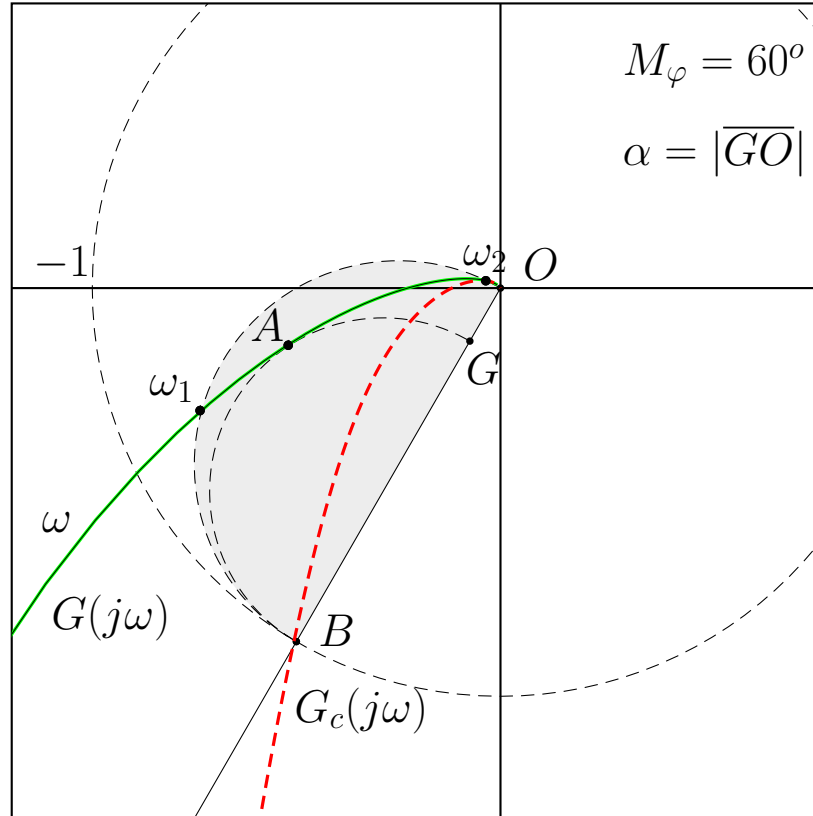


## Sintesi sul piano di Nyquist

a) Sintesi di una rete anticipatrice. Specifica: margine di fase  $M_\varphi = 60^\circ$ .



- Sistema  $G(s)$  e rete correttrice  $C(s)$ :

$$G(s) = \frac{25}{s(s+1)(s+10)}, \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{(1+0.806s)}{(1+0.117s)}$$

- Per portare il punto  $A$

$$A = G(j\omega_A) = M_A e^{j\varphi_A}, \quad \rightarrow \quad M_A = 0.538 \quad \varphi_A = 194.9^\circ$$

nel punto  $B$

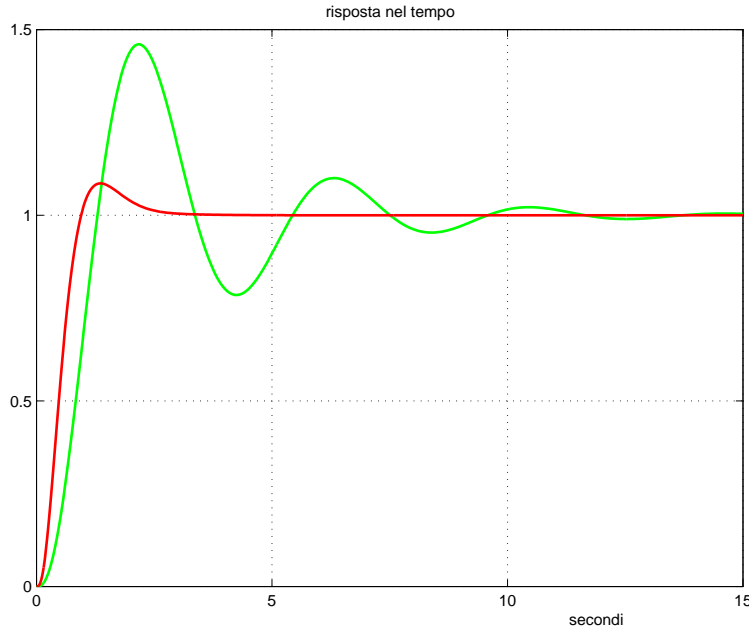
$$B = e^{j(\pi+M_\varphi)} \quad \rightarrow \quad M_B = 1, \quad \varphi_B = \pi + M_\varphi = 240^\circ$$

la rete anticipatrice deve amplificare e anticipare di

$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{0.538} = 1.8587, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 45.1^\circ$$

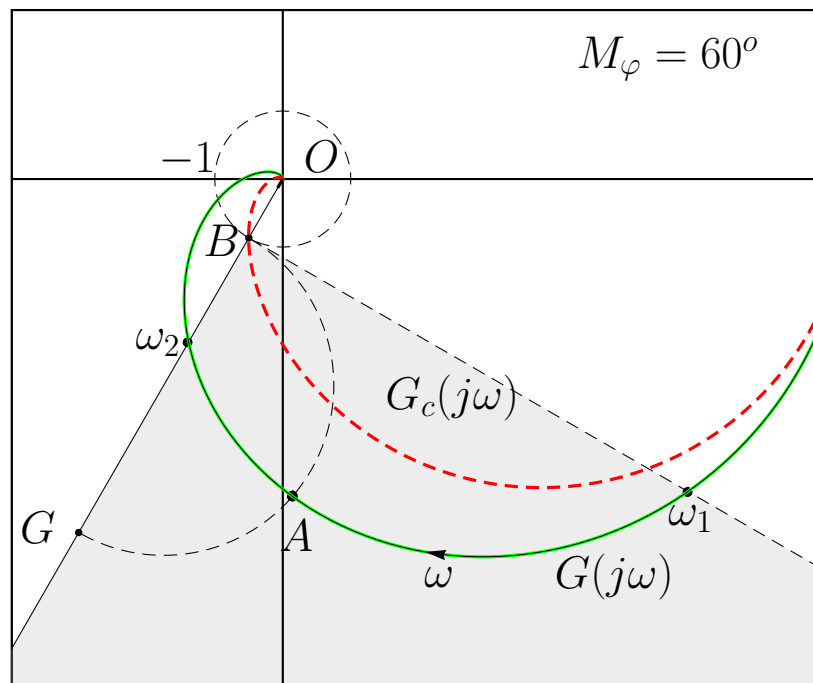
- Sostituendo i parametri  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega_A = 2.02$  nelle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri cercati:  $\tau_1 = 0.806$  e  $\tau_2 = 0.117$ .

