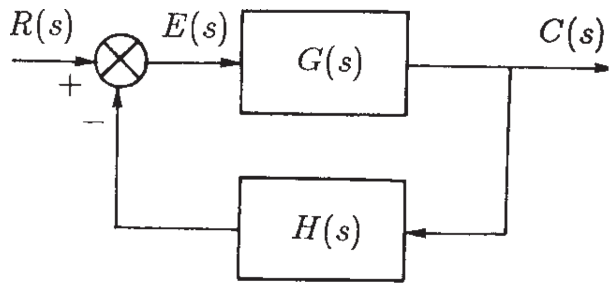
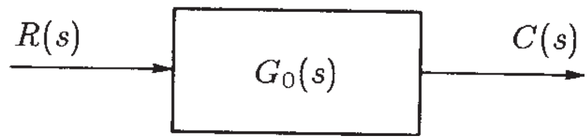
Proprietà generali dei sistemi in retroazione

- Sistema in retroazione e sua forma minima:





- Significato dei simboli:

  $r(t)$: *segnale di riferimento (o "set point")* ;

  $c(t)$: *variabile controllata*;

  $e(t)$: *segnale errore*;

  $G(s)$: *funzione di trasferimento del percorso diretto*;

  $H(s)$: *funzione di trasferimento del percorso in retroazione*;

