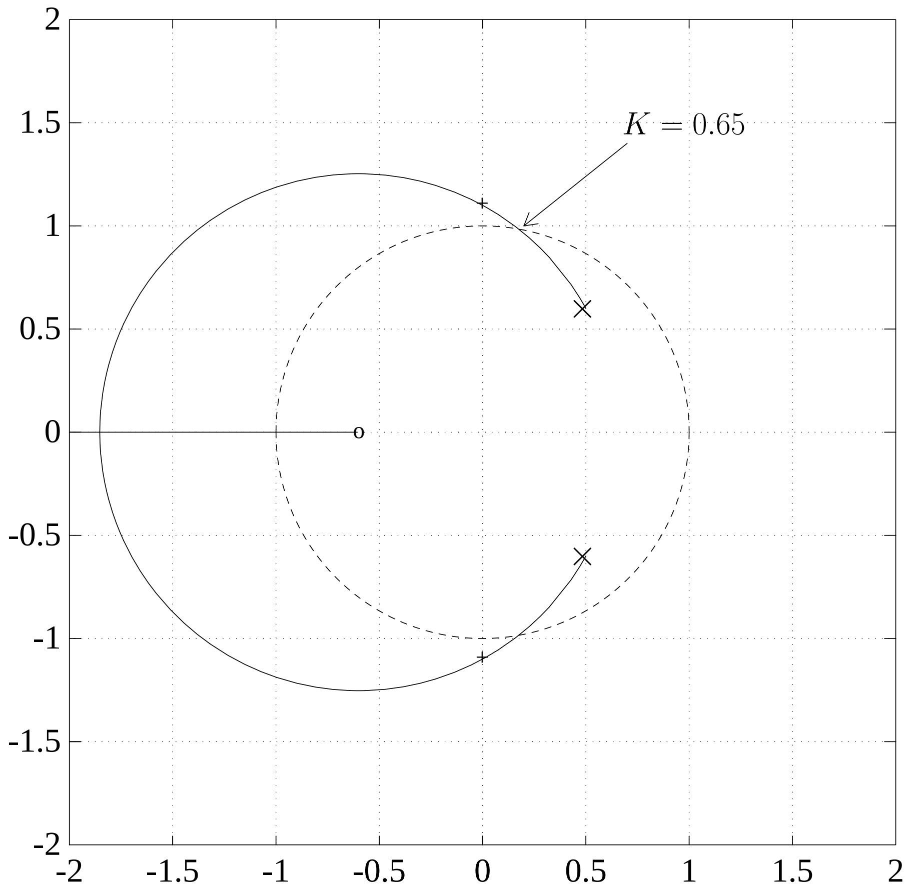
$$1 + K\,G(z) = 0$$

al variare del parametro K nell'intervallo $[0, +\infty]$.

- Esempio. Sia dato il seguente sistema discreto $G(z)$ in catena aperta con due poli in $z_{1,2} = 0.5 \pm j0.6$:

$$G(z) = K\frac{z + 0.6}{z^2 - z + 0.61}$$

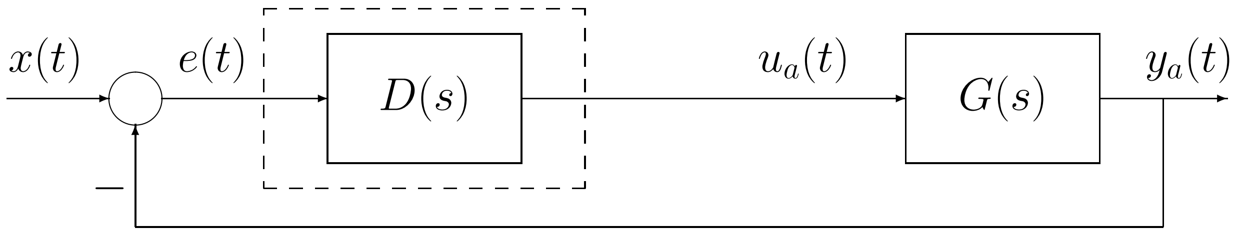
- Per il sistema discreto in retroazione unitaria é possibile tracciare il seguente luogo delle radici:



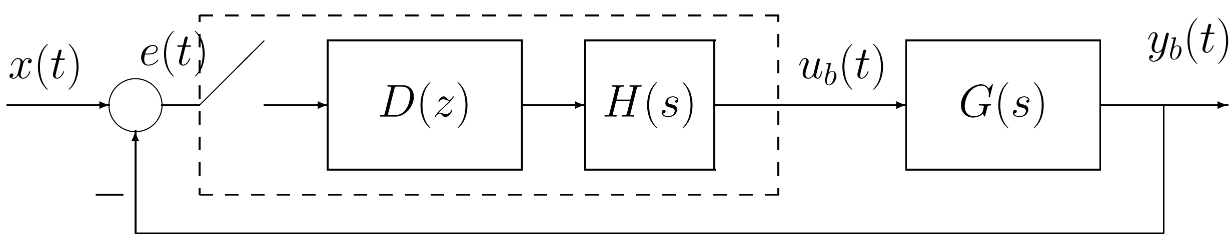
- Il sistema retroazionato é stabile se tutti i poli del sistema retroazionato sono posizionati all'interno del cerchio unitario.

PROGETTO PER DISCRETIZZAZIONE

- Il regolatore $D(s)$ progettato in ambito "tempo continuo" (caso a) viene "discretizzato" ottenendo una funzione $D(z)$ che viene inserita all'interno dell'anello di controllo discreto (caso b):



(a)



(b)

- TECNICHE DI DISCRETIZZAZIONE:

  1. Metodo delle differenze all'indietro
  2. Metodo delle differenze in avanti
  3. Trasformazione bilineare
  4. Metodo della corrispondenza poli/zeri

- Tutti i metodi di discretizzazione che verranno presentati sono "approssimati", cioè forniscono un sistema discreto $D(z)$ che riproduce bene, ma non esattamente, il comportamento dinamico del sistema $D(s)$.