- Risposte temporali dei sistemi  $G(s)$  e  $C(s)G(s)$  retroazionati:



L'utilizzo di una rete anticipatrice ha migliorato sia il transitorio (diminuendo la sovralongazione) che la larghezza di banda del sistema retroazionato (il tempo di salita è più basso).

- b) Sintesi di una rete ritardatrice. Specifica: margine di fase  $M_\varphi = 60^\circ$ .



- Sistema  $G(s)$  e rete correttiva  $C(s)$ :

$$G(s) = \frac{5000}{(s+1)(s+2)(s+10)(s+30)}, \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{(1+1.04s)}{(1+6.25s)}$$

- Per portare il punto  $A$

$$A = G(j\omega_A) = M_A e^{j\varphi_A}, \quad \rightarrow \quad M_A = 4.672, \quad \varphi_A = 271.82^\circ$$

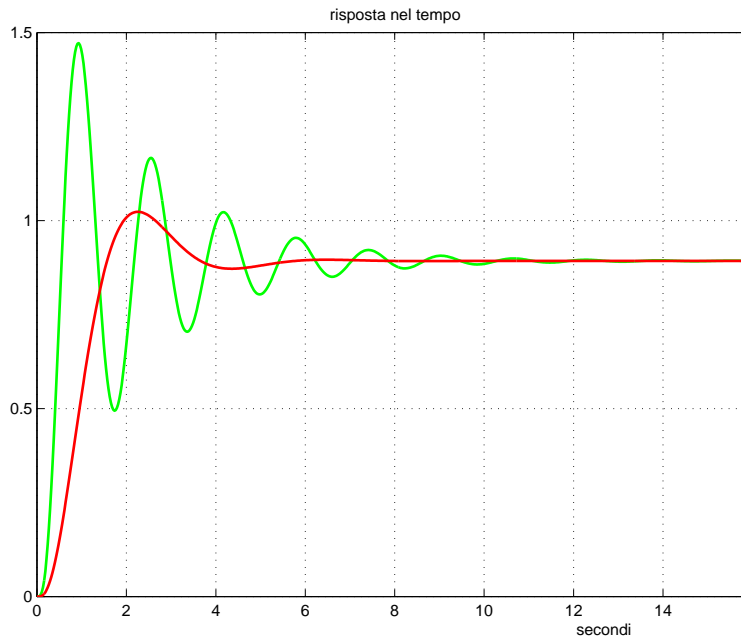
nel punto  $B$

$$B = e^{j(\pi + M_\varphi)} \quad \rightarrow \quad M_B = 1, \quad \varphi_B = \pi + M_\varphi = 240^\circ$$

la rete corretttrice deve attenuare e ritardare di

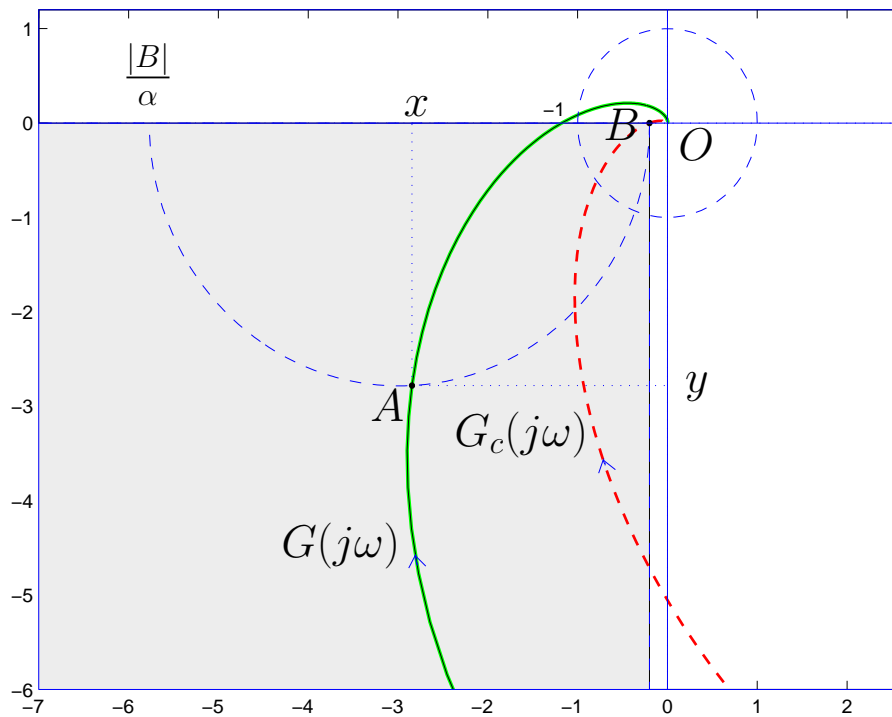
$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{4.672} = 0.214, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -31.82^\circ$$

- Sostituendo i parametri  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega_A = 1.16$  nelle formule di inversione si ottengono i seguenti valori dei parametri cercati:  $\tau_1 = 1.04$  e  $\tau_2 = 6.25$ .
- Risposte temporali dei sistemi  $G(s)$  e  $C(s)G(s)$  retroazionati:



L'utilizzo di una rete ritardatrice ha migliorato il tempo di assestamento  $T_a$ , ha abbassato la massima sovraelongazione percentuale  $S\%$ , ma ha diminuito la larghezza di banda  $\omega_{f0}$  del sistema retroazionato (tempo di salita più elevato nella risposta al gradino).

c) Sintesi di una rete ritardatrice. Specifica: margine di ampiezza  $M_\alpha = 5$ .



