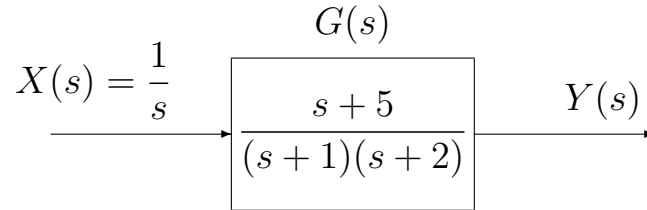


## Risposta temporale: esercizi

**Esercizio.** Calcolare la risposta al gradino  $y(t)$  del seguente sistema:



Per ottenere la risposta al gradino  $y(t)$  occorre antitrasformare la seguente funzione:

$$Y(s) = G(s)X(s) = \frac{s+5}{s(s+1)(s+2)}$$

Il valore iniziale  $y(0)$  e il valore finale  $y(\infty)$  della funzione  $y(t)$ :

$$y(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = G(\infty) = 0, \quad y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s) = G(0) = \frac{5}{2}$$

Scomposizione in fratti semplici:

$$Y(s) = \frac{s+5}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{(s+1)} + \frac{K_3}{(s+2)}$$

dove

$$K_1 = sY(s)|_{s=0} = \frac{s+5}{(s+1)(s+2)} \Big|_{s=0} = \frac{5}{2}$$

$$K_2 = (s+1)Y(s)|_{s=-1} = \frac{s+5}{s(s+2)} \Big|_{s=-1} = -4$$

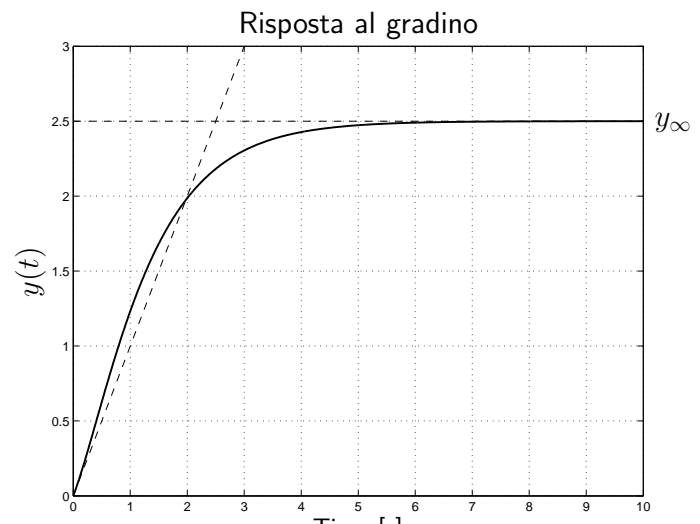
$$K_3 = (s+2)Y(s)|_{s=-2} = \frac{s+5}{s(s+1)} \Big|_{s=-2} = \frac{3}{2}$$

La risposta al gradino del sistema  $G(s)$  è quindi la seguente:

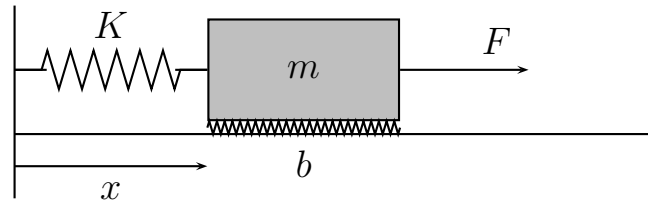
$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \frac{5}{2} - 4e^{-t} + \frac{3}{2}e^{-2t}$$

Si noti che la pendenza del tratto iniziale per  $t = 0^+$  è:

$$\dot{y}(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = 1$$



**Esercizio.** Sistema massa-molla-smorzatore. Calcolare la risposta  $x(t)$  del sistema ad un gradino di forza  $F(t) = 10$  in ingresso. Utilizzare i parametri  $m = 1$ ,  $b = 2$  e  $K = 10$ .