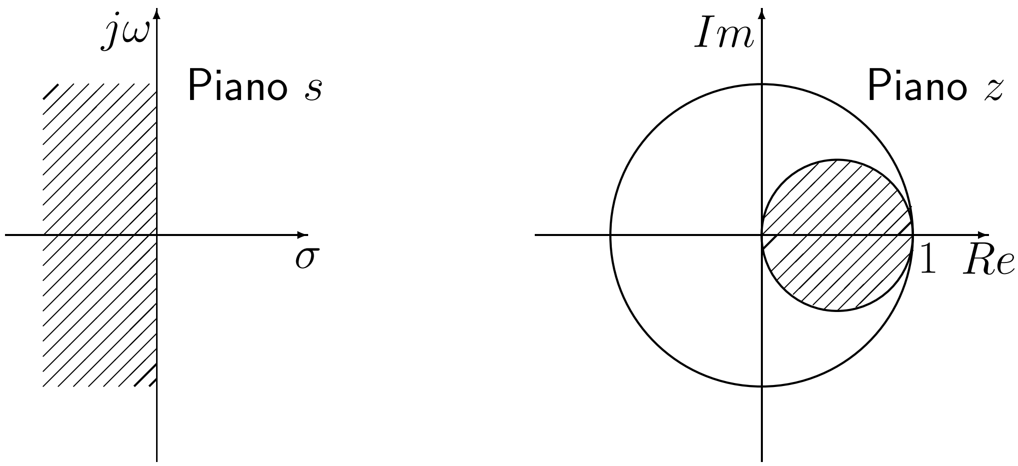
- Più piccolo è il periodo di campionamento T, più il sistema $D(z)$ ha un comportamento dinamico simile a quello del sistema $D(s)$.

1. METODO DELLE DIFFERENZE ALL'INDIETRO

- Il metodo consiste nella seguente sostituzione:

$$\boxed{D(z) = D(s)\Big|_{s = \frac{1-z^{-1}}{T}}}$$

- Legame fra il piano s e il piano z:



Esempio. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente rete anticipatrice:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{1+s}{1+0.2s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.
[Soluzione.] Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene:

$$D(s) = \frac{1+s}{1+0.2s} = 5\frac{s+1}{s+5} \quad \Rightarrow \quad D(z) = D(s)|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{5(1+T-z^{-1})}{1+5T-z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione:

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = \frac{5(1+T-z^{-1})}{1+5T-z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad M(z)(1+5T-z^{-1}) = 5E(z)(1+T-z^{-1})$$

ottenendo

$$M(z)(1.5-z^{-1}) = E(z)(5.5-5z^{-1}) \quad \Rightarrow \quad 1.5\,M(z)-M(z)z^{-1} = 5.5\,E(z)-5E(z)z^{-1}$$

cioè

$$m(k) = \frac{1}{1.5}[m(k-1) + 5.5e(k) - 5e(k-1)]$$

da cui

$$m(k) = 0.666\,m(k-1) + 3.666\,e(k) - 3.333\,e(k-1)$$

Esempio. Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro, discretizzare la seguente funzione:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = 2\,\frac{s+2}{s+5}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

[Soluzione.] Utilizzando il metodo delle differenze all'indietro si ottiene

$$D(z) = D(s)\big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = 2\,\frac{1+2T-z^{-1}}{1+5T-z^{-1}} = 2\,\frac{1.2-z^{-1}}{1.5-z^{-1}}$$

Il calcolo della corrispondente equazione alle differenze è immediato:

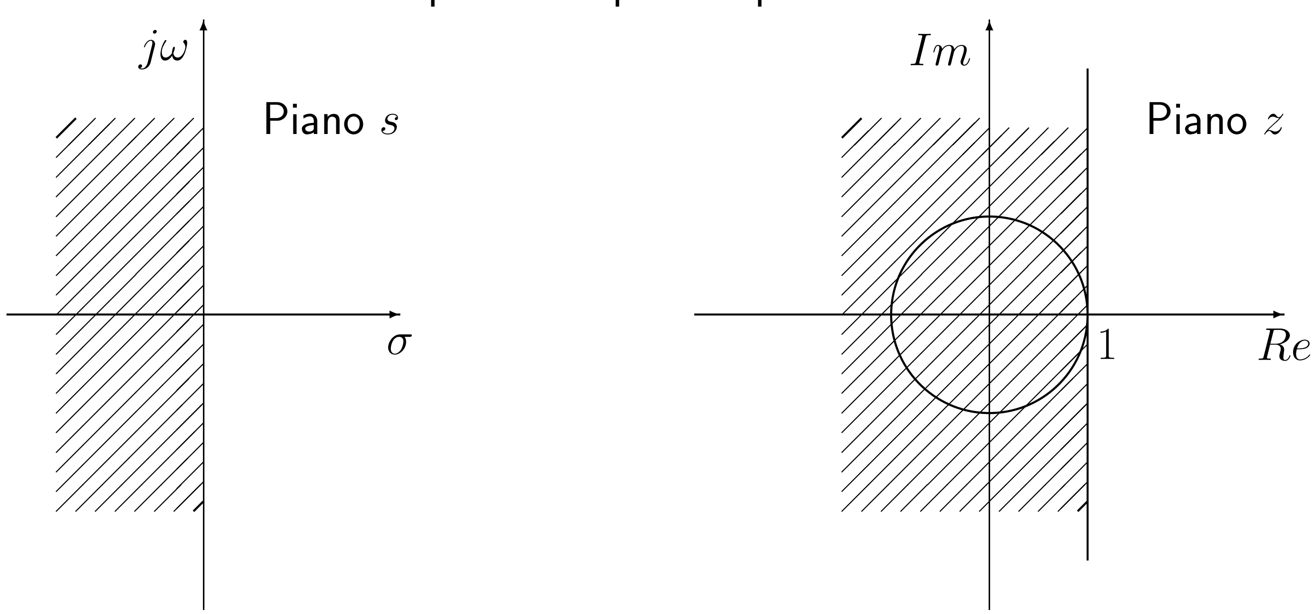
$$m(k) = \frac{1}{1.5}\left[m(k-1) + 2.4e(k) - 2e(k-1)\right]$$

2. METODO DELLE DIFFERENZE IN AVANTI

- Il metodo consiste nella seguente sostituzione:

$$\boxed{D(z) = D(s)\Big|_{s=\frac{z-1}{T}}}$$

- Analizzando la corrispondenza piano-s piano-z si ha che:



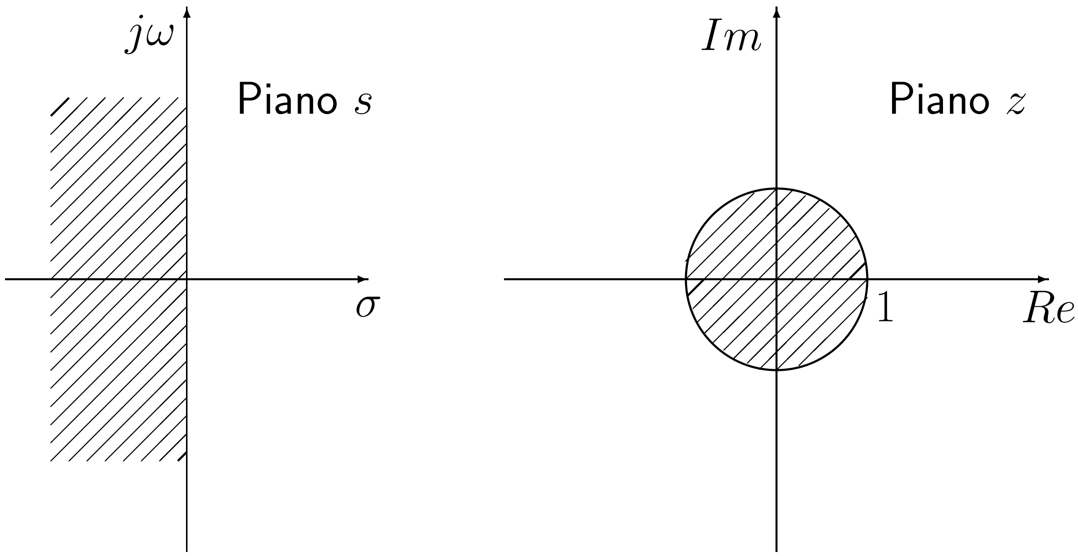
- Questo metodo puó essere utilizzato solo se i poli del controllore $D(s)$ vengono mappati dalla relazione $z = e^{sT}$ all'interno del cerchio unitario del piano z.

3. TRASFORMAZIONE BILINEARE (o di TUSTIN)

- Il metodo consiste nella seguente sostituzione:

$$\boxed{D(z) = D(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}}$$

- L'analisi del legame piano s piano z mostra che il semipiano negativo in s viene posto in corrispondenza biunivoca con i punti z del cerchio unitario:



Esempio. Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare il seguente regolatore PI:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{s+1}{s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.2$.

[Soluzione.] Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene

$$D(z) = D(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{10(1-z^{-1})+(1+z^{-1})}{10(1-z^{-1})} = \frac{11-9\,z^{-1}}{10(1-z^{-1})}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$M(z)(1-z^{-1}) = E(z)(1.1-0.9\,z^{-1})$$

da cui si ottiene

$$m(k) = m(k-1) + 1.1\,e(k) - 0.9\,e(k-1)$$

Esempio. Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare, discretizzare la seguente funzione di trasferimento:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = 2\frac{(1+0.25s)}{(1+0.1s)}$$

Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.05$.

[Soluzione.] La funzione di trasferimento da discretizzare è la seguente:

$$D(s) = 2\frac{(1+0.25\,s)}{(1+0.1\,s)} = 5\frac{(s+4)}{(s+10)}$$

Utilizzando il metodo della trasformazione bilineare si ottiene ($T = 0.05$)

$$D(z) = 5\frac{(s+4)}{(s+10)}\bigg|_{s=\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}} = 4.4\frac{z-\frac{9}{11}}{z-\frac{3}{5}} = 4.4\,\frac{1-0.8182\,z^{-1}}{1-0.6\,z^{-1}}$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$(1-0.6\,z^{-1})M(z) = 4.4(1-0.8182\,z^{-1})E(z)$$

da cui si ottiene

$$m(k) = 0.6\,m(k-1) + 4.4\,e(k) - 3.6\,e(k-1).$$

- Se la funzione di trasferimento $D(z)$ ha la seguente struttura:

$$D(z) = \frac{a+b\,z^{-1}}{c+d\,z^{-1}} = \frac{M(z)}{E(z)}$$

la corrispondente equazione alle differenza é:

$$m(k) = \frac{1}{c}\left[-d\,m(k-1) + a\,e(k) + b\,e(k-1)\right].$$

- Se la funzione di trasferimento $D(z)$ ha la seguente struttura:

$$D(z) = \frac{a+b\,z^{-1}+c\,z^{-2}}{d+e\,z^{-1}+f\,z^{-2}} = \frac{M(z)}{E(z)}$$

la corrispondente equazione alle differenza é:

$$m(k) = \frac{1}{d}\left[-e\,m(k-1) - f\,m(k-2) + a\,e(k) + b\,e(k-1) + c\,e(k-2)\right].$$

7. METODO DELLA CORRISPONDENZA POLI/ZERI

- Si fattorizza numeratore e denominatore di $D(s)$
- Trasformazione dei poli e zeri

$$(s+a) \;\rightarrow\; (1 - e^{-aT} z^{-1})$$

$$(s+a \pm jb) \;\rightarrow\; (1 - 2e^{-aT}\cos bT z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2})$$

- Si introducono zeri in $z = -1$ in numero pari al grado relativo
- Si aggiusta il guadagno alle basse ($z = 1$) o alle alte ($z = -1$) frequenze
- Esempio:

$$D(s) = \frac{s+b}{s+a} \qquad \Rightarrow \qquad D(z) = k\,\frac{z - e^{-bT}}{z - e^{-aT}}$$

In questo caso il valore di k viene scelto imponendo l'uguaglianza dei guadagni statici:

$$D(s)|_{s=0} = D(z)|_{z=1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{b}{a} = k\,\frac{1 - e^{-bT}}{1 - e^{-aT}}$$

da cui si ricava:

$$k = \frac{b}{a}\frac{1 - e^{-aT}}{1 - e^{-bT}}$$

- Esempio. Filtro passa alto:

$$D(s) = \frac{s}{s+a} \qquad \Rightarrow \qquad D(z) = k\,\frac{z-1}{z - e^{-aT}}$$

In questo caso il valore di k viene scelto imponendo l'uguaglianza dei guadagni alle alte frequenze:

$$D(s)|_{s=\infty} = D(z)|_{z=-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 = k\,\frac{2}{1 + e^{-aT}} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{1 + e^{-aT}}{2}$$

- Esempio. Sistema con poli complessi coniugati:

$$D(s) = \frac{1}{(s+a)^2 + b^2} \qquad \Rightarrow \qquad D(z) = k\,\frac{(z+1)^2}{z^2 - 2ze^{-aT}\cos bT + e^{-2aT}}$$

Nella $D(z)$ sono stati aggiunti due zeri in $z = -1$ per imporre un grado relativo $r = 0$. Il valore di k viene scelto imponendo l'uguaglianza dei guadagni statici:

$$D(s)|_{s=0} = D(z)|_{z=1} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{1 - 2e^{-aT}\cos bT + e^{-2aT}}{4(a^2 + b^2)}$$

Esempio. Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri, discretizzare il seguente regolatore PI:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{s+1}{s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi $T = 0.2$ e si imponga l'uguaglianza dei guadagni alle alte frequenze.