- Sistema  $G(s)$  e rete corretttrice  $C(s)$ :

$$G(s) = \frac{10000}{(s+1)(s+2)(s+10)(s+30)}, \quad \rightarrow \quad C(s) = \frac{(1+0.396s)}{(1+11.42s)}$$

- Per portare il punto  $A = G(j\omega_A) = M_A e^{j\varphi_A}$

$$M_A = \sqrt{x^2 + y^2} = 3.978, \quad \varphi_A = \pi - \arctan \frac{y}{|x|} = 224.4^\circ$$

nel punto  $B$

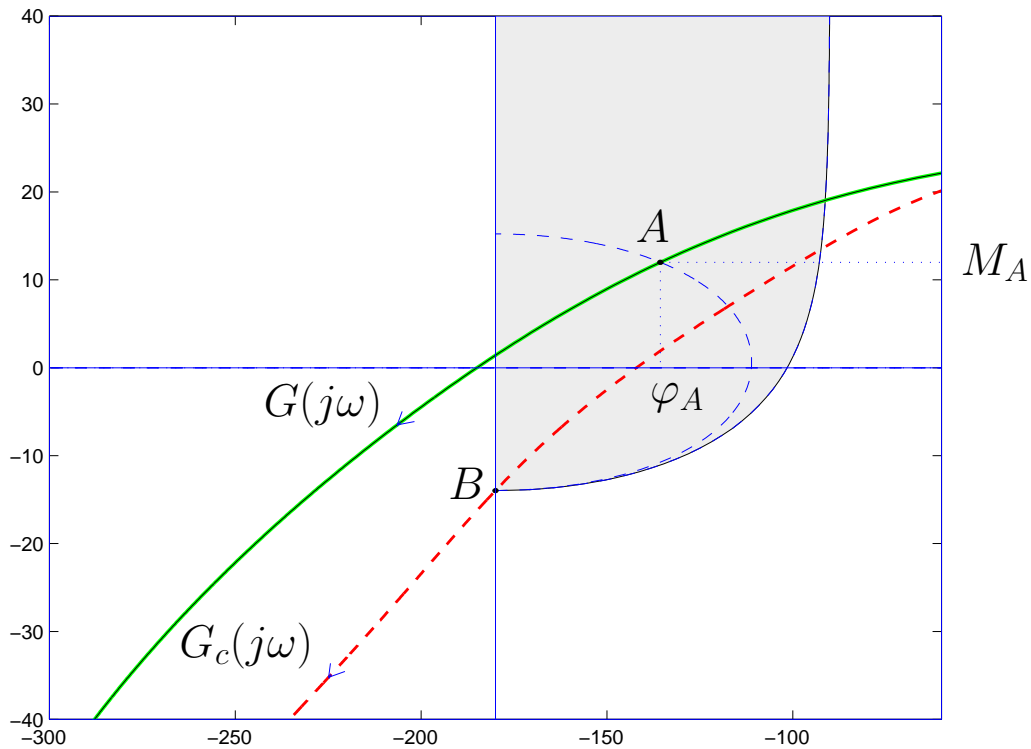
$$B = -\frac{1}{M_\alpha} \quad \rightarrow \quad M_B = \frac{1}{M_\alpha} = \frac{1}{5}, \quad \varphi_B = -\pi$$

la rete corretttrice deve attenuare e ritardare di

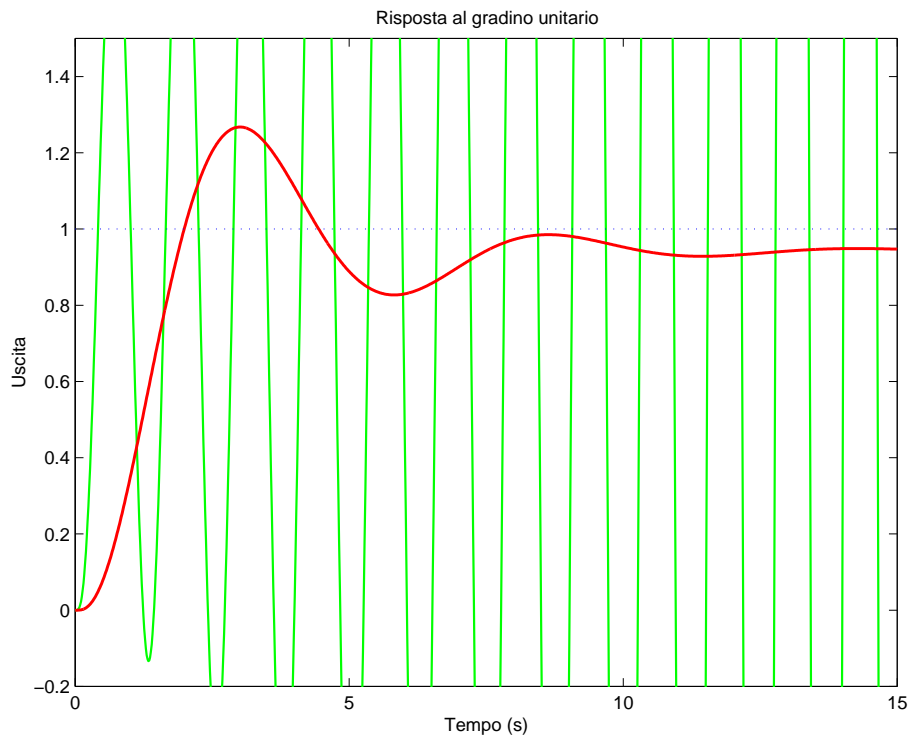
$$M = \frac{M_B}{M_A} = \frac{1}{M_A M_\alpha} = 0.0503, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -44.4^\circ$$

- Sostituendo i parametri  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega_A = 2.4$  nelle formule di inversione si ottengono i seguenti valori dei parametri cercati:  $\tau_1 = 0.396$  e  $\tau_2 = 11.42$ .