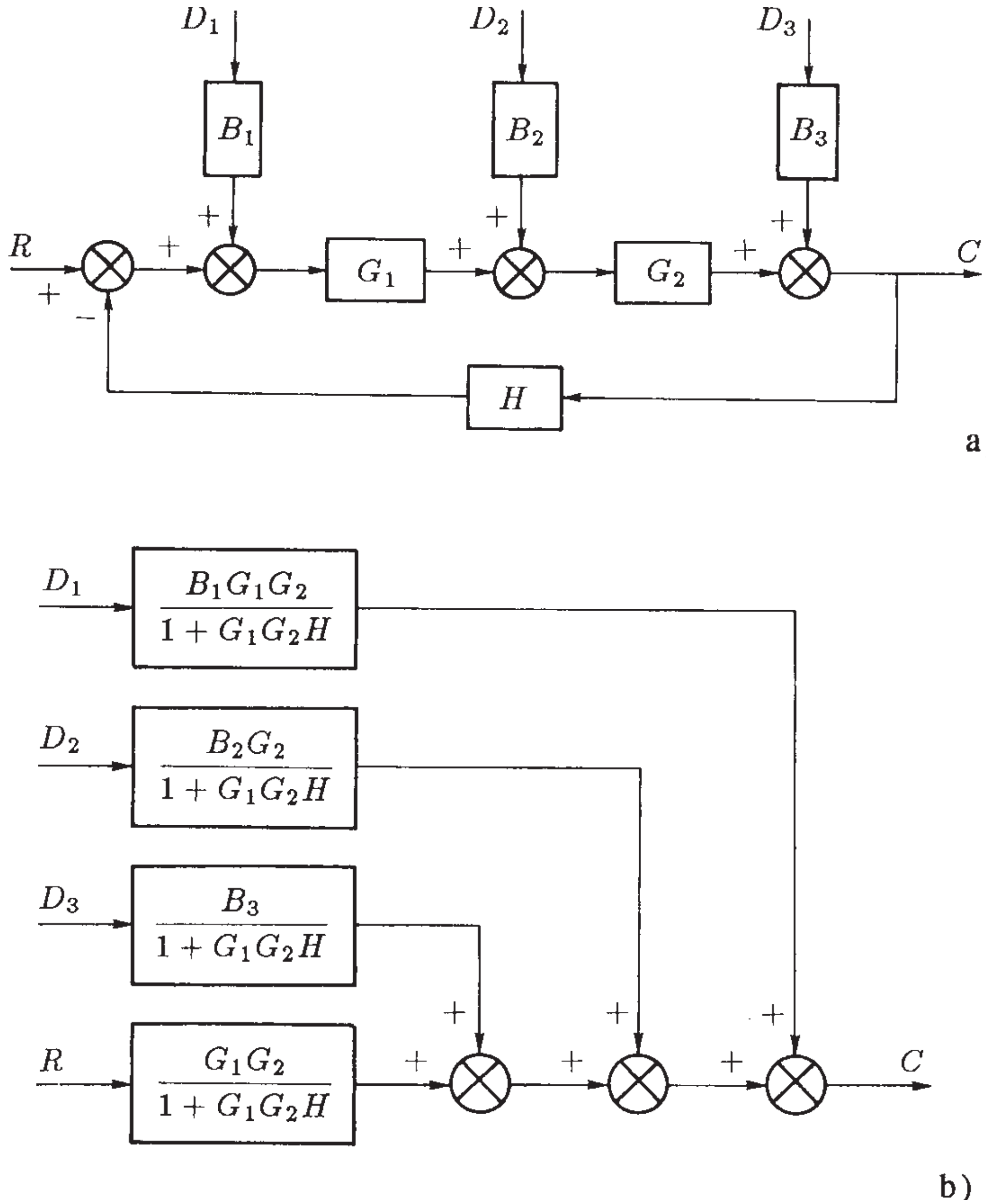
  $G(s)\,H(s)$: *guadagno di anello.*

- Funzione di trasferimento del sistema in forma minima:

$$G_0(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)\,H(s)}$$

- Questa è la situazione teorica in assenza di disturbi e di variazioni parametriche

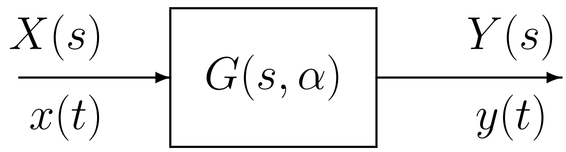
- Spesso accade che si abbiano sistemi a più ingressi (per esempio ingressi di disturbo) agenti in vari punti dell'anello.
- In questo caso la riduzione in forma minima viene fatta nel modo seguente:



- Nota: tutte le funzioni di trasferimento hanno lo stesso denominatore.

Sensibilità alla variazione di parametri

- Si faccia riferimento al sistema in catena aperta, cioé senza retroazione:



- Indichiamo con α un parametro della funzione di trasferimento $G(s)$ che subisca una piccola variazione $\Delta\alpha$ rispetto al valore nominale α_0. Sia $G(s) = G(s,\alpha_0)$ la funzione di trasferimento "nominale". La nuova funzione di trasferimento si può scrivere, in prima approssimazione

  $$G(s,\alpha) = G(s,\alpha_0+\Delta\alpha) \simeq G(s) + \Delta G(s)$$

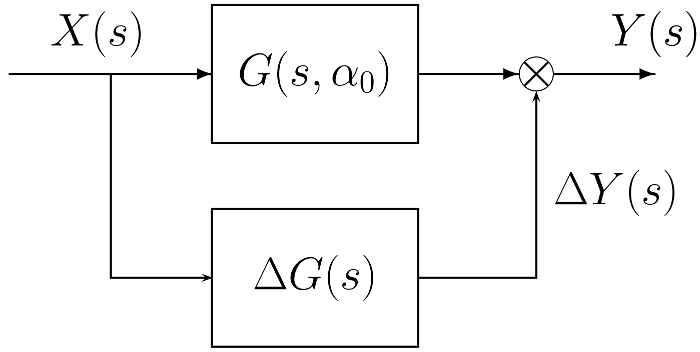
  in cui per semplicità di notazione si è posto

  $$\Delta G(s) = \left.\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha$$

- Sia $X(s)$ la trasformata di Laplace del segnale d'ingresso $x(t)$. La trasformata del segnale di uscita puó essere espressa nel seguente modo:

  $$Y(s) = G(s,\alpha)\,X(s) \simeq G(s,\alpha_0)\,X(s) + \underbrace{\Delta G(s)\,X(s)}_{\Delta Y(s)}$$

- La variazione del parametro α porta a una variazione dell'uscita la cui trasformata, in prima approssimazione, può esprimersi come $\Delta Y(s) = \Delta G(s)\,X(s)$.