[Soluzione.] Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri si ottiene

$$D(s) = \frac{s+1}{s} \qquad \Rightarrow \qquad D(z) = k\, \frac{1-e^{-T}z^{-1}}{1-z^{-1}}\bigg|_{T=0.2} = k\, \frac{1-0.8187z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Il valore di k si calcola imponendo l'uguaglianza dei guadagni alle elevate frequenze

$$D(s)|_{s\to\infty} = D(z)|_{z=-1} \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 = k\frac{1+e^{-T}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{2}{1.8187} = 1.1$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$M(z)(1-z^{-1}) = 1.1\, E(z)(1-0.8187z^{-1})$$

da cui si ricava

$$m(k) = m(k-1) + 1.1\, e(k) - 0.9\, e(k-1)$$

Esempio. Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri, discretizzare la seguente funzione di trasferimento:

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{s+1}{s+3}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzi il periodo di campionamento $T = 0.1$.

[Soluzione.] Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri si ottiene

$$D(s) = \frac{s+1}{s+3} \qquad \Rightarrow \qquad D(z) = k\, \frac{1-e^{-T}z^{-1}}{1-e^{-3T}z^{-1}}\bigg|_{T=0.1} = k\, \frac{1-0.905z^{-1}}{1-0.741z^{-1}}$$

Il valore di k si calcola imponendo l'uguaglianza dei guadagni statici

$$D(s)|_{s=0} = D(z)|_{z=1} \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{3} = k\frac{1-e^{-T}}{1-e^{-3T}} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{1-e^{-3T}}{3(1-e^{-T})} = 0.908$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$M(z)(1-0.741z^{-1}) = 0.908\, E(z)(1-0.905z^{-1})$$

da cui si ricava:

$$m(k) = 0.741\, m(k-1) + 0.908\, e(k) - 0.821\, e(k-1)$$

Esempio. Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri discretizzare la rete anticipatrice

$$D(s) = \frac{M(s)}{E(s)} = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}$$

giungendo anche alla determinazione della corrispondente equazione alle differenze. Si utilizzino i seguenti parametri: $\tau = 1$, $\alpha = 0.2$ e $T = 0.1$.

[Soluzione.] Utilizzando il metodo della corrispondenza poli/zeri si ottiene

$$D(s) = \frac{1+s}{1+0.2s} = 5\frac{s+1}{s+5} \qquad \Rightarrow \qquad D(z) = k\,\frac{1-e^{-T}z^{-1}}{1-e^{-5T}z^{-1}}\bigg]_{T=0.1} = k\,\frac{1-0.905z^{-1}}{1-0.606z^{-1}}$$

Il valore di k si calcola imponendo l'uguaglianza dei guadagni statici:

$$D(s)|_{s=0} = D(z)|_{z=1} \qquad \Leftrightarrow \qquad 1 = k\,\frac{1-e^{-T}}{1-e^{-5T}} \qquad \Rightarrow \qquad k = \frac{1-e^{-5T}}{1-e^{-T}} = 4.135$$

La corrispondente equazione alle differenze si ricava dalla relazione

$$D(z) = \frac{M(z)}{E(z)} = 4.135\,\frac{1-0.905z^{-1}}{1-0.606z^{-1}}$$

ottenendo

$$M(z)(1-0.606z^{-1}) = 4.135\,E(z)(1-0.905z^{-1})$$

da cui si ricava:

$$m(k) = 0.606\,m(k-1) + 4.135\,e(k) - 3.742\,e(k-1)$$

Campionamento ideale

- Si consideri il seguente sistema tempo continuo:

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 2\,s + 5}$$

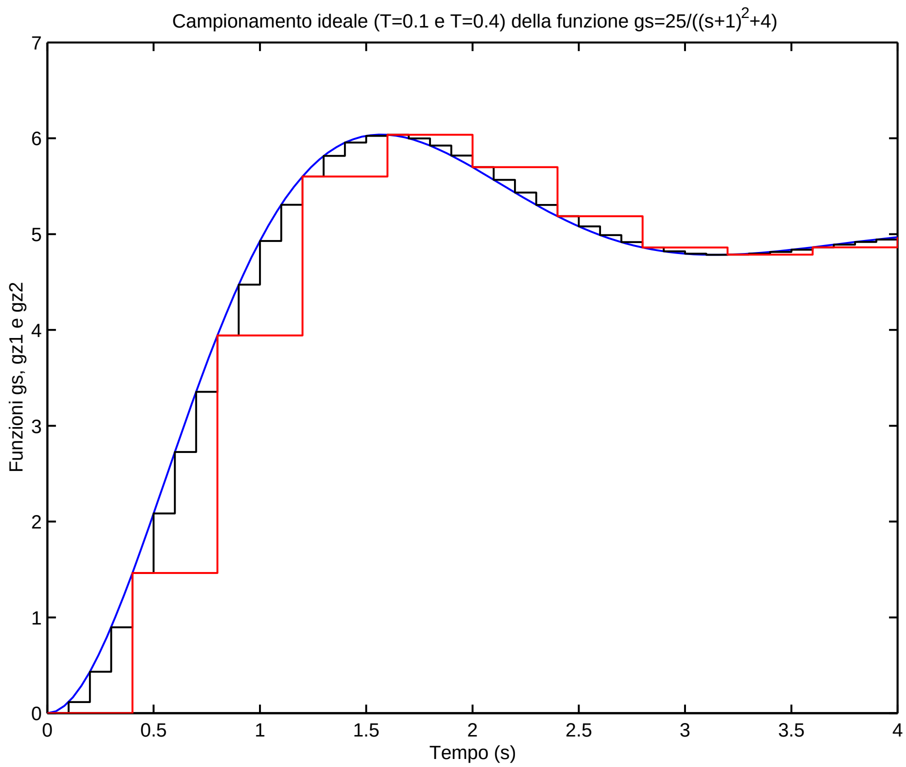
- Se si discretizza questa funzione utilizzando il periodo di campionamento $T = 0.1$ si ottiene la funzione:

$$G_1(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)]_{T=0.1} = \frac{0.1166z + 0.1091}{z^2 - 1.774z + 0.8187}$$

- Utilizzando invece il periodo di campionamento $T = 0.4$ si ottiene la seguente funzione:

$$G_2(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)]_{T=0.4} = \frac{1.463\,z + 1.114}{z^2 - 0.934\,z + 0.4493}$$

- Risposta al gradino unitario delle 3 funzioni $G(s)$, $G_1(z)$ e $G(2)(z)$:



- Si noti l'esatta coincidenza delle 3 risposte al gradino negli istanti di campionamento.

- In Matlab, una funzione tempo continua "gs" puó essere discretizzata utilizzando il seguente comando: "`gz=c2d(gs,T)`".

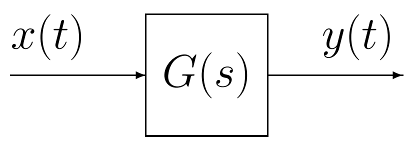
Regolatore proporzionale discreto

- Si consideri il seguente sistema:

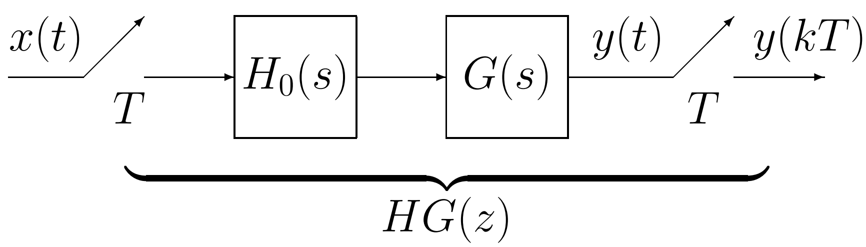
$$G(s) = \frac{25}{s(s+1)(s+10)}$$

Confronto tra le funzioni di risposta armonica dei seguenti 3 sistemi:

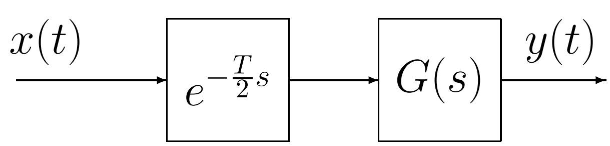
1) Il sistema $G(s)$:



2) Il sistema $HG(z) = \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)]$ ottenuto inserendo un campionatore e un ricostruttore di ordine zero in cascata al sistema $G(s)$:

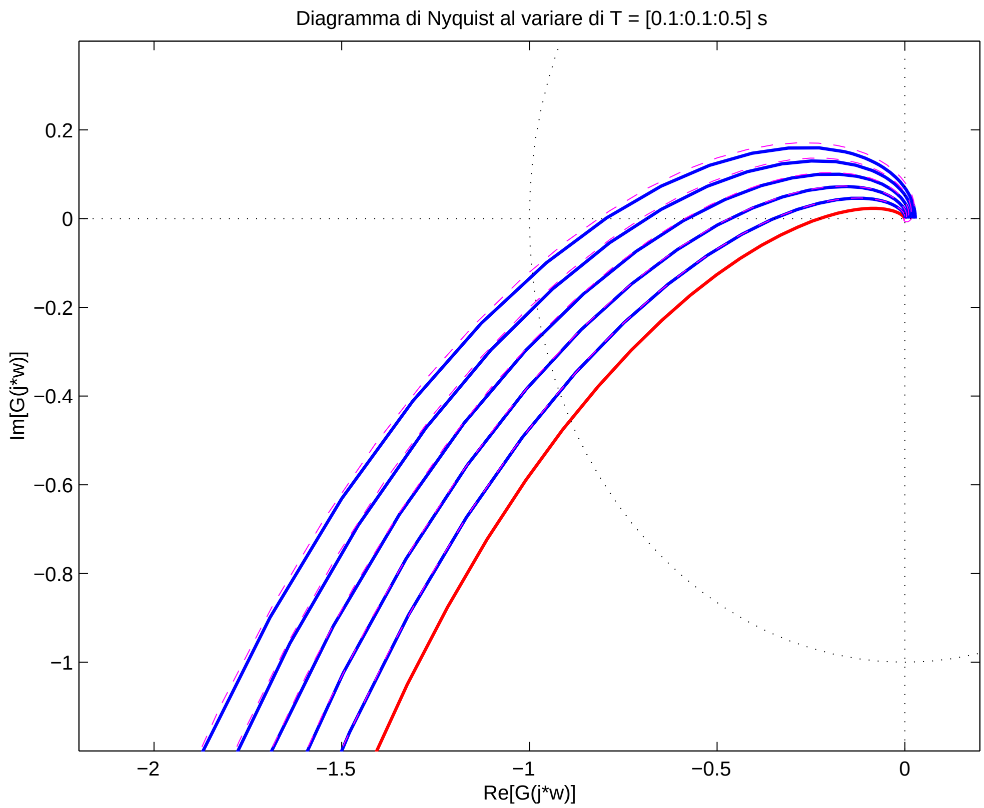


3) Il sistema $G(s)\, e^{-\frac{T}{2}s}$ ottenuto sostituendo la cascata del campionatore e del ricostruttore di ordine zero con un ritardo puro $e^{-\frac{T}{2}s}$ pari a metà del periodo di campionamento T:



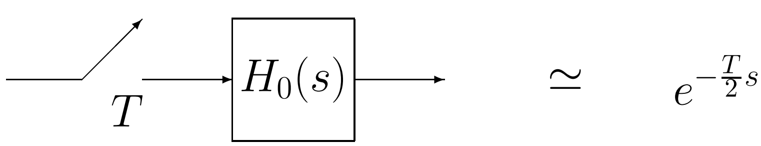
- La funzione $HG(z,T) = \mathcal{Z}[H_0(s)G(s)]$ che si ottiene discretizzando il sistema $G(s)$ posto in cascata con il ricostruttore di ordine zero $H_0(s)$ è funzione del periodo di campionamento T.

- Diagrammi di Nyquist dei sistemi $G(s)$, $HG(z,T)$e $G(s)\,e^{-\frac{T}{2}s}$ per $T \in [0.1,\, 0.2,\, 0.3,\, 0.4,\, 0.5]$:

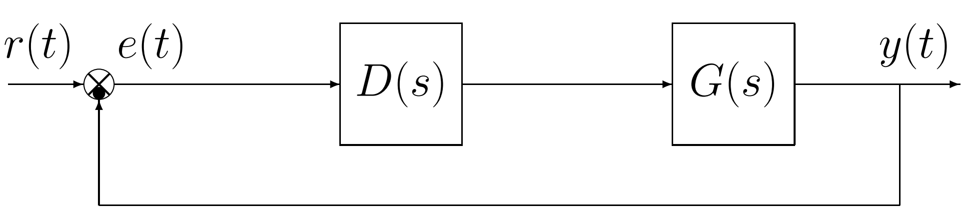


- Si noti come all'aumentare del periodo di campionamento T si ha un aumento dello sfasamento presente all'interno del sistema e quindi una riduzione dei margini di stabilità.

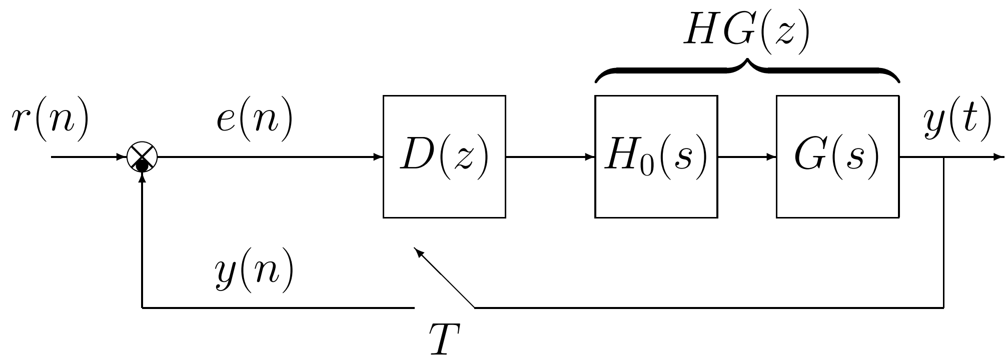
- Dai diagrammi di Nyquist sopra riportati è evidente che per basse pulsazioni la cascata del campionatore e del ricostruttore di ordine zero può essere ben approssimata da un ritardo puro:



- Si metta ora a confronto il sistema retroazionato tempo continuo:



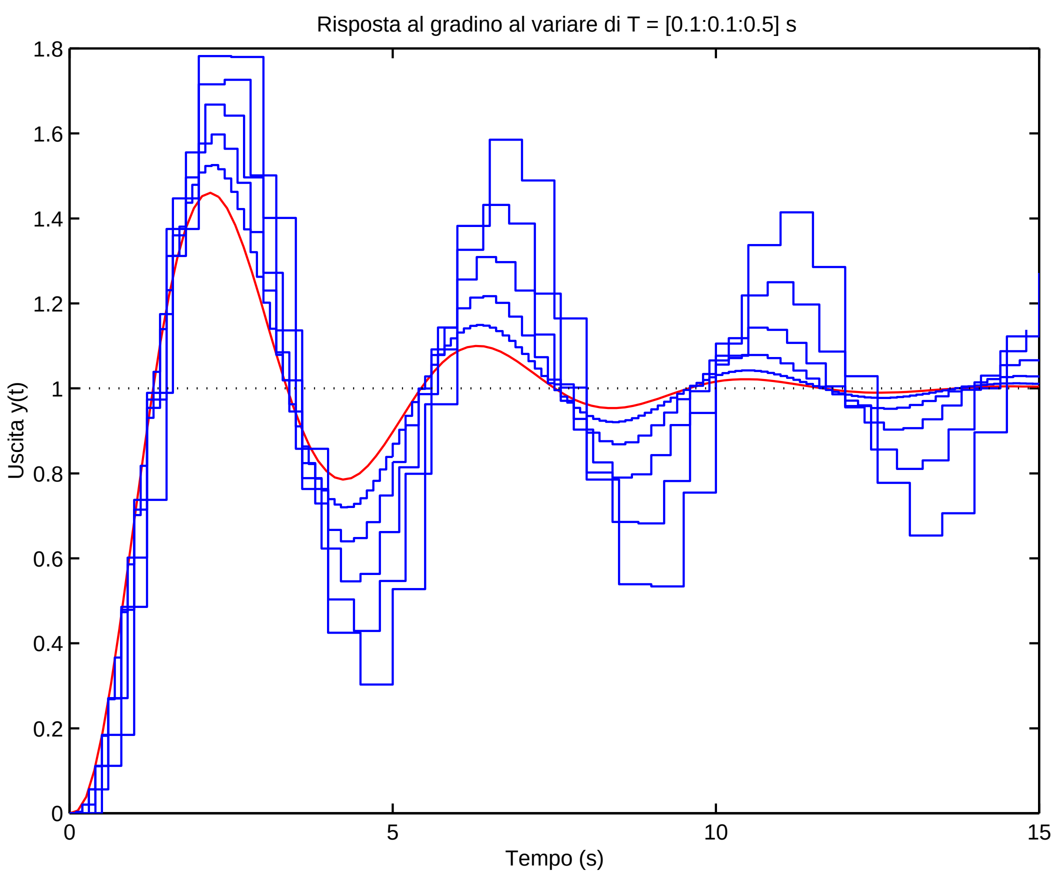
con il corrispondente sistema discreto:



- Funzioni di trasferimento $G_0(s)$ e $G_0(z)$ dei due sistemi retroazionati:

$$G_0(s) = \frac{D(s)\, G(s)}{1 + D(s)G(s)}, \qquad G_0(z) = \frac{D(z)\, HG(z)}{1 + D(z)\, HG(z)}$$

- Risposta al gradino dei sistemi $G(s)$ e $HG(z, T)$ posti in retroazione unitaria per $T \in [0.1,\, 0.2,\, 0.3,\, 0.4,\, 0.5]$ quando $D(s) = D(z) = 1$:



- All'aumentare del periodo di campionamento si hanno risposte al gradino sempre meno smorzate e con una sovraelongazione sempre più elevata.

Confronto tra diversi metodi di descritizzazione

- Si consideri il seguente sistema:

$$G(s) = \frac{25}{s(s+1)(s+10)}$$

e per esso si progetti una opportuna rete correttrice (anticipatrice):

$$D(s) = \frac{1+\tau_1\, s}{1+\tau_2\, s} = \frac{1+0.806\, s}{1+0.117\, s}$$

- La funzione di trasferimento $D(s)$ può essere discretizzata utilizzando diversi metodi approssimati:

1) differenze all'indietro:

$$D_1(z) = D(s)\big|_{s=\frac{1-z^{-1}}{T}} = \frac{T+\tau_1-\tau_1\, z^{-1}}{T+\tau_2-\tau_2\, z^{-1}}$$

2) differenze in avanti:

$$D_2(z) = D(s)\big|_{s=\frac{z-1}{T}} = \frac{\tau_1+(T-\tau_1)\, z^{-1}}{\tau_2+(T-\tau_2)\, z^{-1}}$$

3) trasformazione bilineare:

$$D_3(z) = D(s)\big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{T+2\,\tau_1+(T-2\,\tau_1)\, z^{-1}}{T+2\,\tau_2+(T-2\,\tau_2)\, z^{-1}}$$

4) corrispondenza poli-zeri:

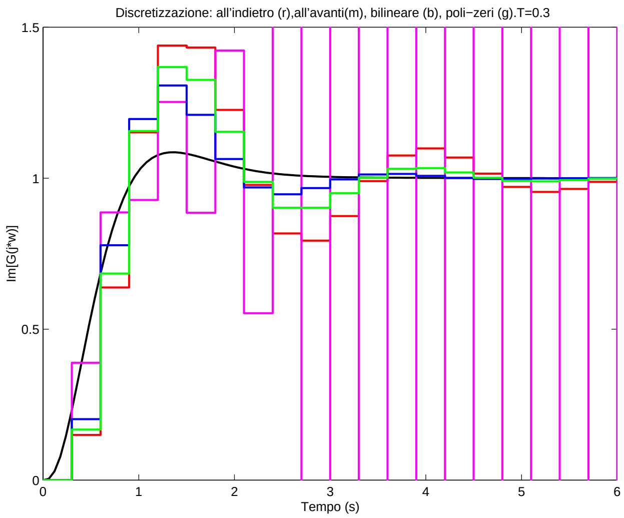
$$D(s) \qquad \rightarrow \qquad D_4(z) = \frac{(1-\beta)-\alpha\,(1-\beta)\, z^{-1}}{(1-\alpha)-\beta\,(1-\alpha)\, z^{-1}}$$

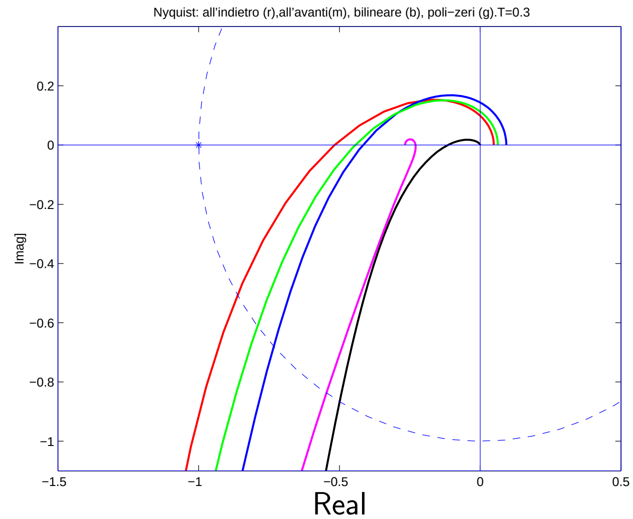
dove

$$\alpha = e^{-\frac{T}{\tau_1}}, \qquad \beta = e^{-\frac{T}{\tau_2}}$$

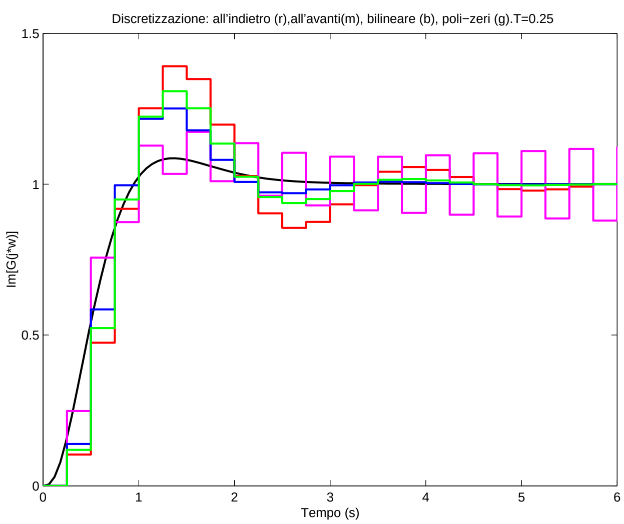
- Si noti che il regolatore $D_2(z)$ è stabile solo quando $T < 2\,\tau_2$ mentre gli altri 3 regolatori sono stabili per qualunque valore di $T > 0$.

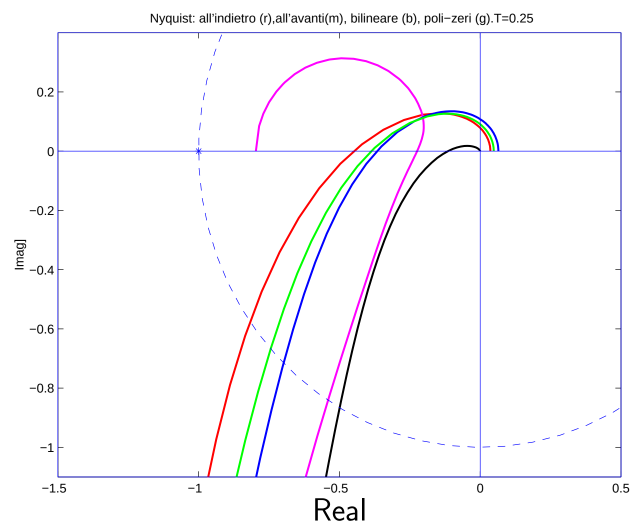
- Risposte al gradino del sistema retroazionato e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.3$ e utilizzando i vari metodi di discretizzazione:



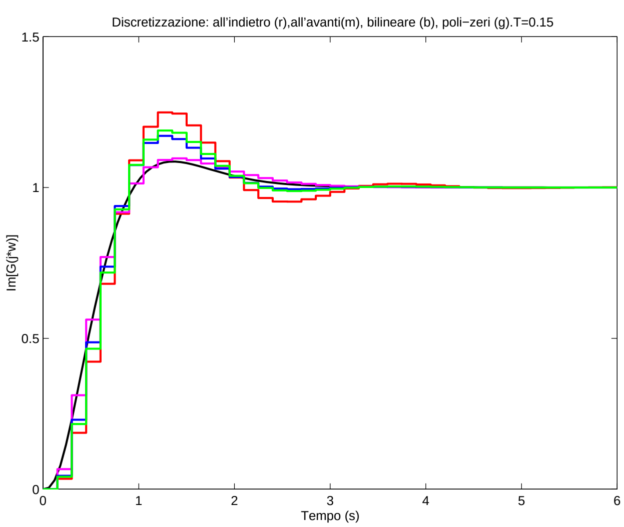


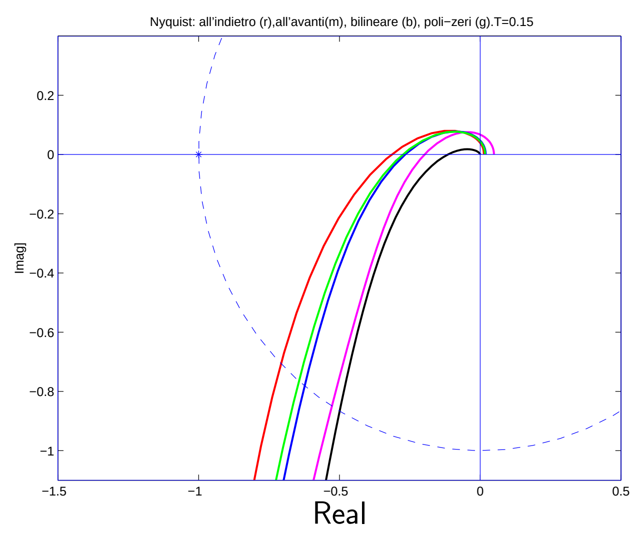
- Risposte al gradino e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.25$:



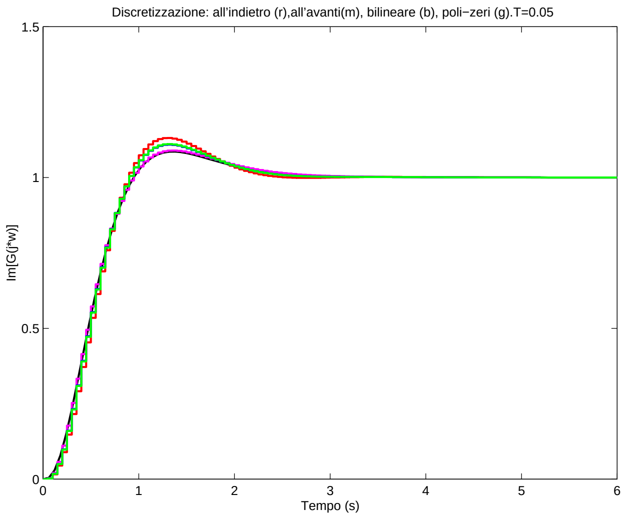


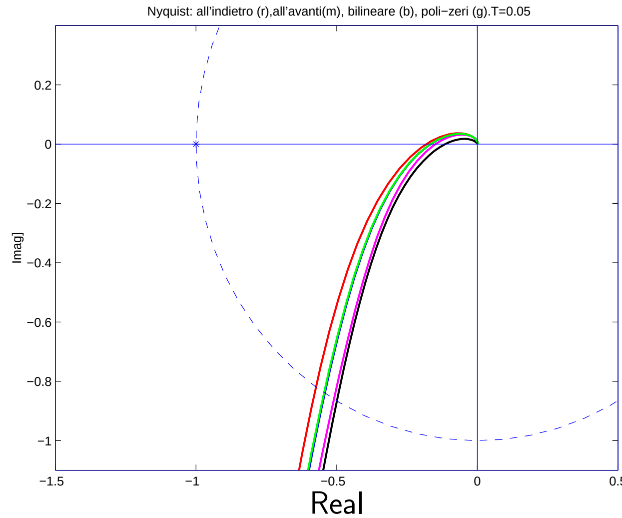
- Risposte al gradino e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.15$:



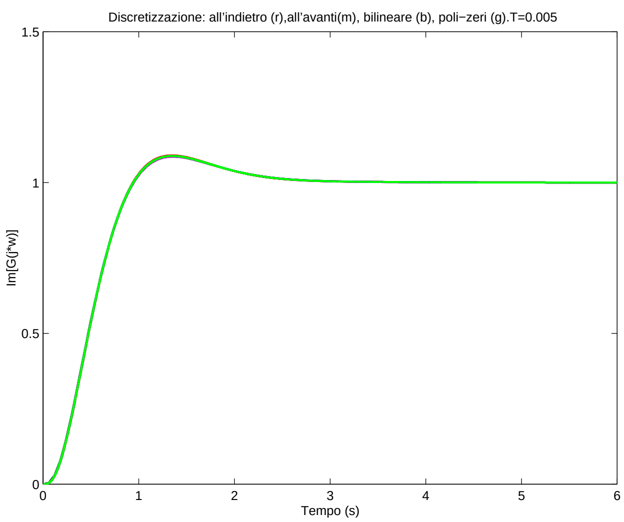


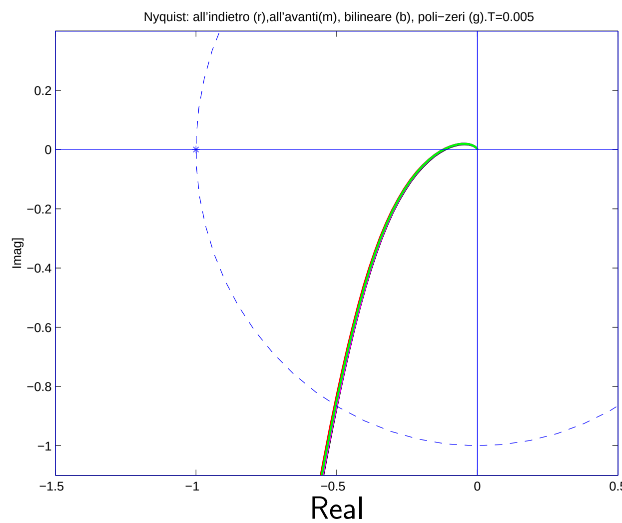
- Risposte al gradino e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.05$:





- Risposte al gradino e diagrammi di Nyquist quando $T = 0.005$:





- Per periodi di campionamento così piccoli i regolatori discreti hanno tutti un comportamento sostanzialmente equivalente.