- Sintesi della stessa rete corretttrice sul piano di Nichols:

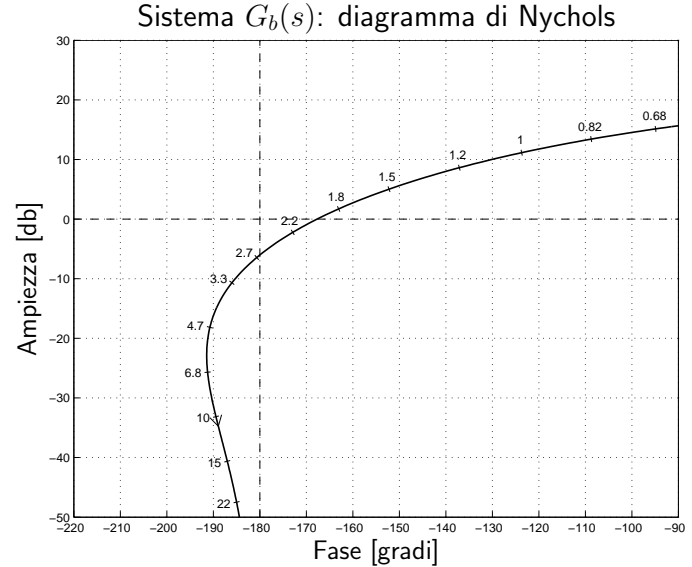
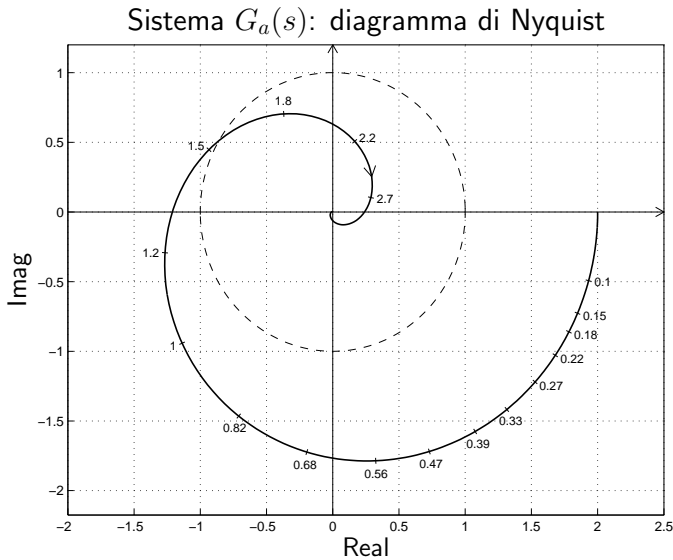


- Risposte al gradino unitario del sistema retroazionato **senza** e **con** rete corretttrice:



- Il sistema retroazionato, inizialmente instabile, viene stabilizzato utilizzando la rete corretttrice.

**Esempio.** Siano date le seguenti funzioni di risposta armonica dei sistemi  $G_a(s)$  e  $G_b(s)$ :



- 1) Per il sistema  $G_a(s)$ , progettare una rete corretttrice  $C(s)$  in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza  $M_a = 5$ . Scegliere il valore della pulsazione  $\omega$  che si ritiene più opportuno;

*Soluzione.* La specifica sul margine di ampiezza  $M_a = 5$  definisce completamente la posizione del punto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$ :

$$M_B = \frac{1}{M_a} = 0.2, \quad \varphi_B = -180^\circ$$

La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 1. Il punto  $A = G_b(j\omega_A)$  scelto per la sintesi della rete corretttrice è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 1.2$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 1.3, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -167^\circ.$$

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega = \omega_A$  all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 3.038$  e  $\tau_2 = 20.46$  della rete corretttrice  $C_1(s)$ :

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.1539, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -13^\circ \quad \rightarrow \quad C_1(s) = \frac{(1 + 3.038 s)}{(1 + 20.46 s)}.$$

Il diagramma di Myquist delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$  sono mostrati in Fig. 1.

- 2) Per il sistema  $G_b(s)$  progettare una rete anticipatrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di fase  $M_\varphi = 50^\circ$ . Scegliere il valore della pulsazione  $\omega$  che si ritiene più opportuno;

*Soluzione.* La posizione del punto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$  è completamente determinata dalla specifica di progetto:  $M_B = 0 \text{ db} = 1$  e  $\varphi_B = -130^\circ$ . La regione di ammissibilità è mostrata in grigio in Fig. 2. Il punto  $A = G_a(j\omega_A)$  scelto per il progetto è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 4.7$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.1237, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -190.7^\circ.$$

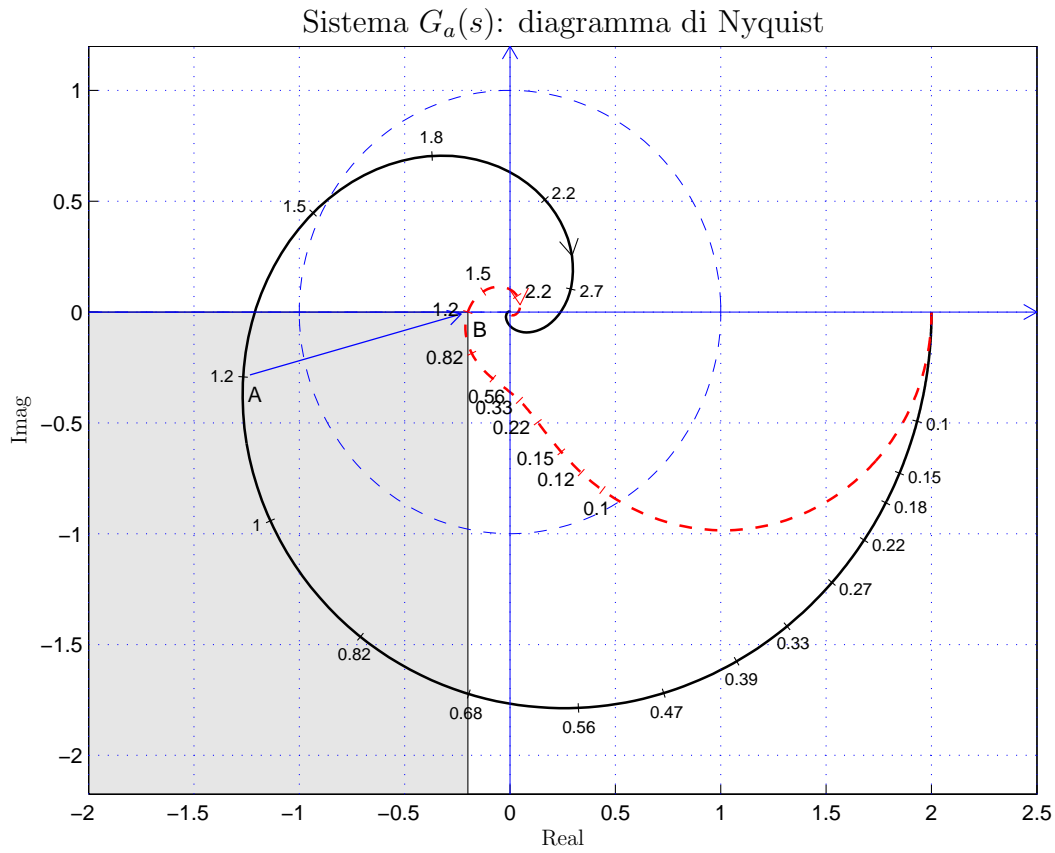


Figura 1: Diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$ .

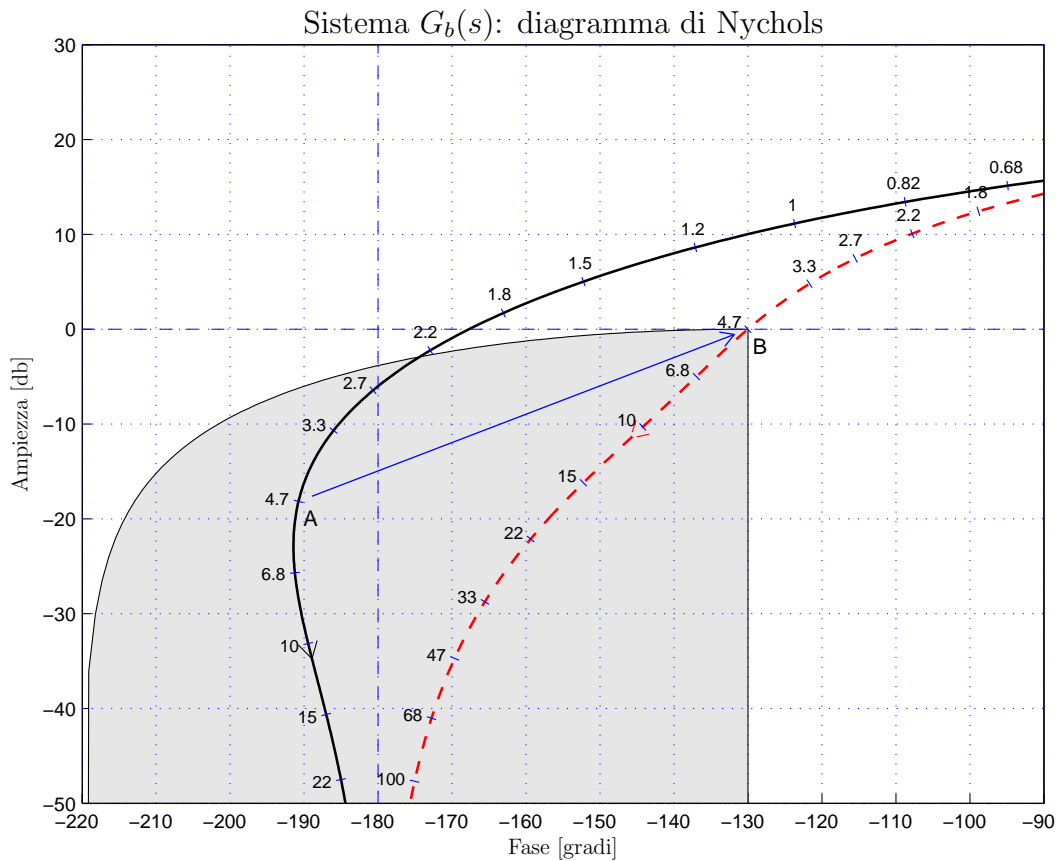


Figura 2: Diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G_b(s)$  e  $C_2(s)G_b(s)$ .

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 1.852$  e  $\tau_2 = 0.08905$  della rete correttiva  $C_2(s)$ :

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 8.084, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = 60.7^\circ \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{(1 + 1.852 s)}{(1 + 0.08905 s)}.$$

Il diagramma di Nyquist delle funzioni  $G_b(s) C_2(s) G_b(s)$  sono mostrati in Fig. 2.

- 3) **Sempre per il sistema  $G_b(s)$  progettare una rete ritardatrice in grado di garantire al sistema compensato un margine di ampiezza  $M_a = 10$ . Scegliere il valore della pulsazione  $\omega$  che si ritiene più opportuno;**

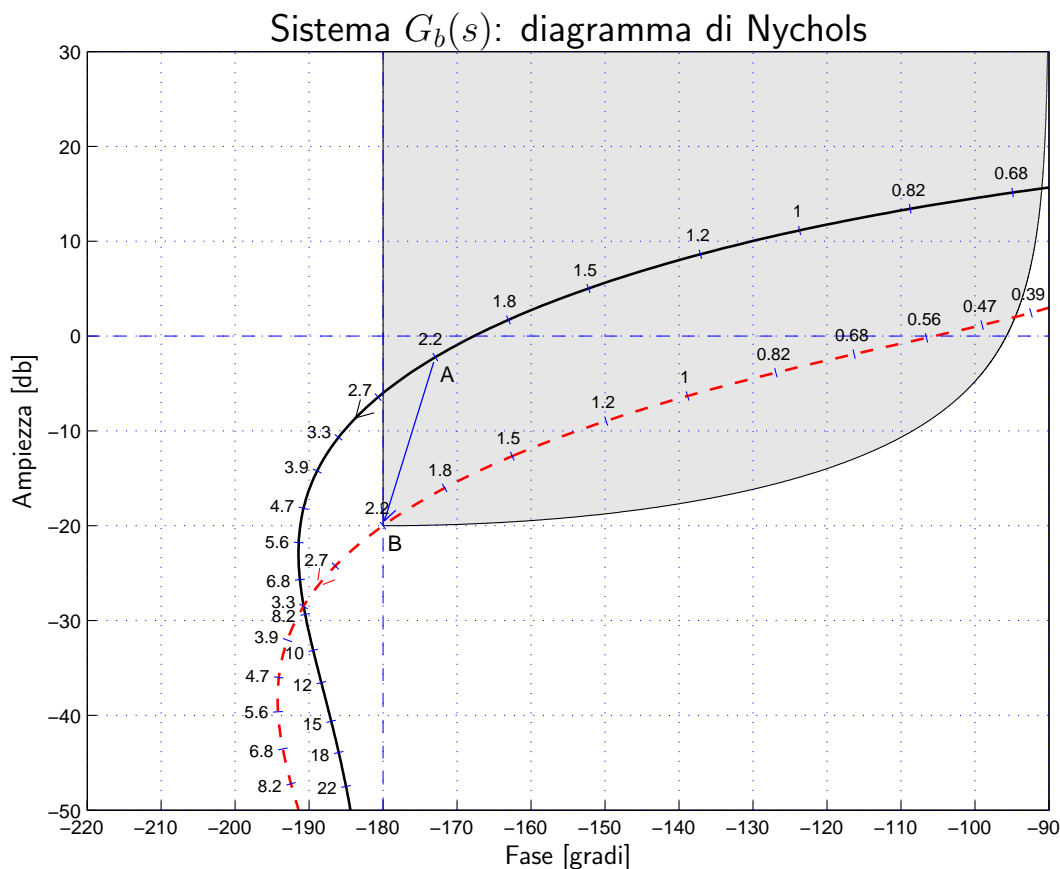
*Soluzione.* La specifica sul margine di ampiezza  $M_a = 10$  definisce completamente la posizione del punto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$ :  $M_B = 0.1$  e  $\varphi_B = -180^\circ$ . La regione ammissibile è mostrata in grigio nella figura in calce. Il punto  $A = G(j\omega_A)$  che deve essere portato in  $B$  è quello assegnato corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 2.2$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 0.774, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -172.9^\circ.$$

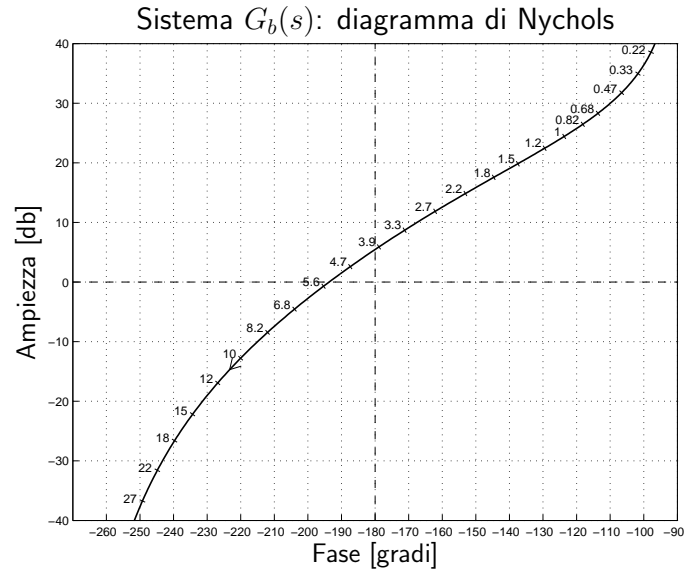
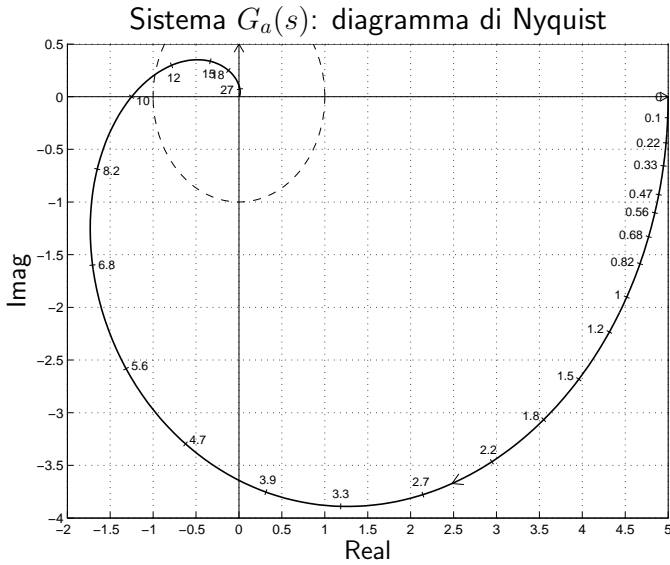
Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 3.183$  e  $\tau_2 = 24.88$  della rete correttiva  $C_3(s)$ :

$$M = \frac{M_B}{M_{A'}} = 0.1292, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_{A'} = -7.08^\circ \quad \rightarrow \quad C_3(s) = \frac{(1 + 3.183 s)}{(1 + 24.88 s)}.$$

I diagrammi di Nichols delle funzioni  $G_b(s)$ ,  $K G_b(s)$  e  $K C_3(s) G_b(s)$  sono i seguenti:



**Esempio.** Siano date le seguenti funzioni di risposta armonica dei sistemi  $G_a(s)$  e  $G_b(s)$ :



1) Per il sistema  $G_a(s)$ , progettare una rete correttiva  $C(s)$  in grado di far passare la funzione di risposta armonica del sistema  $C(s)G_a(s)$  per il punto  $B$  caratterizzato dalle seguenti coordinate:  $B = (-0.4, -0.4)$ .

*Soluzione.* La specifica definisce completamente la posizione del punto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$ :

$$M_B = \sqrt{0.4^2 + 0.4^2} = 0.5657, \quad \varphi_B = -135^\circ$$

La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 3.

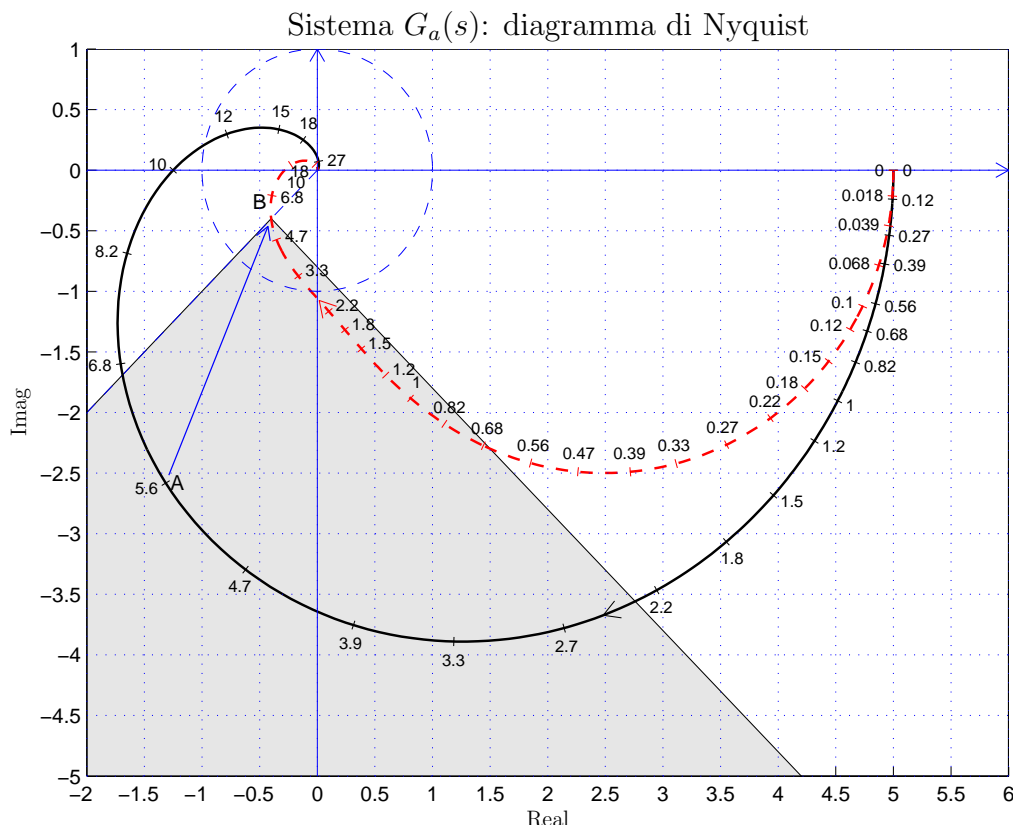


Figura 3: Diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$ .

Il punto  $A = G_b(j\omega_A)$  scelto per la sintesi della rete corretttrice è quello corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 5.6$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 2.898, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -117^\circ.$$

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega = \omega_A$  all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 0.4366$  e  $\tau_2 = 2.41$  della rete corretttrice  $C_1(s)$ :

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.1952, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -18^\circ \rightarrow C_1(s) = \frac{(1 + 0.4366 s)}{(1 + 2.41 s)}.$$

Il diagramma di Nyquist delle funzioni  $G_a(s)$  e  $C_1(s)G_a(s)$  sono mostrati in Fig. 3.

- 2) Per il sistema  $G_b(s)$ , progettare i parametri  $K$ ,  $\tau_1$  e  $\tau_2$  di una rete corretttrice  $C(s) = K \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$  in modo da garantire al sistema compensato un margine di fase  $M_\varphi = 50^\circ$  e una larghezza di banda del sistema retroazionato  $\omega_{f0} = 2.7$ ;

*Soluzione.* La specifica sul margine fase  $M_\varphi = 50^\circ$  definisce completamente la posizione del punto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$ :  $M_B = 1$  e  $\varphi_B = 230^\circ = -130^\circ$ . La regione ammissibile è mostrata in grigio in Fig. 4.

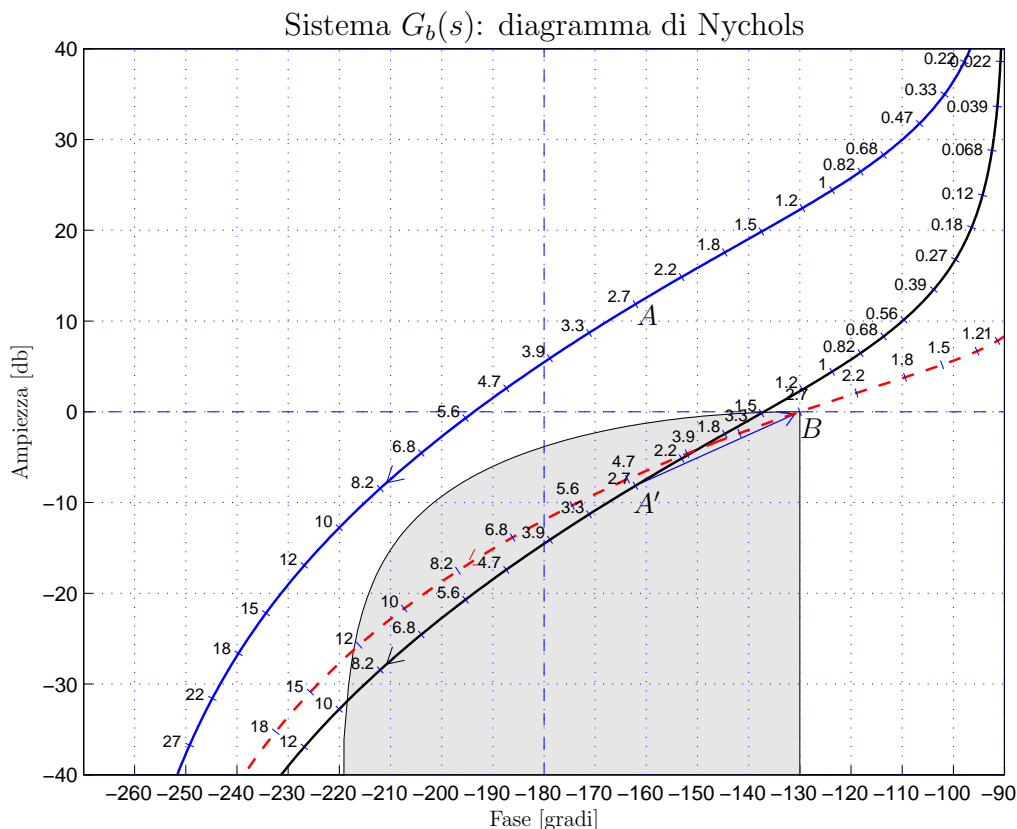


Figura 4: Diagrammi di Nyquist delle funzioni  $G_b(s)$ ,  $K G_b(s)$  e  $K C_3(s) G_b(s)$ .

Il punto  $A = G(j\omega_A)$  che deve essere portato in  $B$  è quello assegnato corrispondente alla pulsazione  $\omega_A = 2.7$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 3.917, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -162.12^\circ.$$

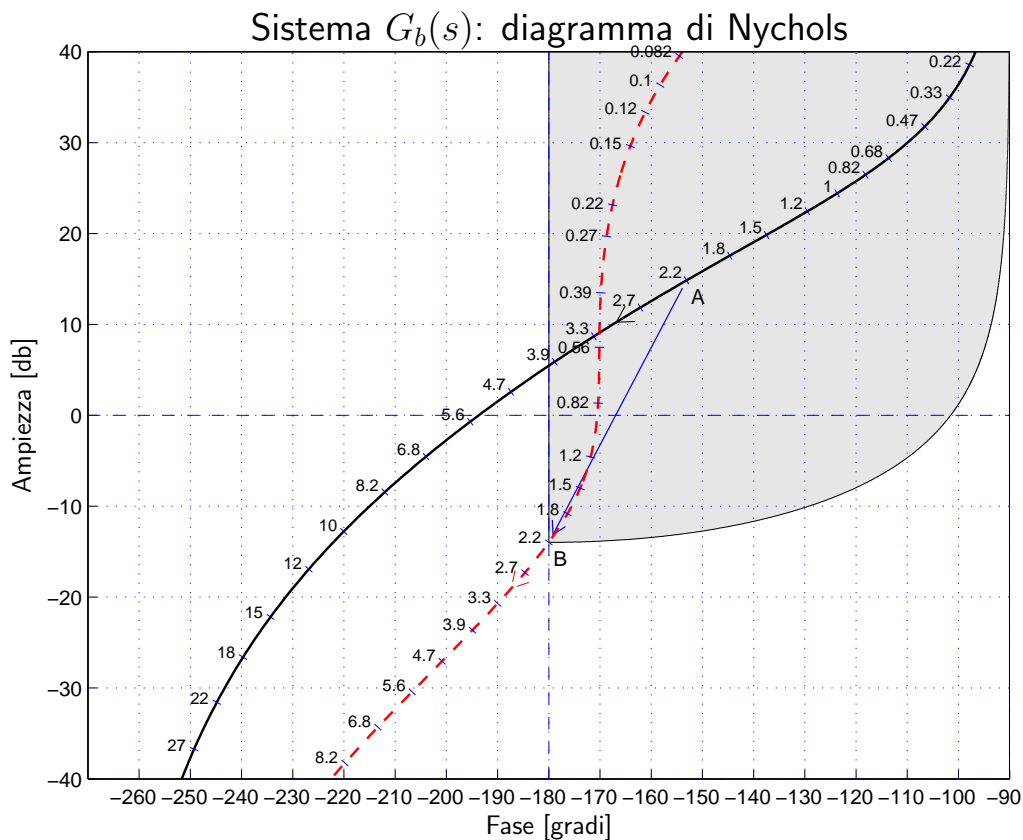
Tale punto può essere portato in  $B$  usando una rete anticipatrice solamente se il parametro  $K$  viene scelto in modo che il punto  $A' = K A$  appartenga alla regione di ammissibilità. In questo caso si sceglie  $K = 0.1$  e si ottiene  $M_{A'} = 0.3917$ . I valori di  $M$  e  $\varphi$  da usare nelle formule di inversione vanno ora calcolati utilizzando i punti  $A'$  e  $B$ :

$$M = \frac{M_B}{M_{A'}} = 2.5533, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_{A'} = 32.12^\circ \quad \rightarrow \quad C_3(s) = \frac{(1 + 1.189 s)}{(1 + 0.3171 s)}.$$

Sostituendo tali valori all'interno delle formule di inversione si ottengono i parametri  $\tau_1 = 1.189$  e  $\tau_2 = 0.3171$ .

- 3) Per il sistema  $G_b(s)$  progettare una rete ritardatrice in grado da garantire al sistema compensato un margine di ampiezza  $M_a = 5$ .

*Soluzione.* La posizione del punto  $B = M_B e^{j\varphi_B}$  è completamente determinata dalla specifica di progetto:  $M_B = 1/M_a = 0.2 = 14$  db e  $\varphi_B = -180^\circ$ . La regione di ammissibilità è mostrata in grigio nella seguente figura:



Il punto  $A = G_a(j\omega_A)$  scelto per il progetto è quello a pulsazione  $\omega_A = 2.2$ :

$$M_A = |G(j\omega_A)| = 5.528, \quad \varphi_A = \arg[G(j\omega_A)] = -153.1^\circ.$$

Sostituendo i valori di  $M$ ,  $\varphi$  e  $\omega$  all'interno delle formule di inversione si ottengono i valori dei parametri  $\tau_1 = 0.8597$  e  $\tau_2 = 26.87$  della rete corretttrice  $C_2(s)$ :

$$M = \frac{M_B}{M_A} = 0.0361, \quad \varphi = \varphi_B - \varphi_A = -26.9^\circ \quad \rightarrow \quad C_2(s) = \frac{(1 + 0.8597 s)}{(1 + 26.87 s)}.$$