Equazione differenziale del sistema:

$$\frac{d}{dt}[m\dot{x}(t)] = F(t) - b\dot{x}(t) - Kx(t) \quad \rightarrow \quad m\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + Kx(t) = F(t)$$

Funzione di trasferimento del sistema ( $m = 1$ ,  $b = 2$  e  $K = 10$ ):

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms^2 + bs + K} = \frac{1}{s^2 + 2s + 10} = \frac{1}{(s + 1)^2 + 3^2}$$

Risposta al gradino di forza  $F(t) = 10$ :

$$F(s) = \frac{10}{s} \quad \rightarrow \quad X(s) = G(s)F(s) = \frac{10}{s[(s + 1)^2 + 3^2]}$$

La scomposizione in fratti semplici può essere fatta anche nel seguente modo:

$$X(s) = \frac{10}{s[(s + 1)^2 + 3^2]} = \frac{1}{s} - \frac{\alpha s + \beta}{(s + 1)^2 + 3^2}$$

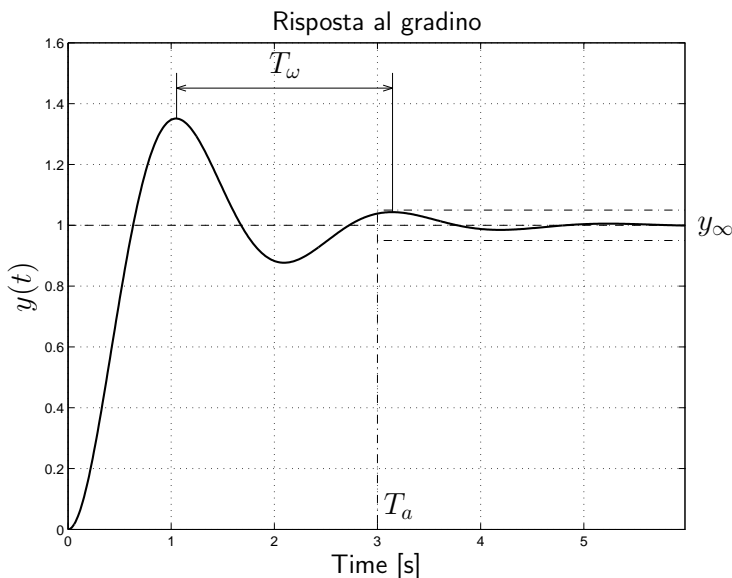
I parametri  $\alpha$  e  $\beta$  si determinano imponendo l'uguaglianza tra le due funzioni:

$$X(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2}{(s + 1)^2 + 3^2} = \frac{1}{s} - \left[ \frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 3^2} + \frac{1}{3} \frac{3}{(s + 1)^2 + 3^2} \right]$$

Antitrasformando si ottiene:

$$x(t) = 1 - e^{-t} \left[ \cos(3t) + \frac{1}{3} \sin(3t) \right]$$

L'andamento temporale è di tipo oscillatorio smorzato:



I poli dominanti del sistema sono:

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega = -1 \pm j3$$

Il tempo di assestamento è:

$$T_a = \frac{3}{\sigma} = 3 \text{ s}$$

Il periodo dell'oscillazione è:

$$T_w = \frac{2\pi}{\omega} \simeq 2.1 \text{ s}$$

**Esercizio.** Sia dato il seguente sistema  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{800(2s + 30)}{(0.2s + 3)(2s + 10) \underbrace{(s^2 + s + 100)}_{\text{poli dominanti}}(s^2 + 20s + 400)}$$

1) Disegnare l'andamento qualitativo  $y(t)$  della risposta al gradino del sistema  $G(s)$ .

*Soluzione.* Il sistema è dominato dalla coppia di poli complessi coniugati  $p_{1,2} \simeq -0.5 \pm j 10$ . L'andamento qualitativo è di tipo oscillatorio smorzato.