- Nei sistema in catena aperta la variazione $\Delta Y(s)$ del segnale di uscita é proporzionale alla variazione $\Delta\alpha$ del parametro stesso e puó essere anche di ampiezza paragonabile a quella del segnale di uscita $Y(s)$.

- Nei sistemi in retroazione, l'effetto della variazione di un parametro è diverso a seconda che il parametro si trovi nella catena diretta $G(s)$ o nel percorso di retroazione $H(s)$.

- Nei sistemi retroazionati, una variazione $\Delta\alpha$ di un parametro α della funzione di trasferimento $G(s)$ della catena diretta produce generalmente una variazione della funzione di trasferimento complessiva $G_0(s)$ molto minore.

- La variazione $\Delta\alpha$ di un parametro α all'interno della funzione di trasferimento $G(s)$ determina una variazione $\Delta G_0(s)$ della funzione di trasferimento $G_0(s)$ del sistema retroazionato che puó essere espressa nel seguente modo:

$$\Delta G_0(s) = \left.\frac{\partial G_0}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha = \frac{\partial G_0}{\partial G} \underbrace{\left.\frac{\partial G}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=\alpha_0} \Delta\alpha}_{\Delta G(s)} = \frac{\partial G_0}{\partial G}\, \Delta G(s)$$

$$= \frac{\partial}{\partial G}\left(\frac{G}{1+G\,H}\right) \Delta G(s) = \frac{1+G\,H-G\,H}{(1+G\,H)^2}\, \Delta G(s)$$

$$= \frac{G}{(1+G\,H)^2}\, \frac{\Delta G(s)}{G} = \frac{G_0(s)}{1+G(s)\,H(s)}\, \frac{\Delta G(s)}{G(s)}$$

- Dalla precedente relazione si ottiene:

$$\boxed{\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{1}{1+G(s)\,H(s)}\, \frac{\Delta G(s)}{G(s)}}$$

cioé la variazione relativa $\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)}$ del sistema retroazionato é legata alla variazione relativa $\frac{\Delta G(s)}{G(s)}$ del sistema $G(s)$ mediante un coefficiente $\frac{1}{1+G(s)\,H(s)}$ che puó essere anche molto piccolo se il guadagno di anello $G(s)\,H(s)$ é in modulo molto grande.

- Per tutte le pulsazioni per le quali vale la condizione

$$|G(j\omega)\, H(j\omega)| \gg 1 \ ,$$

si ha che

$$\frac{|\Delta G_0(j\omega)|}{|G_0(j\omega)|} \ll \frac{|\Delta G(j\omega)|}{|G(j\omega)|}$$

cioé l'errore relativo dovuto alla variazione di un parametro α all'interno di $G(s)$ e per le frequenze per le quali il guadagno di anello è sufficientemente elevato è molto minore nel sistema retroazionato che non nel sistema ad anello aperto.

- Una variazione $\Delta\beta$ di un parametro β all'interno della funzione $H(s)$ del percorso di retroazione produce invece in $G_0(s)$ una variazione relativa $\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s}$ che é dello stesso ordine di grandezza della variazione relativa $\frac{\Delta H(s)}{H(s}$ subita dalla funzione di trasferimento $H(s)$. Valgono infatti le seguenti relazioni:

$$\Delta G_0(s) = \left.\frac{\partial G_0}{\partial \beta}\right|_{\beta=\beta_0} \Delta\beta = \frac{\partial G_0}{\partial H} \underbrace{\left.\frac{\partial H}{\partial \beta}\right|_{\beta=\beta_0} \Delta\beta}_{\Delta H(s)} = \frac{\partial G_0}{\partial H}\, \Delta H(s)$$

$$= \frac{\partial}{\partial H}\left(\frac{G}{1+G\,H}\right) \Delta H(s) = \frac{-G^2}{(1+G\,H)^2}\, \Delta H(s)$$

$$= \frac{-G^2\, H}{(1+G\,H)^2}\, \frac{\Delta H(s)}{H} = \frac{-G(s)\, H(s)\, G_0(s)}{1+G(s)\, H(s)}\, \frac{\Delta H(s)}{H(s)}$$

