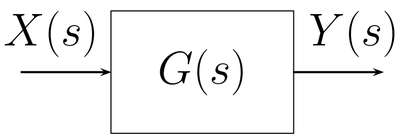
Risposta all'impulso

- Sistemi lineari tempo invarianti:

$$\sum_{i=0}^{n} a_i \frac{d^i y(t)}{dt^i} = \sum_{i=0}^{m} b_i \frac{d^i x(t)}{dt^i}$$

- La funzione di trasferimento $G(s)$ è definita a condizioni iniziali nulle:



$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\displaystyle\sum_{i=0}^{m} b_i\, s^i}{\displaystyle\sum_{i=0}^{n} a_i\, s^i}$$

- Si noti che i coefficienti a_i e b_i della funzione di trasferimento $G(s)$ sono gli stessi che caratterizzano l'equazione differenziale.

- Relazioni esistenti fra segnali di ingresso e di uscita:

  Se $y(t)$ è la risposta al segnale $x(t)$, $\quad\Rightarrow\quad Y(s) = G(s)X(s)$

  $\displaystyle\int_0^t y(t)dt$ è la risposta al segnale $\displaystyle\int_0^t x(t)dt \quad\Rightarrow\quad \frac{Y(s)}{s} = G(s)\frac{X(s)}{s}$

  e $\displaystyle\frac{d\,y(t)}{dt}$ è la risposta al segnale $\displaystyle\frac{d\,x(t)}{dt} \quad\Rightarrow\quad sY(s) = G(s)\,sX(s)$

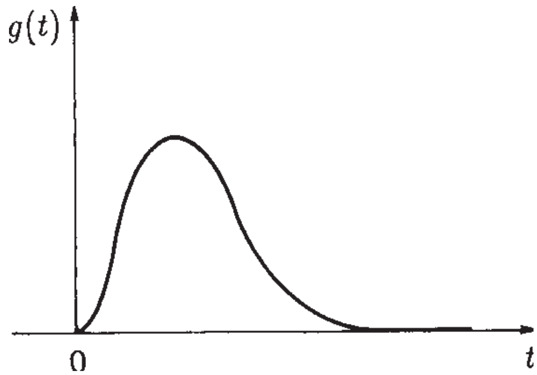
- La risposta alla rampa unitaria è la derivata della risposta alla parabola unitaria; la risposta al gradino unitario è la derivata della risposta alla rampa unitaria; ecc.

- *Risposte canoniche*: sono le risposte del sistema ai segnali tipici (impulso, gradino, rampa, parabola, ecc.)

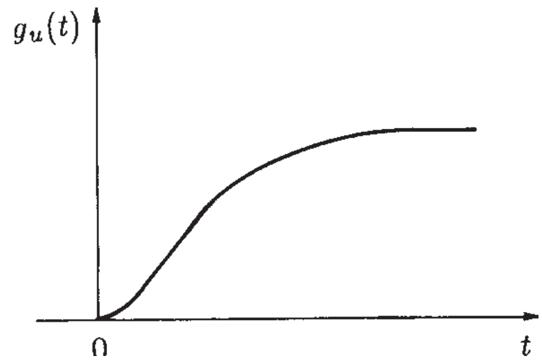
- Le *risposte canoniche* caratterizzano completamente il comportamento dinamico del sistema: dalla conoscenza di una di esse si può risalire alla risposta ad un segnale qualsiasi.

- Le risposte canoniche più frequentemente utilizzate nella pratica sono la la *risposta all'impulso*(di Dirac) o *risposta impulsiva* $g(t)$ e *risposta al gradino* o *risposta indiciale* $g_u(t)$.

Risposta impulsiva



Risposta al gradino



- La risposta all'impulso $g(t)$ è la trasformata di Laplace inversa della funzione di trasferimento $G(s)$ del sistema:

$$\boxed{g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \qquad \leftrightarrow \qquad G(s) = \mathcal{L}[g(t)]}$$

- La risposta all'impulso $g(t)$ compendia tutte le informazioni necessarie per determinare la risposta, a partire dalla condizione iniziale di quiete, a qualunque segnale di ingresso. Infatti, partendo dalla relazione

$$Y(s) = G(s)\,X(s)$$

e applicando il teorema della trasformata del prodotto integrale si ha che

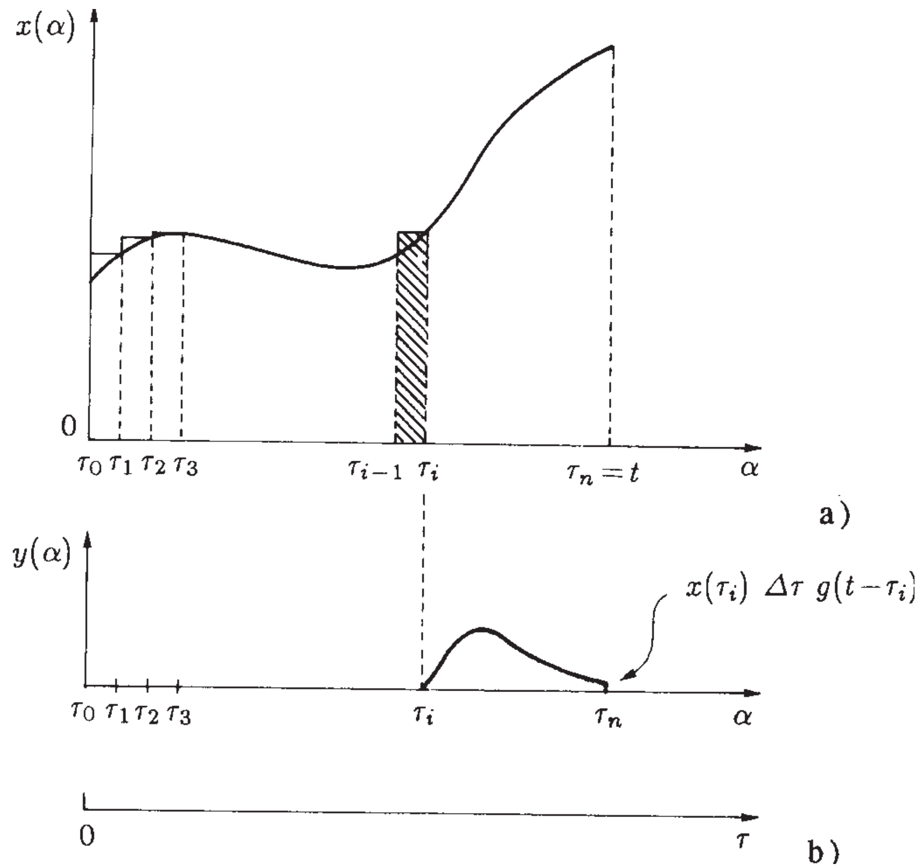
$$y(t) = \int_0^\infty x(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau$$

cioè calcolando un *integrale di convoluzione*(o *integrale di Duhamel*) è possibile determinare la risposta $y(t)$ del sistema a qualunque segnale di ingresso $x(t)$.

- Essendo $x(t)=0$ e $g(t)=0$ per $t<0$, l'integrale di convoluzione diventa:

$$\boxed{y(t) = \int_0^t x(\tau)\,g(t-\tau)\,d\tau}$$

- L'integrale di convoluzione si ottiene applicando semplicemente il principio di sovrapposizione degli effetti.



- Si scompone l'intervallo $0 \le \tau < t$ in n intervalli elementari:

$$\tau_{i-1} \le \tau < \tau_i \qquad (i = 1, \ldots, n;\ \tau_0 = 0,\ \tau_n = t)$$

  in ciascuno dei quali la funzione $x(\tau)$ si suppone costante di valore $x(\tau_i)$.

- Si considera poi il generico impulso (indicato a tratteggio in figura) di area $x(\tau_i)\,\Delta\tau$. Supponendo $\Delta\tau$ sufficientemente piccolo, la risposta del sistema a tale impulso è prossima alla risposta a un impulso di Dirac di area $x(\tau_i)\,\Delta\tau$ applicato all'istante τ_i.

- Poiché vale la sovrapposizione degli effetti è possibile scrivere che:

$$y(t) \simeq \sum_{i=1}^{n} x(\tau_i)\, g(t-\tau_i)\, \Delta\tau$$

  Facendo tendere $\Delta\tau$ a zero, la sommatoria tende all'integrale di convoluzione.