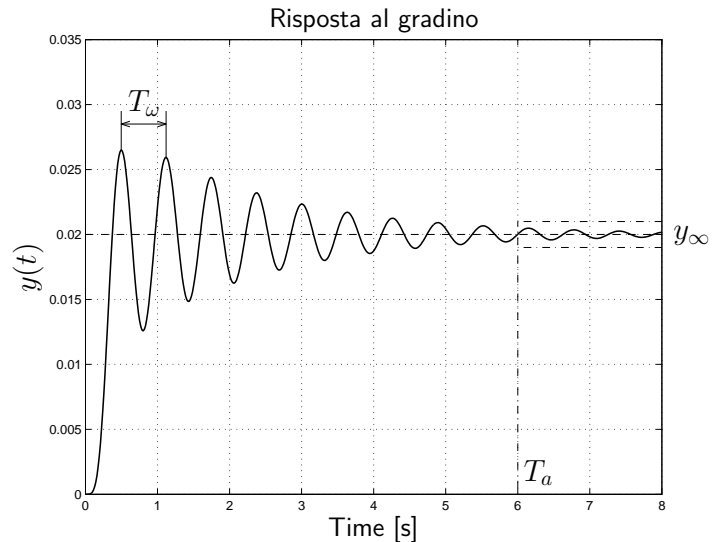
2) Calcolare il valore a regime  $y_\infty$  dell'uscita  $y(t)$  del sistema:

$$y_\infty = G(0) = 0.02.$$

3) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento  $T_a$  del sistema e il periodo  $T_w$  dell'eventuale oscillazione smorzata:

$$T_a \simeq \frac{3}{0.5} \text{ s} = 6 \text{ s},$$

$$T_w \simeq \frac{2\pi}{10} \text{ s} = 0.63 \text{ s}.$$



**Esercizio.** Sia dato il seguente sistema  $G(s)$ :

$$G(s) = \frac{(3 + 0.2s)(s^2 + 60s + 1800)}{\underbrace{(2 + 0.8s)}_{\text{polo dominante}}(8 + 0.2s)(s^2 + 16s + 80)}$$

1) Disegnare l'andamento qualitativo  $y(t)$  della risposta al gradino del sistema  $G(s)$ .

*Soluzione.* Il sistema è dominato dal polo reale  $p = -2.5$ . L'andamento qualitativo è di tipo aperiodico.

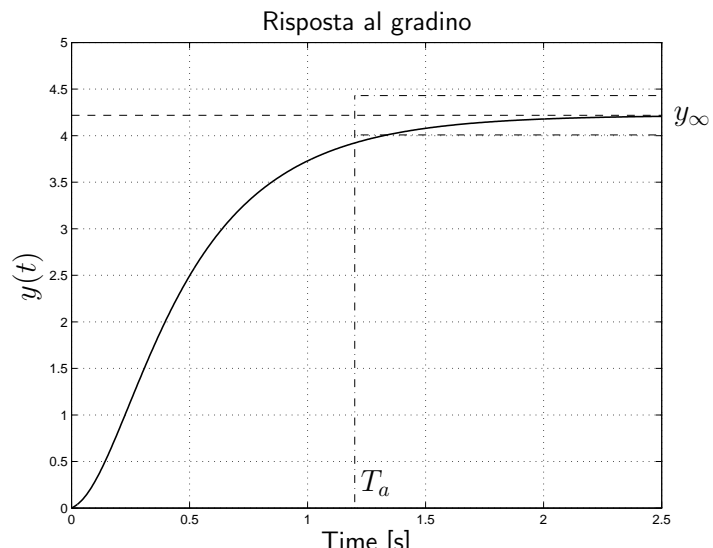
2) Calcolare il valore a regime  $y_\infty$  dell'uscita  $y(t)$  del sistema:

$$y_\infty = G(0) = 4.22.$$

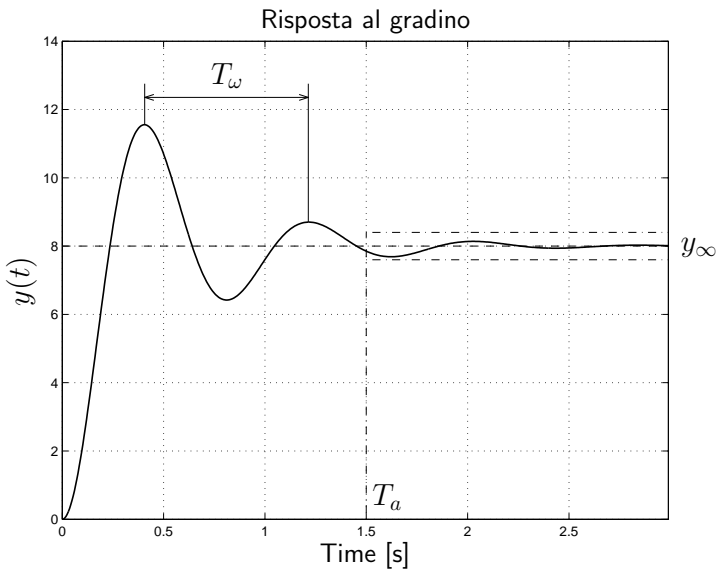
3) Stimare qualitativamente il tempo di assestamento  $T_a$  del sistema e il periodo  $T_w$  dell'eventuale oscillazione smorzata:

$$T_a \simeq \frac{3}{2.5} \text{ s} = 1.2 \text{ s},$$

$$T_w \simeq \emptyset.$$



**Esercizio.** In figura è mostrata la risposta  $y(t)$  al gradino  $x(t) = X_0 = 10$  di un sistema dinamico  $G(s)$  caratterizzato solamente da 2 poli stabili. Determinare:



1) I poli dominanti del sistema:

$$\sigma = \frac{3}{T_a} \simeq \frac{3}{1.5}, \quad \omega = \frac{2\pi}{T_w} \simeq \frac{6.28}{0.81},$$

$$p_{1,2} = -\sigma \pm j\omega = -2 \pm j7.75.$$

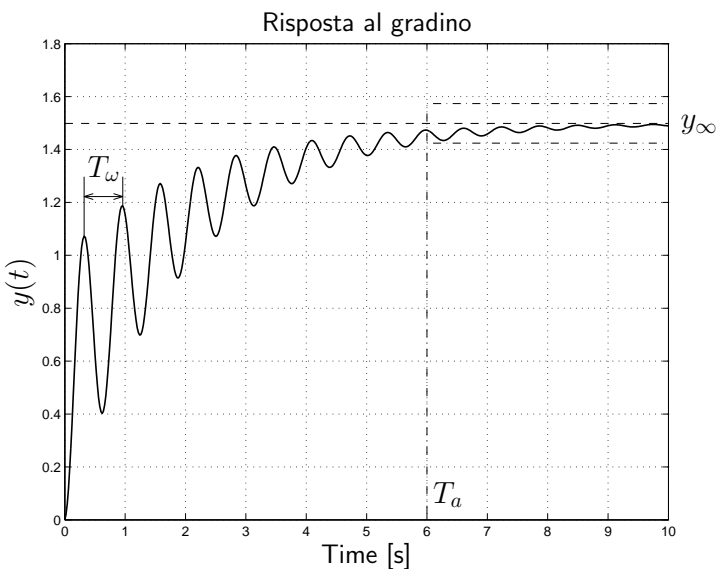
2) Il guadagno statico del sistema:

$$G_0 = \frac{y_\infty}{X_0} = \frac{8}{10} = 0.8.$$

3) La pulsazione naturale  $\omega_n$ :

$$\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2} \simeq 8.$$

**Esercizio.** In figura è riportata la risposta  $y(t)$  al gradino unitario di un sistema lineare  $G(s)$  a fase minima i cui tre poli  $p_{1,2}$  e  $p_3$  hanno la stessa parte reale. Nei limiti della precisione del grafico determinare:



1) Il guadagno statico del sistema:

$$G_0 = y_\infty \simeq 1.5.$$

2) La posizione del polo reale  $p_3$ :

$$p_3 = -\sigma = -\frac{3}{T_a} \simeq -0.5$$

3) La parte immaginaria  $\omega$  dei poli complessi coniugati  $p_{1,2}$ :