- Nel caso di una variazione $\Delta\beta$ di un parametro di $H(s)$ si ha che:

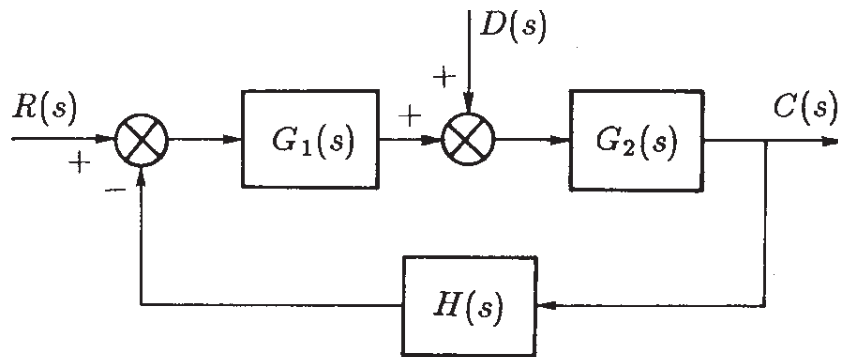
$$\boxed{\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)} = \frac{-G(s)\, H(s)}{1+G(s)\, H(s)}\, \frac{\Delta H(s)}{H(s)}}$$

cioè gli errori relativi $\frac{\Delta G_0(s)}{G_0(s)}$ e $\frac{\Delta H(s)}{H(s)}$ sono dello stesso ordine di grandezza:

$$\frac{|\Delta G_0(j\omega)|}{|G_0(j\omega)|} \simeq \frac{|\Delta H(j\omega)|}{|H(j\omega)|}$$

Sensibilità ai disturbi esterni

- Sia $d(t)$ un disturbo che agisce in un punto della catena di amplificazione diretta, in un sistema di controllo in retroazione:



- In assenza e in presenza di retroazione le variazioni dell'uscita $C(s)$ dovute al disturbo sono rispettivamente:

$$\begin{aligned}\Delta C'_d(s) &= G_2(s)\, D(s)\ ,\\ \Delta C''_d(s) &= \frac{G_2(s)}{1+G(s)\,H(s)}\, D(s) \qquad \text{con} \qquad G(s)=G_1(s)\,G_2(s).\end{aligned}$$

