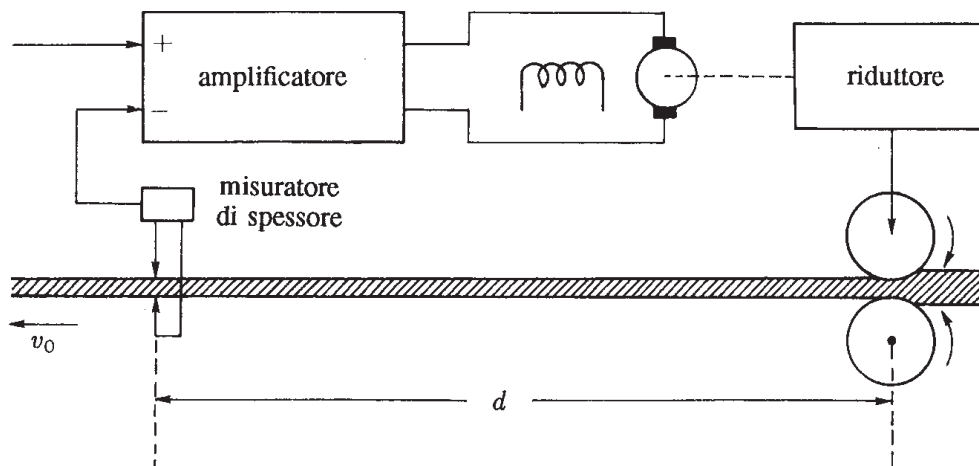


Sistemi con ritardi finiti

Nell'enunciato del criterio di Nyquist si è fatto implicitamente riferimento a sistemi aventi la funzione di guadagno di anello $F(s)$ razionale fratta. Questi sistemi sono caratterizzati dal fatto che l'uscita o una sua derivata rispondono immediatamente all'applicazione dell'ingresso.

In molti sistemi di controllo, con trasmissioni pneumatiche, idrauliche o meccaniche si possono presentare ritardi finiti: l'uscita e le sue derivate rispondono dopo un tempo finito dall'applicazione dell'ingresso. Esempio: sistema per la regolazione dello spessore di un laminato:



Un modello matematico spesso accettabile per la rappresentazione di tale sistema è dato dalla seguente funzione di trasferimento trascendente:

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} e^{-t_0 s}$$

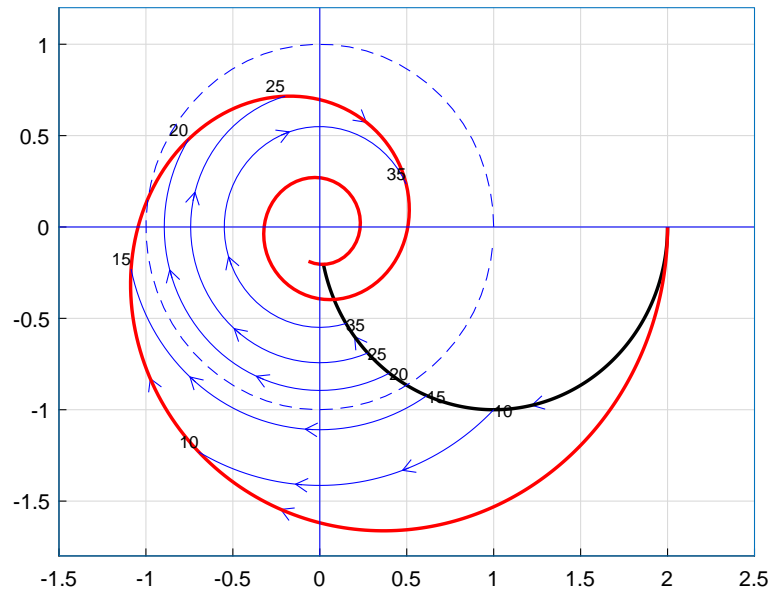
in cui $P(s)$ e $Q(s)$ sono polinomi in s , mentre $e^{-t_0 s}$ è la funzione di trasferimento di un ritardo finito di durata t_0 .

Il criterio di Nyquist si può estendere, senza modifiche dell'enunciato, anche a sistemi con un ritardo finito all'interno dell'anello di controllo.

Nei due esempi che seguono viene mostrata sul diagramma di Nyquist qual'è l'influenza di un ritardo finito e^{-t_0s} su di una funzione razionale fratta.

