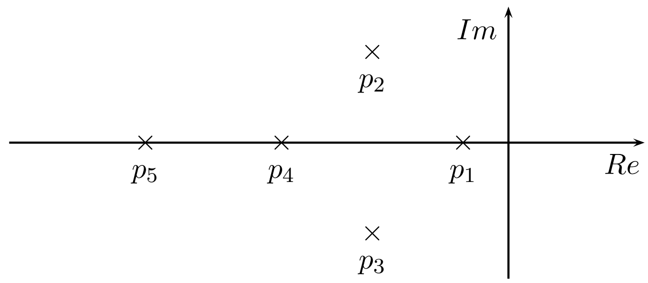
Sistemi non lineari: stati di equilibrio e stabilità

• La stabilitá dei sistemi lineari si determina molto facilmente calcolando i poli della funzione di trasferimento $G(s)$: se tutti i poli sono a parte reale negativa il sistema é asintoticamente stabile.

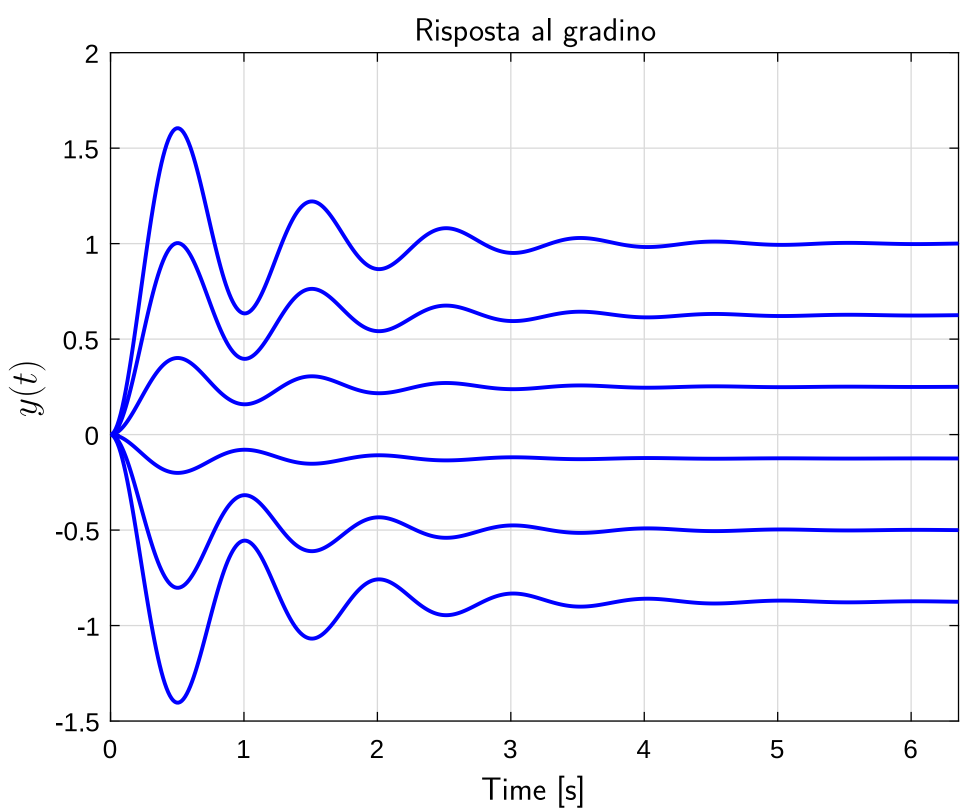
$$Y(s) = K\,\frac{(s-z_1)\,(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)\,(s-p_2)\ldots(s-p_n)}$$



• Se l'ingresso di un sistema $G(s)$ asintoticamente stabile é costante, $u(t) = U_0$, allora il punto di lavoro Y_0 (detto anche *stato di equilibrio*) del corrispondente segnale di uscita $y(t)$ é anch'esso costante e si calcola nel seguente modo:

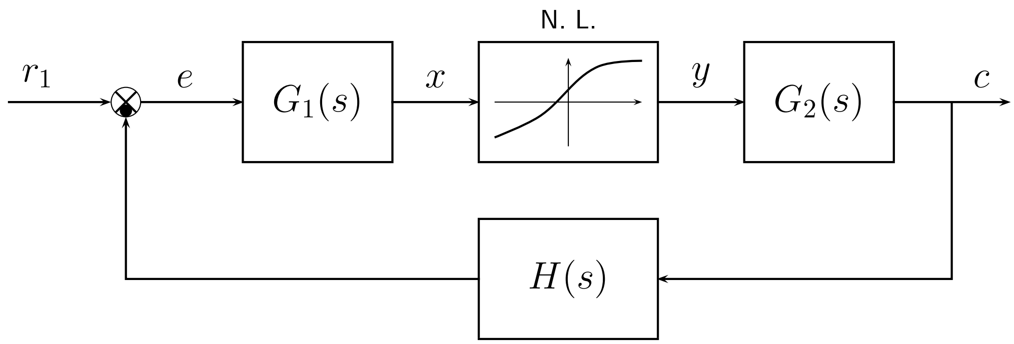
$$Y_0 = G(s)\big|_{s=0}\,U_0 = G(0)\,U_0.$$

• La stabilitá di un sistema lineare $G(s)$ é una properitá globale che non dipende dal segnale di ingresso $u(t)$: il comportamento dinamico di un sistema lineare $G(s)$ é sempre dello stesso indipendentemente dall'ampiezza dell'ingresso:



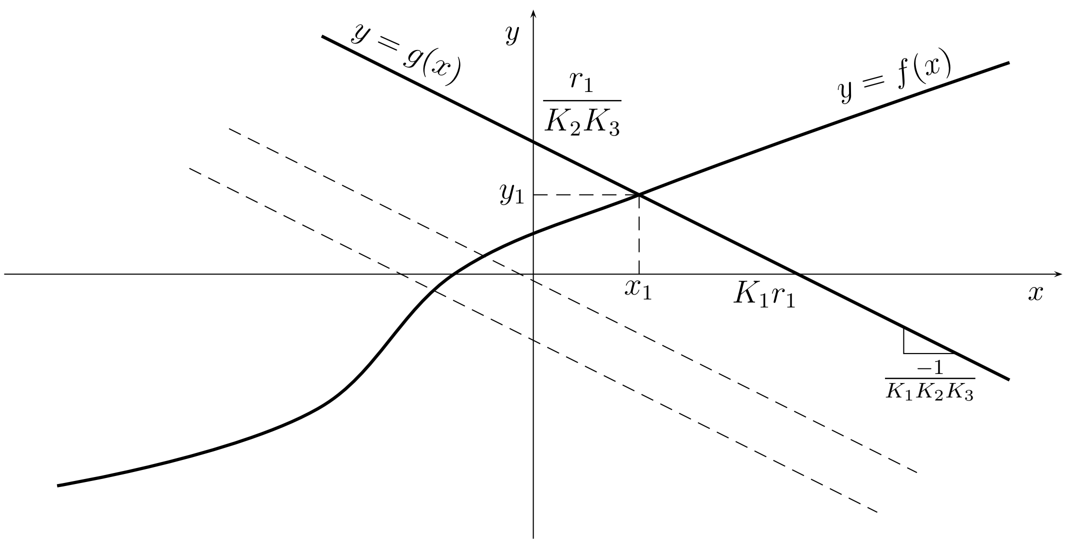
- I sistemi non lineari, invece, si comportano in modo totalmente diverso:
  - Ad un ingresso costante $u(t) = U_0$ puó corrispondere un numero imprecisato di possibili punti di lavoro: nessun punto di equilibrio, un punto di equilibrio, vari punti di equilibrio, infiniti punti di equilibrio;
  - La stabilitá di un sistema non lineare non é una proprietá globale, é una "*proprietá locale*" e puó cambiare al variare del punto di equilibrio.
  - Per i sistemi non lineari *non é piú possible utilizzare lo strumento delle trasformate di Laplace*.
  - I sistemi non lineari non possono essere descritti da una funzione di trasferimento e quindi per essi non esiste piú il concetto di *poli del sistema*.
  - La dinamica dei sistemi non lineari viene studiata facendo diretto riferimento alle *equazioni differenziali non lineari* che descrivono il sistema.
  - Lo studio di stabilitá nell'intorno di un punto di lavoro va fatto procedendo alla *linearizzazione del sistema nell'intorno del punto*, oppure utilizzando *criteri di stabilitá specifici come quelli di Lyapunov*.
  - L'analisi di stabilitá di un sistema non lineare, a volte puó risultare *molto difficile e problematica*.
  - In generale, *non esistono modi semplici o metodologie generali per il progetto di efficaci controllori per sistemi dinamici non lineari.*
  - Lo sviluppo di controllori per sistemi non lineari spesso viene fatta utilizzando *programmi di simulazione numerica* come, per esempio, Simulink all'interno di Matlab. Tali programmi permettono la risoluzione numerica delle equazioni differenziali non lineari del sistema, partendo da specifiche condizioni iniziali.
  - Nel seguito verranno descritte due metodologie di *analisi qualitativa* di sistemi dinamici non lineari (la "funzione descrittiva" e il "criterio del cerchio") che si possono applicare solo ad una determinata categoria di sistemi non lineari.

• Si farà riferimento solo sistemi retroazionati aventi la seguente struttura:



dove si suppone che il segnale di riferimento r_1 sia costante.

• Per studiare il sistema in presenza di perturbazioni, occorre conoscere il corrispondente *punto di equilibrio* (x_1, y_1) sulla caratteristica dell'elemento non lineare:



• Il punto di equilibrio (x_1, y_1) viene determinato come intersezione della caratteristica $y = f(x)$ dell'elemento non lineare, con la retta di equazione

$$x = K_1\, r_1 - K_1\, K_2\, K_3\, y \qquad \Rightarrow \qquad y = \frac{r_1}{K_2\, K_3} - \frac{x}{K_1\, K_2\, K_3} = g(x)$$

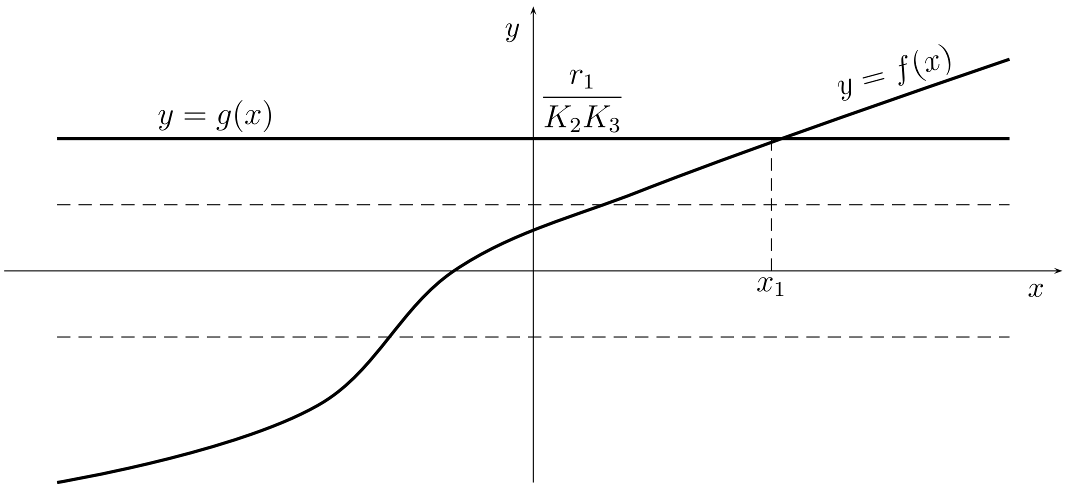
dove con $K_1 = G_1(0)$, $K_2 = G_2(0)$, $K_3 = H(0)$ si sono indicati i guadagni statici delle tre funzioni di trasferimento $G_1(s)$, $G_2(s)$ e $H(s)$.

Casi particolari:

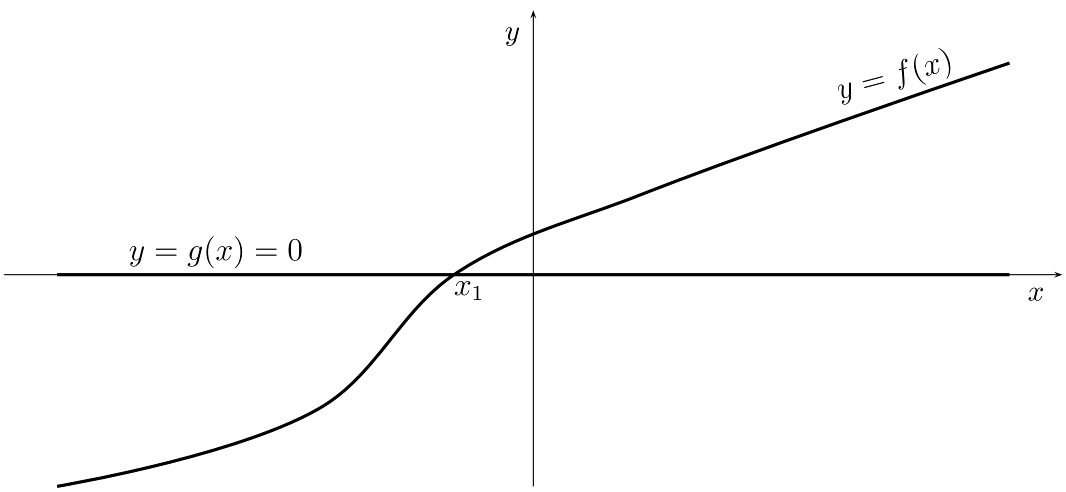
1) Se il sistema $G_1(s)$ è di tipo 1 (cioè ha un polo nell'origine), il corrispondente guadagno statico è $K_1 = \infty$ e la retta di carico diventa

$$r_1 = K_2\, K_3\, y \qquad \rightarrow \qquad y = \frac{r_1}{K_2\, K_3}$$

La corrisponde costruzione grafica è:



2) Se il sistema $G_2(s)$ [o il sistema $H(s)$] è di tipo 1, il corrispondente guadagno statico è $K_2 = \infty$ [$K_3 = \infty$] e la retta di carico diventa $y = 0$.



In questo caso il punto di equilibrio è dato dall'intersezione della funzione $y = f(x)$ con l'asse delle ascisse $y = 0$.

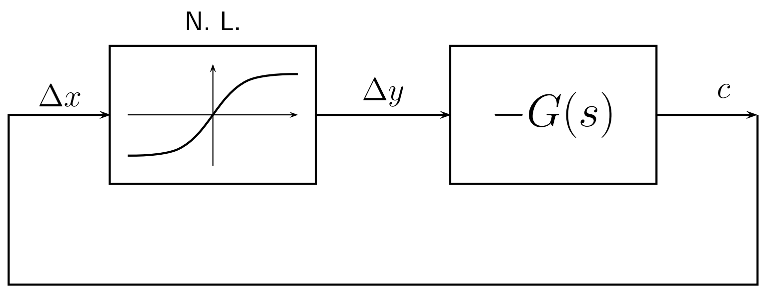
• Il comportamento locale del sistema dipende dal particolare punto di equilibrio considerato e quindi dal valore di r_1.

• Nel caso dei sistemi non lineari si parla di stabilità di un punto di equilibrio e non di stabilità del sistema;

• La stabilità di un particolare punto di equilibrio di un sistema non lineare può dipendere dall'entità della perturbazione.

• I dispositivi di controllo devono essere progettati in modo che il sistema controllato sia *globalmente asintoticamente stabile*, cioè sia asintoticamente stabile: a) per qualunque punto di equilibrio in cui il sistema si possa portare al variare dell'ingresso; b) per perturbazioni di qualunque entità.

• Operando il cambiamento di variabili $\Delta x = x - x_1$, $\Delta y = y - y_1$ e $\Delta r = r - r_1$, il precedente sistema in retroazione può essere rappresentato (in modo equivalente) mediante il seguente schema:



dove si è posto $G(s) = G_1(s)\, G_2(s)\, H(s)$. L'origine del nuovo sistema di coordinate $(\Delta x,\, \Delta y)$ coincide con il punto di equilibrio x_1, y_1.

• Quando r è costante o lentamente variabile, lo studio della stabilità del sistema non lineare in retroazione può essere fatto facendo riferimento a quest'ultimo sistema *autonomo* (cioè privo di ingressi).

• Un'altra notevole differenza fra il comportamento dei sistemi lineari e quello dei sistemi non lineari è che questi ultimi possono presentare anche dei *cicli limite*, cioè dei moti periodici autosostenuti asintoticamente stabili.

• Lo studio dei cicli limite è importante anche in relazione ai sistemi di controllo poiché quando, aumentando il guadagno di anello, questi sono portati in condizioni di instabilità, assumono in genere un moto periodico stabile, dovuto al fatto che le inevitabili saturazioni limitano le escursioni delle diverse variabili e impediscono quindi l'esaltazione indefinita delle oscillazioni autosostenute.