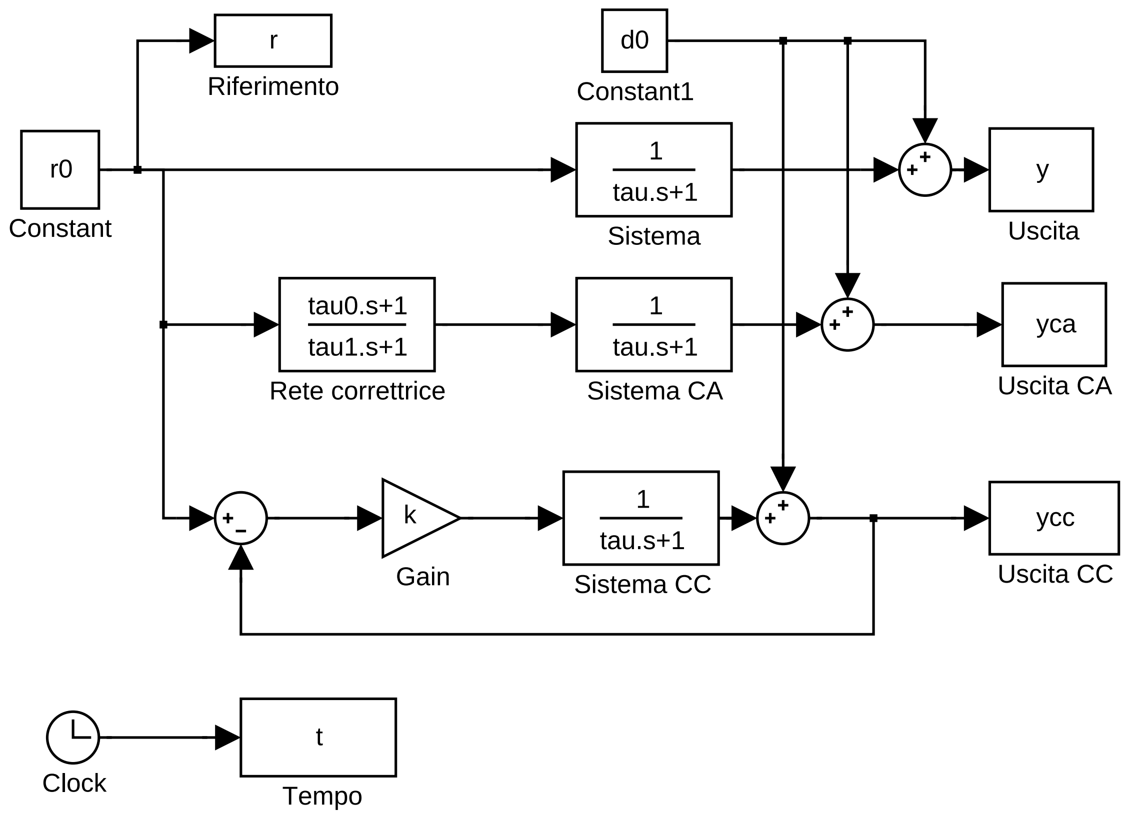
- Quindi, in presenza di retroazione il contributo del disturbo sull'uscita si è ridotto di un fattore $|1+G(j\omega)\,H(j\omega)|$. In corrispondenza delle frequenze per le quali vale la seguente relazione (elevato guadagno di anello):

$$|G(j\omega)\,H(j\omega)| \gg 1$$

  l'influenza del disturbo $d(t)$ sull'uscita $c(t)$ é molto piú piccola rispetto al caso di sistema ad anello aperto.

- In generale, quindi, i sistemi retroazionati risultano essere "*robusti*" sia a variazioni parametriche $\Delta\alpha$ del sistema $G(s)$ che alla presenza di disturbi esterni, se il guadagno di anello del sistema $|G(j\omega)\,H(j\omega)|$ è elevato alle pulsazione ω a cui agisce il disturbo.

Esempio. Si faccia riferimento al seguenti schema Simulink:



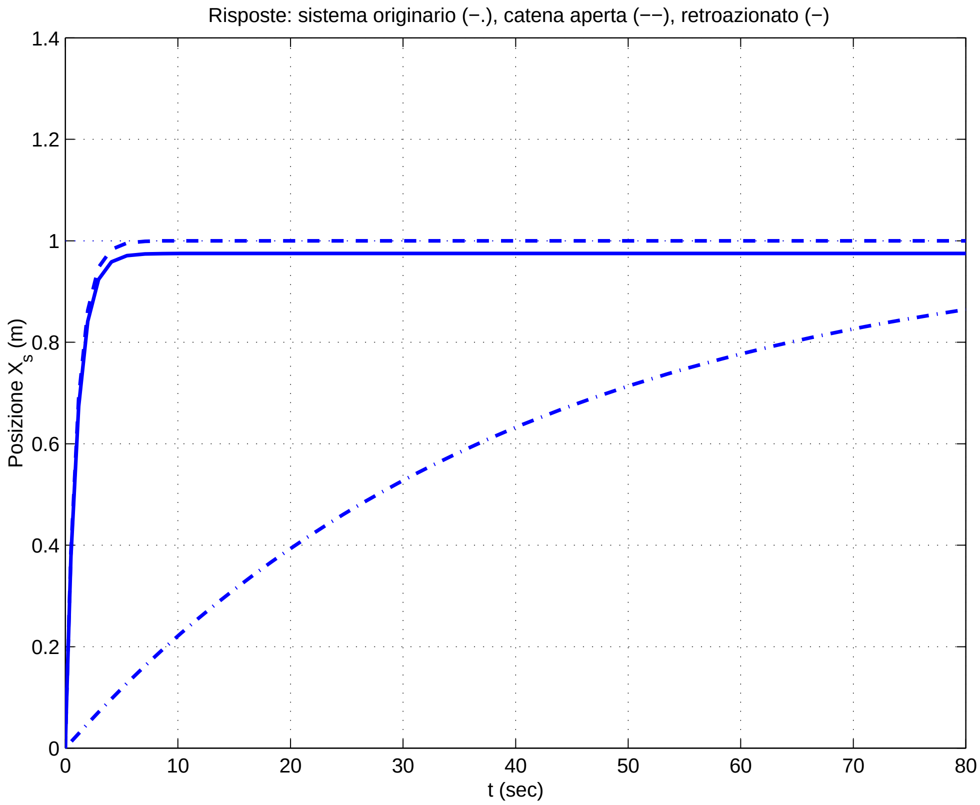
Per il sistema retroazionato valgono le seguenti relazioni:

$$G_0(s) = \frac{k}{1+k+\tau\, s} = \frac{\frac{k}{1+k}}{1+\frac{\tau}{1+k}\, s} = \frac{k_1}{1+\tau_1\, s} \qquad \Leftrightarrow \qquad k = \frac{\tau}{\tau_1} - 1.$$

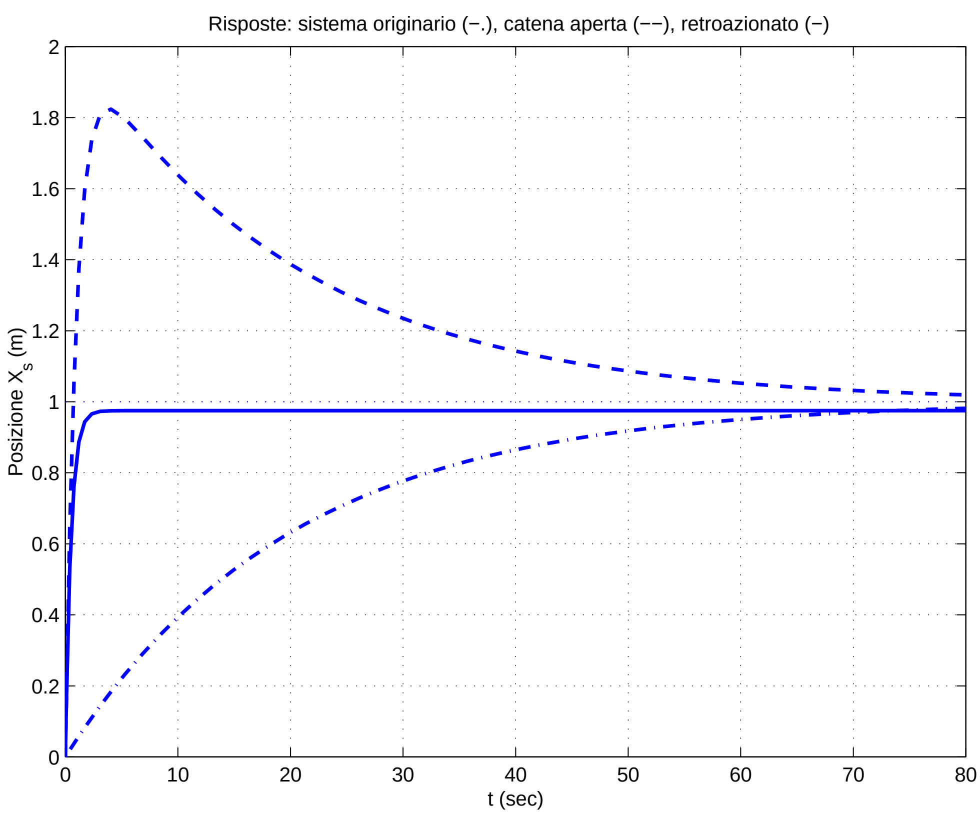
Tale schema viene attivato dalla seguente funzione Matlab (variazione.m):

```
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%   variazione.M                                                        %
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
r0=1;           % ampiezza del gradino
d0=0.0;         % disturbo sull'uscita
tau=40;         % valore nominale della costante di tempo del sistema
tau0=tau;       % valore REALE della costante di tempo del sistema
tau1=1;         % costante di tempo desiderata dal sistema controllato
k=tau/tau1 -1;  % valore del guadagno che garantisce la costante di tempo desiderata
tfin=2*tau ;    % durata della simulazione
sim('variazionemdl',tfin);      % simulazione del sistema
figure(1); clf;
lw=1.8;         % Spessore della linea
plot(t,r,':'); hold on
plot(t,y,'-.','linewidth',lw);
plot(t,yca,'--','linewidth',lw);
plot(t,ycc,'-','linewidth',lw);
title('Risposte: sistema originario (-.), catena aperta (--), retroazionato (-)');
xlabel('t (sec)');  ylabel('Posizione X_s (m)');
grid on; zoom on
```