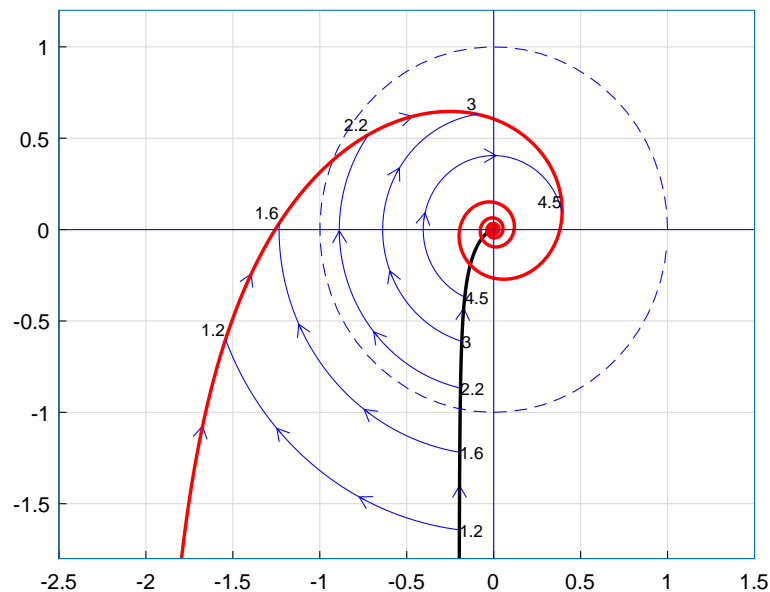
Primo esempio:

$$G(s) = \frac{20}{(s + 10)}, \quad F(s) = \frac{20 e^{-0.13s}}{(s + 10)}$$



Secondo esempio:

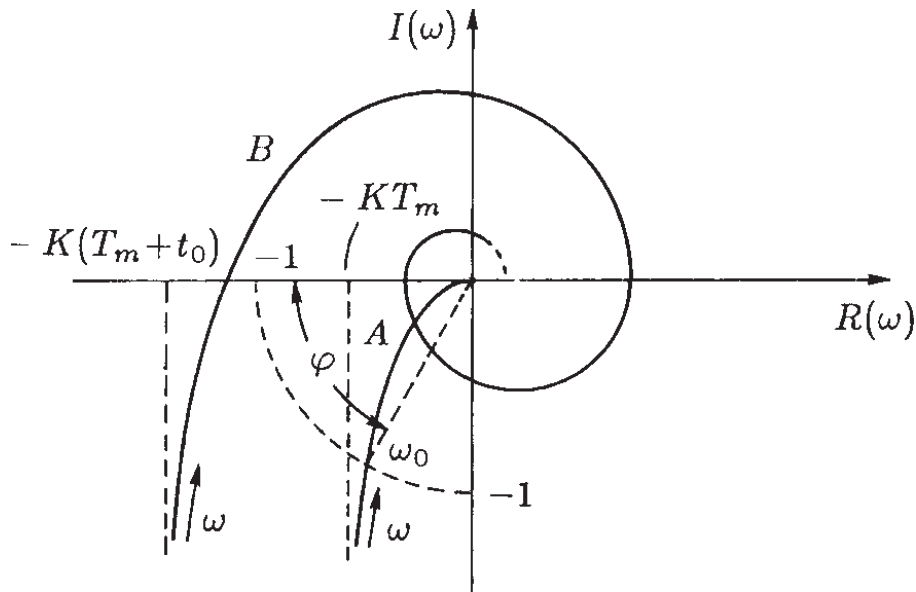
$$G(s) = \frac{20}{s(s + 10)}, \quad F(s) = \frac{20 e^{-0.9s}}{s(s + 10)}$$



Esempio. Nel sistema mostrato sopra, la misura dello spessore del laminato avviene ad una certa distanza d dai cilindri, per cui, se la velocità di trasporto v_0 del laminato è costante, si ha un ritardo finito di valore $t_0 = d/v_0$. La funzione di trasferimento $G(s)$ del gruppo misuratore-amplificatore-motore-riduttore e quella d'anello $F(s)$ sono:

$$G(s) = \frac{K}{s(1 + T_m s)}, \quad F(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{s(1 + T_m s)}$$

Se non vi fosse il ritardo finito, il diagramma di Nyquist della funzione $F(s)$ sarebbe del tipo indicato con A nella figura seguente:



Per la presenza del ritardo finito t_0 , ogni vettore viene sfasato in ritardo dell'angolo ωt_0 , proporzionale alla pulsazione, e il diagramma assume l'andamento a spirale indicato con B nella figura precedente.

Nota. Si indichi con ω_0 la pulsazione in corrispondenza della quale il diagramma A interseca il cerchio a modulo unitario. Il sistema retroazionato è stabile anche in presenza del ritardo finito t_0 se e solo se vale la relazione $\omega_0 t_0 < M_\varphi$, cioè se

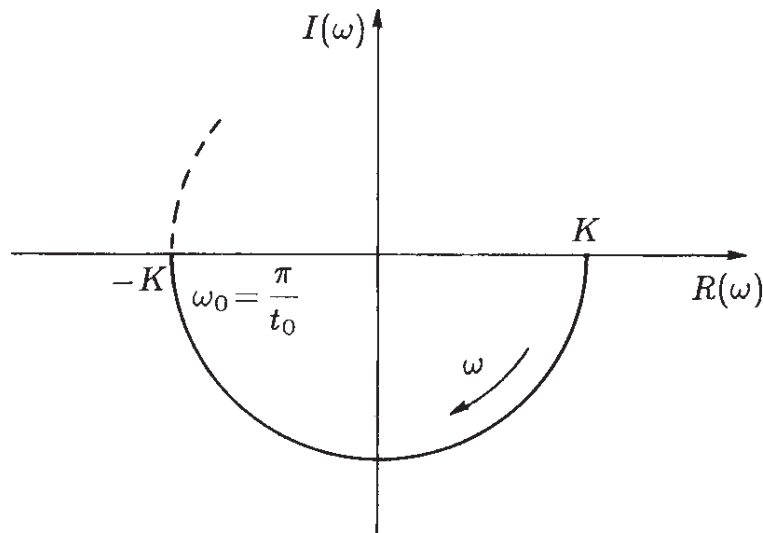
$$t_0 < \frac{M_\varphi}{\omega_0}$$

dove M_φ non è altro che il margine di fase del sistema in assenza del ritardo puro.

Esempio. Un sistema di tipo 0 avente la seguente funzione di trasferimento di anello:

$$F(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots}$$

con $t_0 \gg \tau_1, \tau_2 \dots$, ha il seguente diagramma di Nyquist



Pur avendo ancora una forma di tipo a spirale, nel tratto iniziale il diagramma di Nyquist può essere approssimato con una circonferenza, dato che lo sfasamento dovuto al ritardo si manifesta prima dell'attenuazione e dello sfasamento dovuti ai termini del primo ordine.

Se $t_0 \gg \tau_1, \tau_2 \dots$, l'intersezione con il semiasse reale negativo avviene in corrispondenza della seguente pulsazione ω_0 :

$$\text{Arg} [K e^{-t_0 s}]_{s=j\omega_0} = -\pi \quad \Rightarrow \quad -t_0 \omega_0 = -\pi \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = -\frac{\pi}{t_0}$$

In base al criterio di Nyquist, per la stabilità asintotica del sistema $F(s)$ retroazionato, deve essere quindi soddisfatta la condizione: $K < 1$. Un valore così basso per il guadagno statico di anello è inaccettabile in quanto determina un errore a regime e_p nella risposta ad un gradino di ampiezza R_0 non inferiore ad $R_0/2$.

In questi casi conviene quindi utilizzare un dispositivo di controllo di *tipo integrale*, cioè introdurre artificialmente un polo nell'origine. La nuova funzione di trasferimento diventa:

$$F(s) = \frac{K e^{-t_0 s}}{s(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) \dots}$$

Assumendo $t_0 \gg \tau_1, \tau_2 \dots$, la funzione $F(s)$ può essere approssimata nel seguente modo:

$$F(s) \simeq \frac{K e^{-t_0 s}}{s}$$

La pulsazione ω_0 in corrispondenza della quale la funzione di risposta armonica $F(j\omega)$ interseca il cerchio unitario in un punto $B = e^{j(-\pi + M_F)}$ corrispondente ad un margine di fase M_F , si determina nel seguente modo:

$$\text{Arg} \left[\frac{K e^{-t_0 s}}{s} \right]_{s=j\omega_0} = -\pi + M_F \quad \Rightarrow \quad -t_0 \omega_0 - \frac{\pi}{2} = -\pi + M_F$$

da cui si ricava:

$$\omega_0 = \frac{1}{t_0} \left(\frac{\pi}{2} - M_F \right)$$

Il valore del guadagno K a cui corrisponde un margine di fase M_F si determina imponendo che il modulo della funzione $F(j\omega)$ in corrispondenza della pulsazione ω_0 sia unitario:

$$\left| \frac{K e^{-t_0 s}}{s} \right|_{s=j\omega_0} = 1 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{K}{\omega_0} \right| = 1 \quad \Rightarrow \quad K = \omega_0$$

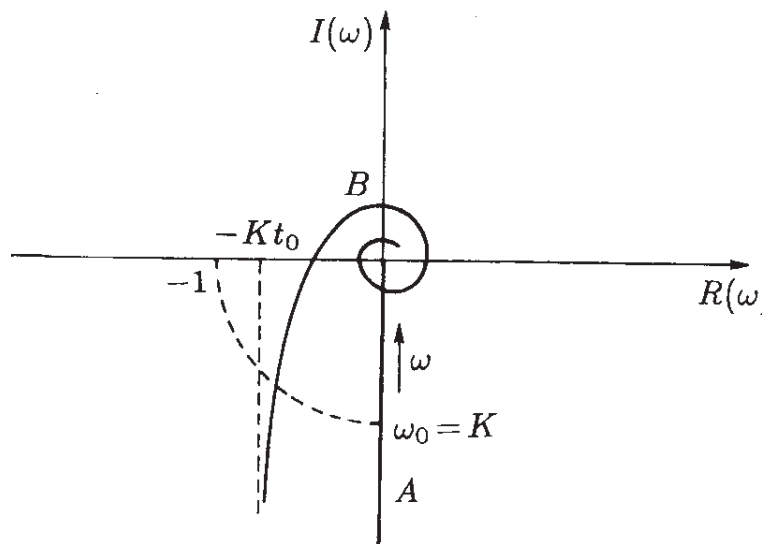
Per imporre un margine di di fase M_F al sistema $F(s)$ occorre quindi scegliere il guadagno K nel seguente modo:

$$K = \omega_0 = \frac{1}{t_0} \left(\frac{\pi}{2} - M_F \right)$$

Il valore massimo K^* che può assumere il parametro K e che garantisce la stabilità del sistema retroazionato si determina imponendo $M_F = 0$ nella precedente relazione:

$$K^* = \omega_0 = \frac{\pi}{2t_0} = \omega^*$$

$$K = \frac{1}{t_0} \left(\frac{\pi}{2} - M_F \right) .$$



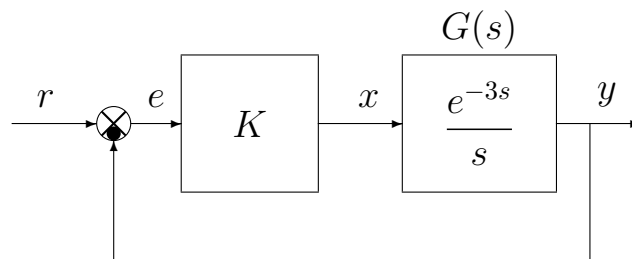
L'introduzione del polo nell'origine consente di ridurre a zero l'errore a regime nella risposta al gradino e costituisce, nella pratica, un accorgimento frequentemente adottato per la stabilizzazione dei sistemi in retroazione che presentino ritardi finiti di notevole entità.

Esempi di possibili domande

1. Scrivere il margine di ampiezza K^* e la pulsazione ω^* di attraversamento del semiasse reale negativo del seguente sistema a ritardo finito:

$$G(s) = \frac{e^{-t_0 s}}{\alpha s} \quad \rightarrow \quad K^* = \frac{\alpha \pi}{2 t_0} \quad \omega^* = \frac{\pi}{2 t_0}$$

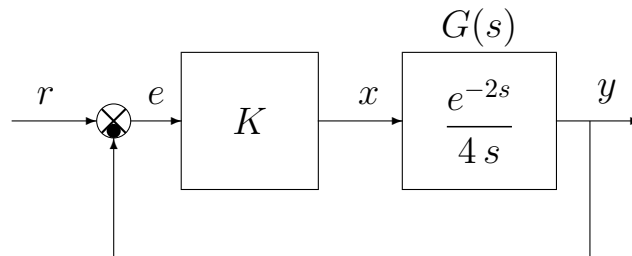
2. Sia dato il seguente sistema retroazionato. Per quale valore di K il sistema retroazionato è stabile con un margine di fase $M_\varphi = 45^\circ$?



Risposta:

$$K = \frac{1}{t_0} \left(\frac{\pi}{2} - M_\varphi \right) = \frac{\pi}{12} = 2.356$$

3. Sia dato il seguente sistema retroazionato. Per quale valore di K il sistema retroazionato è stabile con un margine di fase $M_\varphi = 60^\circ$?



Risposta:

$$K = \frac{4}{t_0} \left(\frac{\pi}{2} - M_\varphi \right) = \frac{4}{2} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} \right) = \frac{\pi}{3} = 1.0472$$