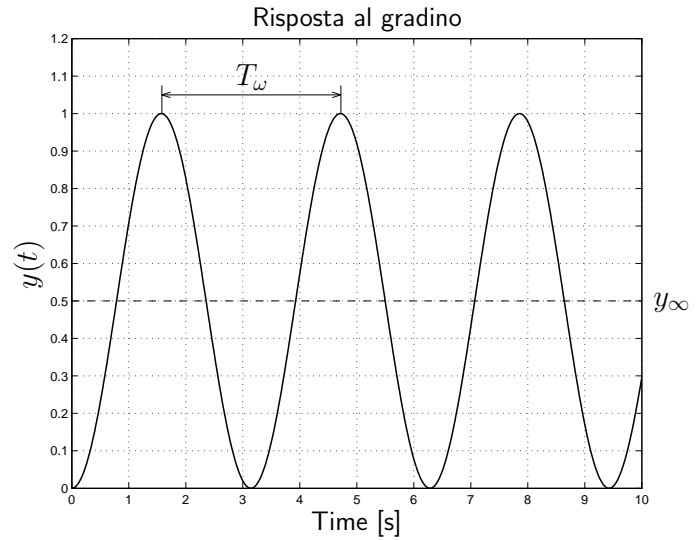
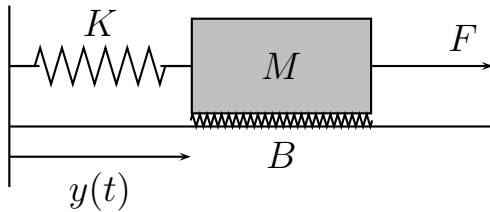
$$\omega = \frac{2\pi}{T_w} \simeq \frac{6.28}{0.63} \simeq 10.$$

La posizione dei 3 poli risulta quindi essere la seguente:  $p_{1,2} = -0.5 \pm 10j$  e  $p_3 = -0.5$ .

**Esercizio.** Stimare il tempo di assestamento  $T_a$  del sistema  $G(s)$  alla risposta al gradino:

$$G(s) = \frac{(s+37)(s+225)}{(s+350)(10s+15) \underbrace{(40s+2)}_{\text{polo dominante}}(s^2+2s+20)} \rightarrow T_a = 60 \text{ s.}$$

**Esercizio.** Sia dato il sistema massa-molla-smorzatore mostrato in figura. Esso è caratterizzato dall'equazione differenziale  $M \ddot{y}(t) + B \dot{y}(t) + K y(t) = F(t)$ . Viene inoltre fornita la risposta  $y(t)$  del sistema ad un gradino di forza  $F = 10 \text{ N}$ .



Nei limiti della precisione del grafico si chiede di determinare:

1) La funzione di trasferimento  $G(s)$  del sistema in forma simbolica:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{M s^2 + B s + K}$$

2) La pulsazione  $\omega$  della risposta al gradino del sistema:

$$\omega = \frac{2\pi}{T_w} = \frac{2\pi}{3.14} \simeq 2.$$

3) I valori numerici della massa  $M$ , del coefficiente di attrito  $B$  e della rigidità  $K$ :

$$M = 5, \quad B = 0, \quad K = 20.$$

La risposta al gradino  $y(t)$  mostra chiaramente che il sistema è semplicemente stabile e privo di dissipazioni:  $B = 0$ ,  $\delta = 0$ . Sostituendo  $B = 0$  nell'equazione caratteristica si ha:

$$B = 0 \rightarrow M s^2 + K = 0 \rightarrow s_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{K}{M}} = \pm j \omega_n = \pm j \omega.$$

Essendo  $\delta = 0$ , la pulsazione naturale  $\omega_n$  coincide con la pulsazione  $\omega$ :

$$\omega_n = \omega = 2.$$

Il valore a regime  $y_\infty$  del segnale in uscita  $y(t)$  coincide con il valore medio  $y_\infty = 0.5$  ed è uguale al prodotto tra l'ampiezza  $F = 10$  dell'ingresso e il guadagno statico  $G(0)$  del sistema:

$$y_\infty = F \cdot G(0) \rightarrow 0.5 = 10 \cdot \frac{1}{K} \rightarrow K = 20.$$

Il valore di  $M$  si determina facilmente sostituendo  $K$  nell'espressione di  $\omega$ :

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{M}} = 2 \rightarrow M \simeq \frac{K}{4} = 5.$$