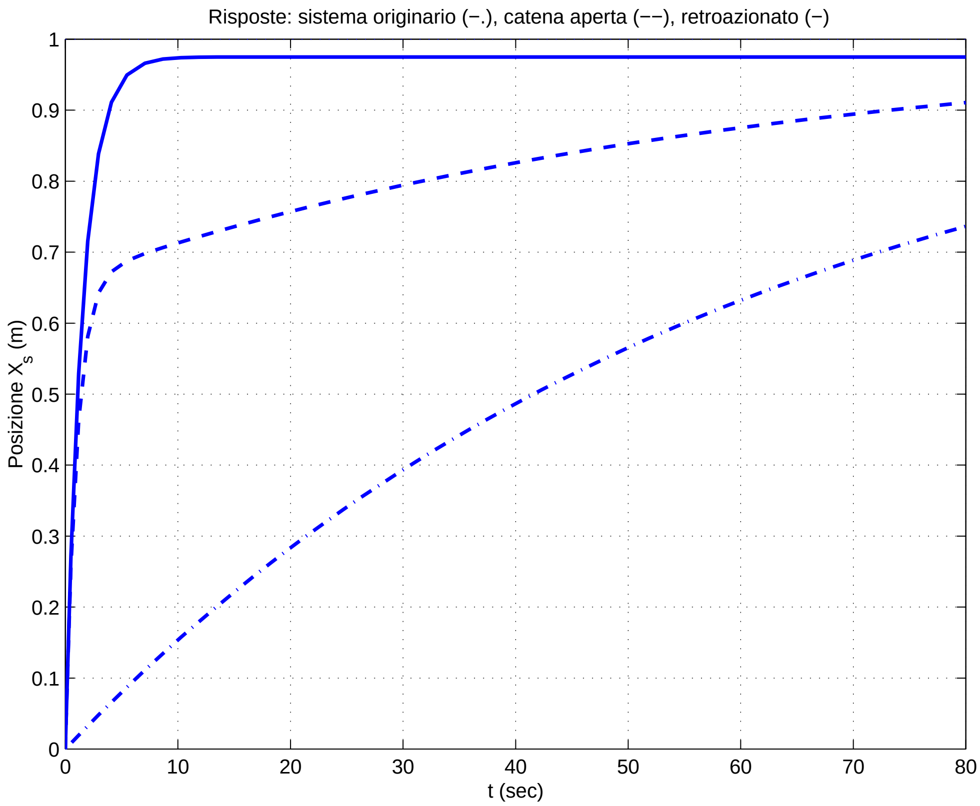
La risposta dei 3 sistemi nel caso nominale è la seguente:



Se il parametro τ subisce una variazione negativa del 50% ($\tau = 0.5\tau_0$) si ottengono le seguenti risposte al gradino:



Se il parametro τ subisce una variazione positiva del 50% ($\tau = 1.5\,\tau_0$) si ottengono le seguenti risposte al gradino:



Le risposte al gradino che si ottengono in condizione nominale ($\tau = \tau_0$) quando è presente un disturbo sull'uscita $d_0 = 0.5$ sono le seguenti: