Risposta al gradino di un sistema del primo ordine

- Si consideri il seguente sistema lineare del primo ordine:

$$G(s) = \frac{1}{1 + \tau\, s}$$

- L'unico parametro che caratterizza il sistema è la *costante di tempo* τ.
- Se $\tau > 0$ il polo p del sistema è a parte reale negativa (il sistema è stabile):

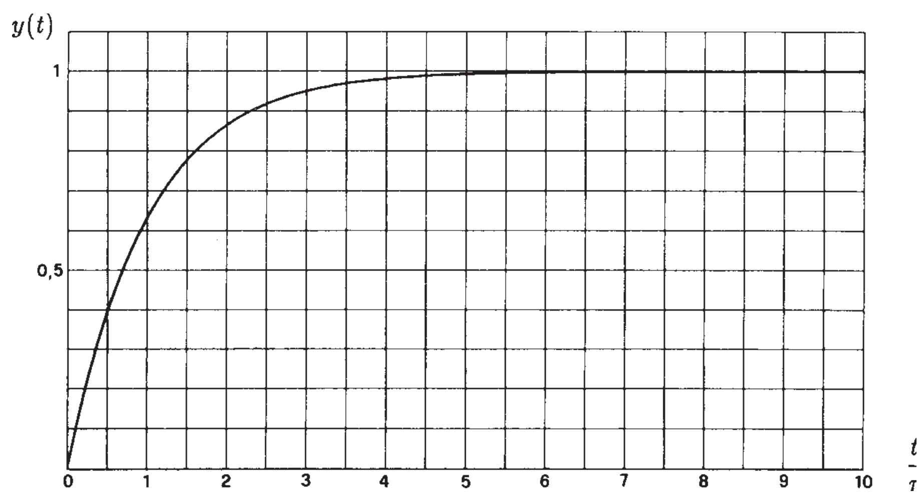
$$p = -\frac{1}{\tau}$$

- La risposta al gradino unitario del sistema é la seguente:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\,(1+\tau\, s)}\right] = \frac{1}{\tau}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s\,(s+\frac{1}{\tau})}\right] \\ &= \frac{1}{\tau}\,\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\tau}{s} - \frac{\tau}{s+\frac{1}{\tau}}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{\tau}}\right] = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

- Andamento temporale (la scala dei tempi è normalizzata rispetto a τ):

$t = \tau \;\rightarrow\; 63,2\%$
$t = 2\tau \;\rightarrow\; 86.5\%$
$\underline{t = 3\tau} \;\rightarrow\; \underline{95.0\%}$
$t = 5\tau \;\rightarrow\; 99.3\%$
$t = 7\tau \;\rightarrow\; 99.9\%$



- La risposta al gradino $y(t)$ di tutti i sistemi dinamici del primo ordine è di tipo *aperiodico*: si raggiunge il valore finale senza mai superarlo.
- Dopo tre costanti di tempo il sistema ha già raggiunto il 95% del valore finale. Il tempo di assestamento T_a del sistema è:

$$\boxed{T_a = 3\,\tau = \frac{3}{|p|}}$$

Esempio. Calcolare la risposta al gradino $y(t)$ della seguente equazione differenziale:

$$a\,\dot{y}(t) + b\,y(t) = c\,x(t)$$

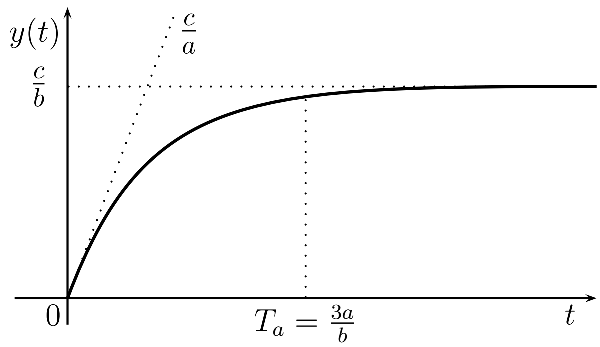
La funzione di trasferimento $G(s)$ associata all'equazione differenziale è:

$$G(s) = \frac{c}{a\,s+b} \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{c}{b}\,\frac{1}{(\tau\,s+1)} \qquad \text{dove} \qquad \tau = \frac{a}{b}$$

La risposta al gradino $y(t)$ del sistema $G(s)$ è quindi la seguente:

$$y(t) = \frac{c}{b}\left(1 - e^{-\frac{b}{a}\,t}\right)$$

L'andamento temporale della funzione $y(t)$ è di tipo esponenziale aperiodico:



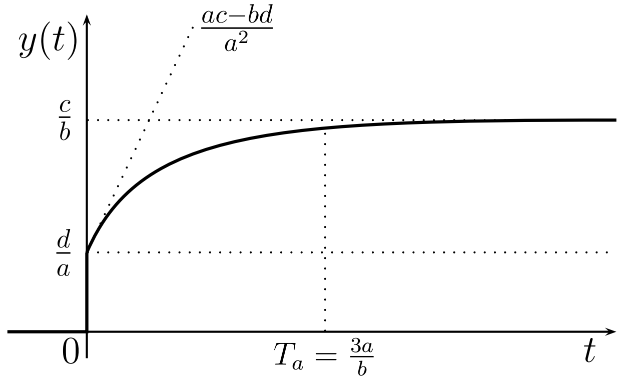
Esempio. Calcolare la risposta al gradino $y(t)$ della seguente funzione $G(s)$:

$$G(s) = \frac{d\,s+c}{a\,s+b} \qquad \rightarrow \qquad G(s) = \frac{d}{a} + \left(\frac{c}{b} - \frac{d}{a}\right)\frac{1}{(\tau\,s+1)}$$

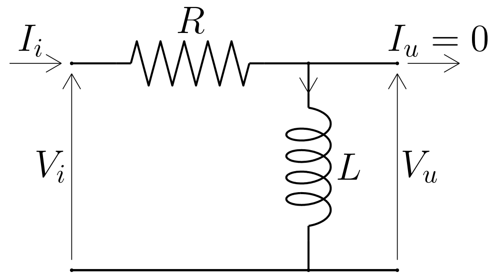
dove $\tau = \frac{a}{b}$. La risposta al gradino $y(t)$ del sistema $G(s)$ è quindi la seguente:

$$y(t) = \frac{d}{a} + \frac{ac-bd}{ab}\left(1 - e^{-\frac{b}{a}\,t}\right)$$

L'andamento temporale della funzione $y(t)$ è di tipo esponenziale aperiodico:



Esempio. Sistema elettrico RL:



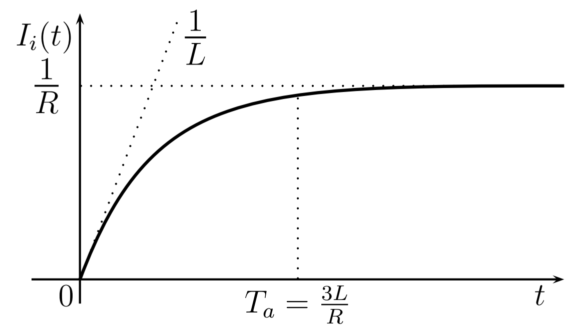
Equazione differenziale:

$$L\,\dot{I}_i(t) + R\,I_i(t) = V_i(t)$$

Funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{I_i(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{L\,s + R}$$

Risposta al gradino $V_i(t) = 1$:



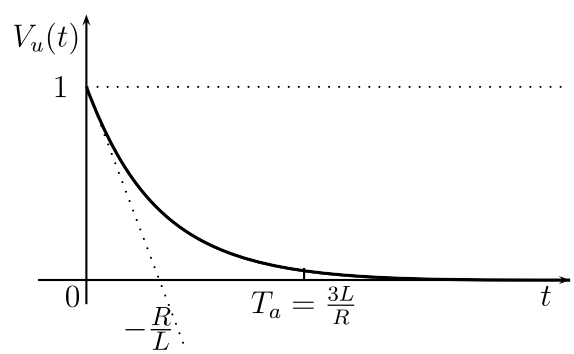
Equazione differenziale:

$$L\dot{V}_u(t) + R\,V_u(t) = L\dot{V}_i(t)$$

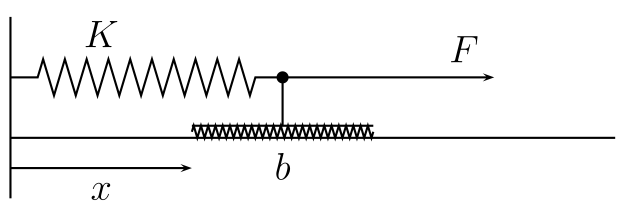
Funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{L\,s}{L\,s + R} = 1 - \frac{R}{L\,s + R}$$

Risposta al gradino $V_i(t) = 1$:



Esempio. Sistema molla-smorzatore:



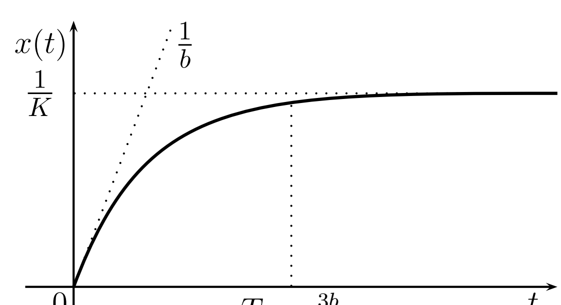
Equazione differenziale:

$$b\,\dot{x}(t) + K\,x(t) = F(t)$$

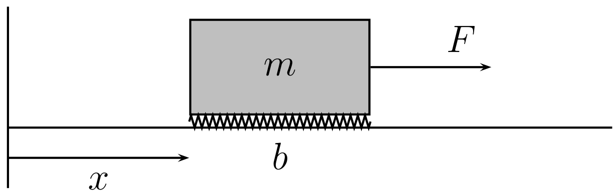
Funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{b\,s + K}$$

Risposta al gradino $F(t) = 1$:



Esempio. Sistema massa-smorzatore:



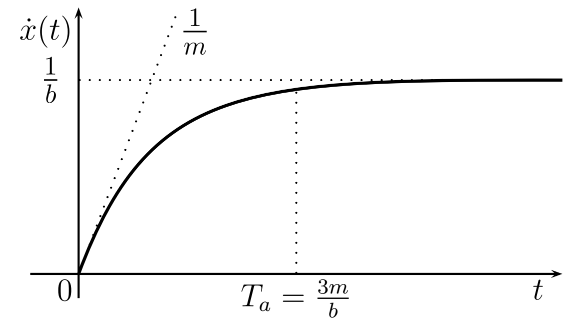
Equazione differenziale:

$$m\ddot{x}(t) + b\,\dot{x}(t) = F(t)$$

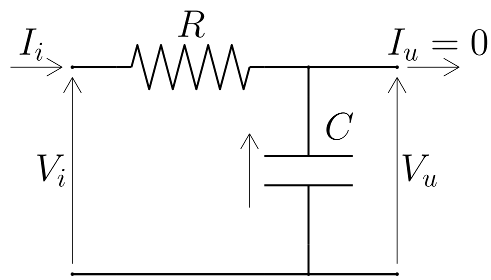
Funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{\dot{X}(s)}{F(s)} = \frac{1}{m\,s + b}$$

Risposta al gradino $F(t) = 1$:



Esempio. Sistema elettrico RC:



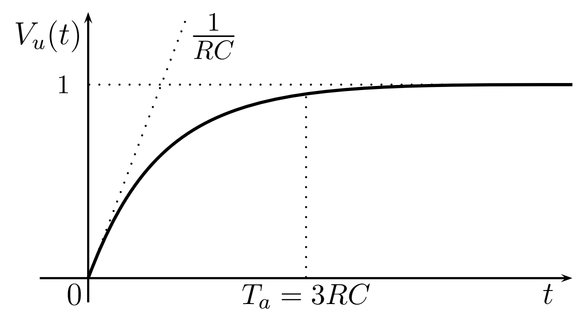
Equazione differenziale:

$$RC\,\dot{V}_u(t) + V_u(t) = V_i(t)$$

Funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{V_u(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{R\,C\,s + 1}$$

Risposta al gradino $V_i(t) = 1$:



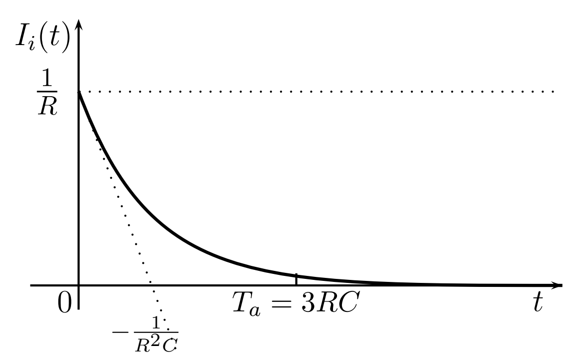
Equazione differenziale:

$$RC\dot{I}_i(t) + I_i(t) = C\dot{V}_i(t)$$

Funzione di trasferimento:

$$G(s) = \frac{I_i(s)}{V_i(s)} = \frac{Cs}{RCs + 1} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R(RCs + 1)}$$

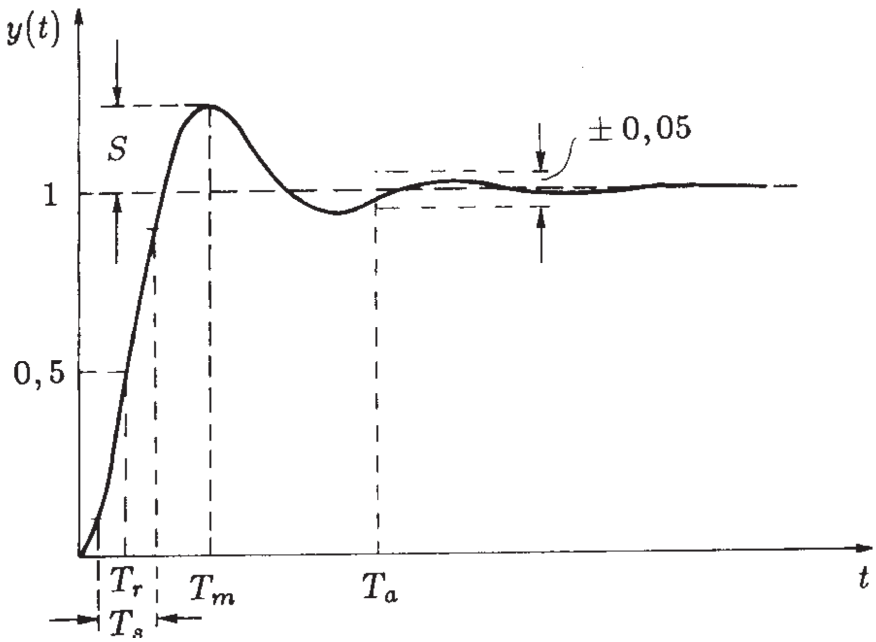
Risposta al gradino $V_i(t) = 1$:



Sistema elementare del secondo ordine

- Spesso i sistemi in retroazione, anche se di ordine elevato, presentano una risposta analoga a quella dei sistemi del secondo ordine. Ciò accade nel caso di sistemi a *poli dominanti* cioè sistemi caratterizzati dalla presenza di una coppia di poli complessi coniugati più vicini all'asse immaginario rispetto a tutti gli altri poli.

- Il contributo dei poli dominanti nell'espressione del transitorio è notevolmente più importante di quello degli altri poli.



- I parametri più importanti che descrivono il transitorio sono i seguenti:

  1. *Massima sovraelongazione* S: differenza fra il valore massimo dell'uscita e il valore finale. È espresso in% del valore finale.
  2. *Tempo di ritardo* T_r: tempo per raggiungere il 50% del valore finale.
  3. *Tempo di salita* T_s: tempo occorrente perché l'uscita passi dal 10 al 90% del valore finale.
  4. *Tempo di assestamento* T_a: tempo occorrente perché l'uscita rimanga entro il $\pm 5\%$ del valore finale.
  5. *Istante di massima sovraelongazione* T_m: istante al quale si presenta la massima sovraelongazione.

- Funzione di trasferimento di un tipico sistema del secondo ordine (a meno di un fattore costante):

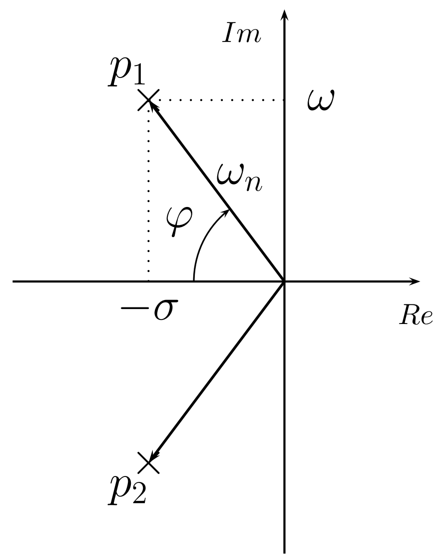
$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\,\delta\,\frac{s}{\omega_n} + \frac{s^2}{\omega_n^2}} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2} = \frac{\sigma^2 + \omega^2}{(s+\sigma)^2 + \omega^2}$$

dove $\delta = \cos\varphi$ è il *coefficiente di smorzamento* e $\omega_n = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$ è la *pulsazione naturale* del sistema.

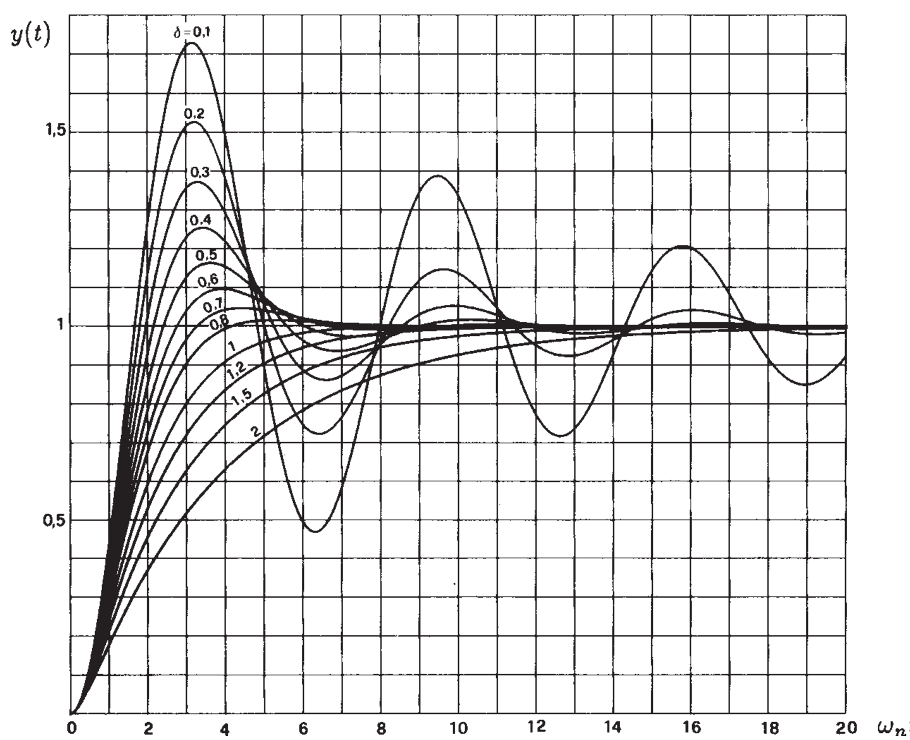
- La risposta al gradino unitario è la seguente:

$$\begin{aligned} y(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega_n^2}{s\,(s^2 + 2\,\delta\,\omega_n\,s + \omega_n^2)}\right] \\ &= 1 - \frac{e^{-\delta\omega_n t}}{\sqrt{1-\delta^2}}\ \sin(\omega\,t + \varphi) \end{aligned}$$

$$\omega := \omega_n\sqrt{1-\delta^2} = \omega_n \sin\varphi$$
$$\sigma := \delta\omega_n$$
$$\varphi := \arccos\delta = \arctan\frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta}$$



- L'andamento della funzione $y(t)$ al variare di δ è il seguente (la scala dei tempi è normalizzata rispetto ad ω_n):



- Per $\delta = 1$ i due poli complessi coniugati sono reali coincidenti. In questo caso la risposta al gradino non presenta alcuna sovraelongazione: $y(t)$ tende asintoticamente al valore finale senza mai superarlo.

- Determinazione dei punti di massimo e di minimo. Posto $A = \frac{1}{\sqrt{1-\delta^2}}$, si deriva rispetto al tempo:

$$\frac{dy(t)}{dt} = -A\,e^{-\delta\omega_n t}\omega\,\cos(\omega\,t+\varphi) + A\,\delta\,\omega_n\,e^{-\delta\omega_n t}\,\sin(\omega t+\varphi)$$

Ponendo la derivata uguale a zero, si ottiene:

$$-\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\,\cos(\omega t+\varphi) + \delta\,\omega_n\,\sin(\omega t+\varphi) = 0$$

da cui si ricavano gli istanti $t = t_n$ di massimo e di minimo:

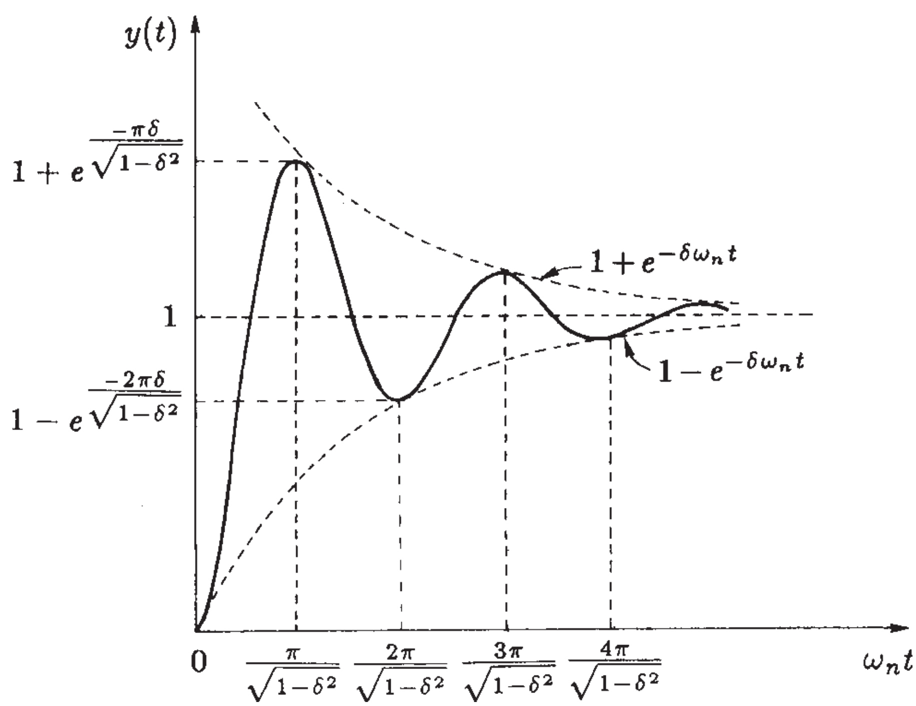
$$\tan(\omega t_n+\varphi) = \frac{\sqrt{1-\delta^2}}{\delta} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \tan\varphi \qquad \leftrightarrow \qquad \omega t_n = n\,\pi$$

(per $n = 0, 1, \ldots$), cioè:

Periodo dell'oscillazione:

$$\boxed{t_n = \frac{n\,\pi}{\omega} = \frac{n\,\pi}{\omega_n\sqrt{1-\delta^2}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_\omega = \frac{2\pi}{\omega}}$$

- L'andamento temporale dei massimi e dei minimi è il seguente:



- Valori dell'uscita in corrispondenza dei massimi e minimi:

$$y(t)\Big|_{\substack{\max\\ \min}} = 1 - \frac{e^{\frac{-n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}}{\sqrt{1-\delta^2}}\ \sin\left(n\,\pi + \varphi\right)$$

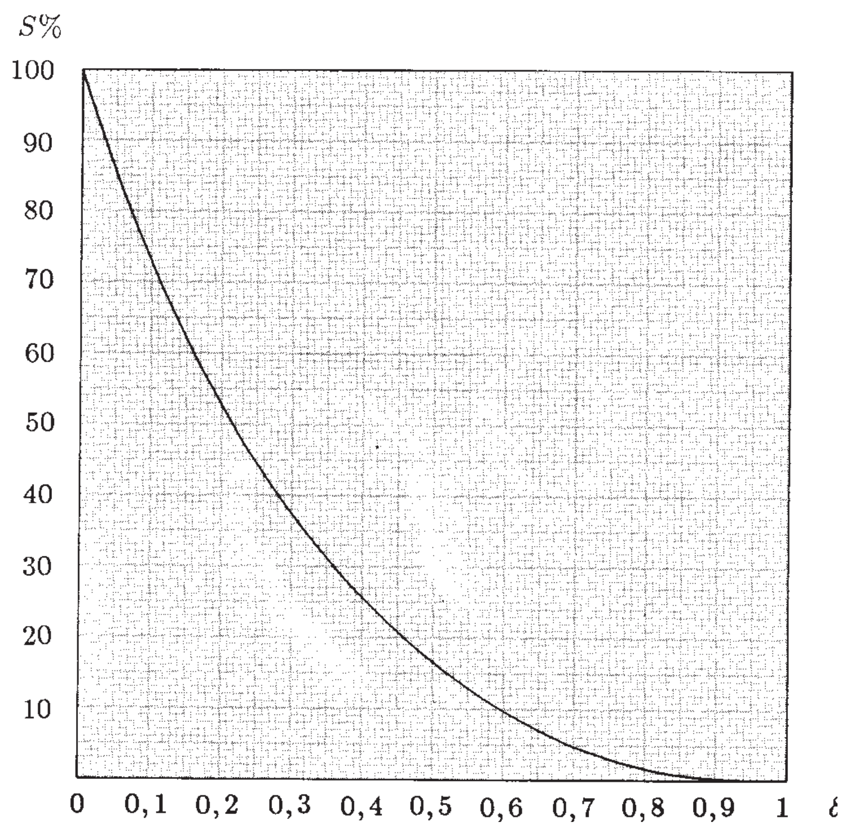
da cui si ottiene:

$$y(t)\Big|_{\substack{\max\\ \min}} = 1 - (-1)^n\ e^{\frac{-n\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}$$

- La massima sovraelongazione è data dalla relazione

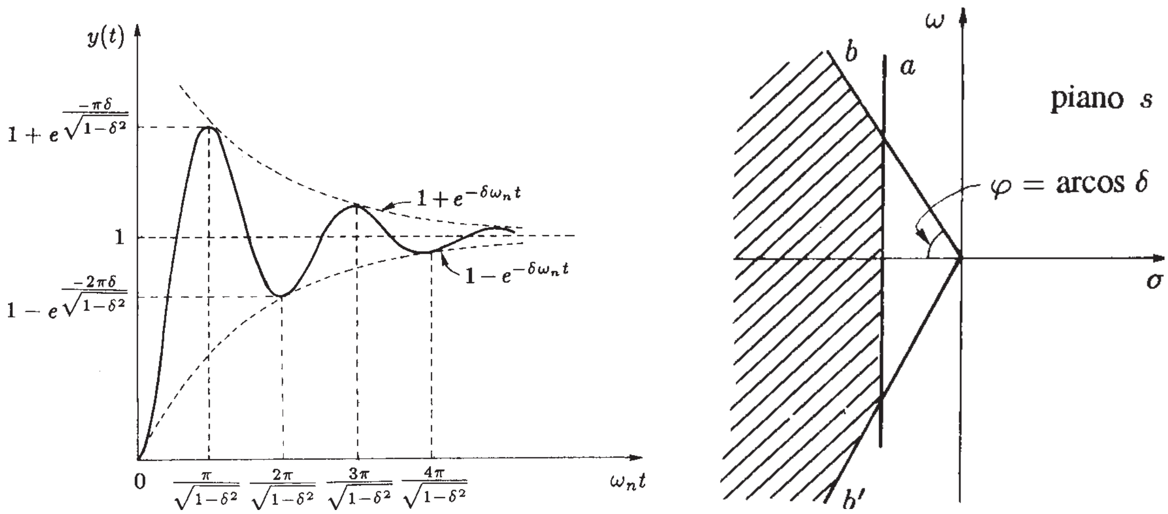
$$S = 100\,\frac{(y_{\max} - y_\infty)}{y_\infty}, \qquad \boxed{S = 100\ e^{\frac{-\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}} = 100\ e^{-\frac{\pi}{\tan\varphi}}}$$

- La massima sovraelongazione S è funzione unicamente del coefficiente di smorzamento δ ed è uguale al 100% quando tale coefficiente è nullo:



- La pulsazione naturale ω_n non influenza la massima sovraelongazione S.

- La massima sovraelongazione non supera un valore assegnato se i poli del sistema sono compresi nel settore delimitato da due rette b e b' univocamente determinate dal coefficiente di smorzamento δ.



- Un limite superiore per il tempo di assestamento T_a si ricava dalla relazione

$$e^{-\delta\omega_n T_a} = 0.05$$

da cui si deduce

$$\delta\,\omega_n T_a = 3, \qquad \text{cioè} \qquad \boxed{T_a = \frac{3}{\delta\,\omega_n} = \frac{3}{|\sigma|}}$$

- Il tempo di assestamento non è superiore al valore assegnato T_a se

$$|\sigma| = \delta\,\omega_n \geq \frac{3}{T_a}$$

dove $\delta\,\omega_n$ è il modulo della parte reale σ dei poli del sistema.

- Il vincolo sul tempo di assestamento è rispettato se i poli del sistema sono posizionati a sinistra di una retta verticale a.

- Entrambe le specifiche, sul tempo di assestamento e sulla massima sovraelongazione, sono rispettate se i poli del sistema sono posizionati all'interno della zona tratteggiata.

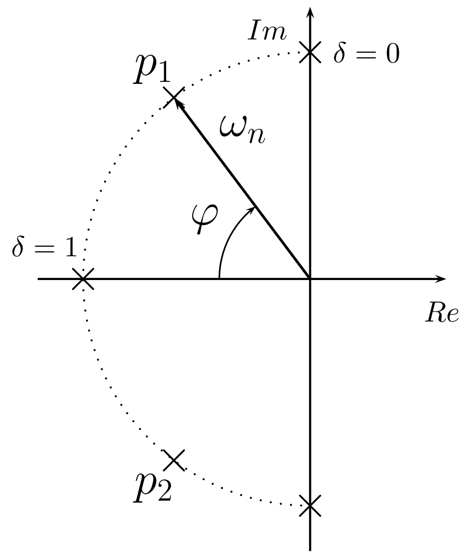
Pulsazione naturale ω_n costante

- Mantenere costante ω_n e far variare δ vuol dire spostare i poli del sistema lungo una circonferenza di raggio ω_n:

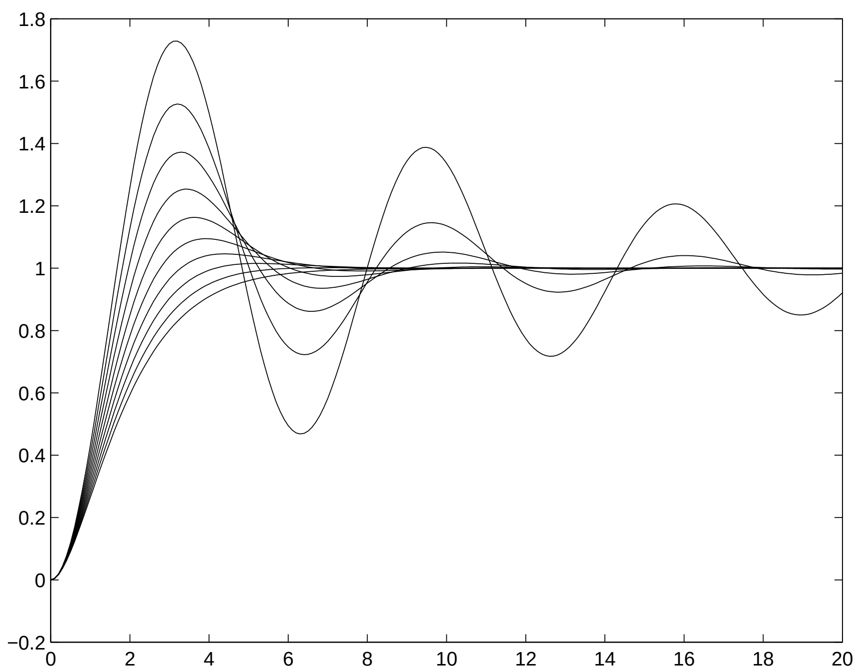
$0 < \delta < 1$

$\frac{\pi}{2} > \varphi > 0$

ω_n costante



- La risposta del sistema $G(s)$ al gradino unitario al variare del parametro $\delta \in [0.1,\ 0.2,\ \ldots,\ 1]$ è mostrata nel seguente grafico:



- Il coefficiente δ influenza direttamente la massima sovraelongazione $S\%$:

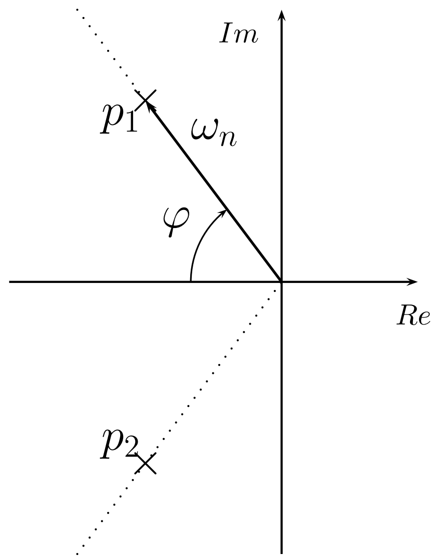
$$\boxed{S\% = 100\, e^{-\frac{\pi\delta}{\sqrt{1-\delta^2}}}}$$

Coefficiente di smorzamento δ costante

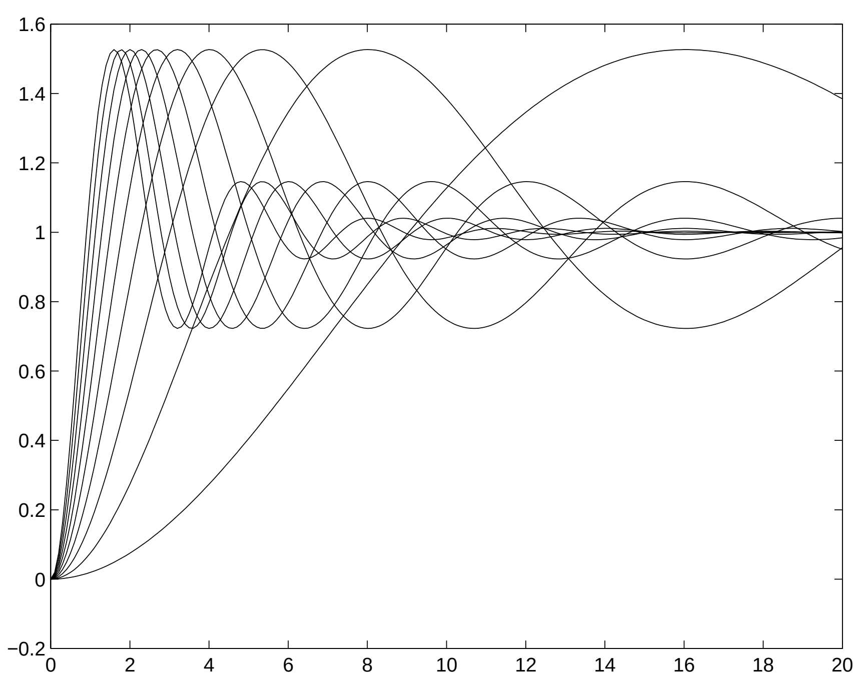
- Mantenere costante δ e far variare ω_n vuol dire spostare i poli del sistema lungo una retta uscente dall'origine che forma un angolo $\varphi = \arccos \delta$ con il semiasse reale negativo:

δ costante

$\omega_n > 0$



- Se si mantiene costante $\delta = 0.2$ e si fa variare $\omega_n \in [0.2,\ 0.4,\ \ldots,\ 2]$ si ottengono i seguenti andamenti temporali:



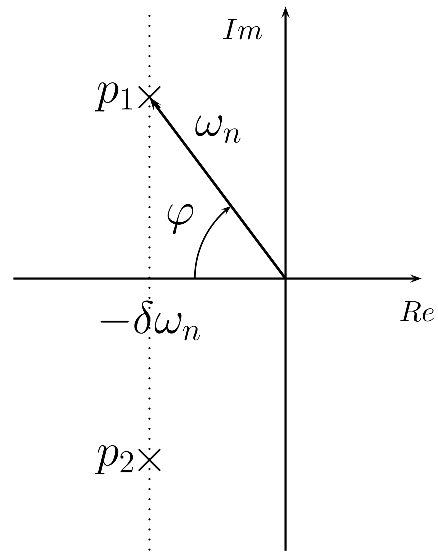
- Cambiare ω_n equivale, in pratica, a cambiare l'asse dei tempi: più ω_n è elevato, più l'asse dei tempi è contratto.

Tempo di assestamento costante

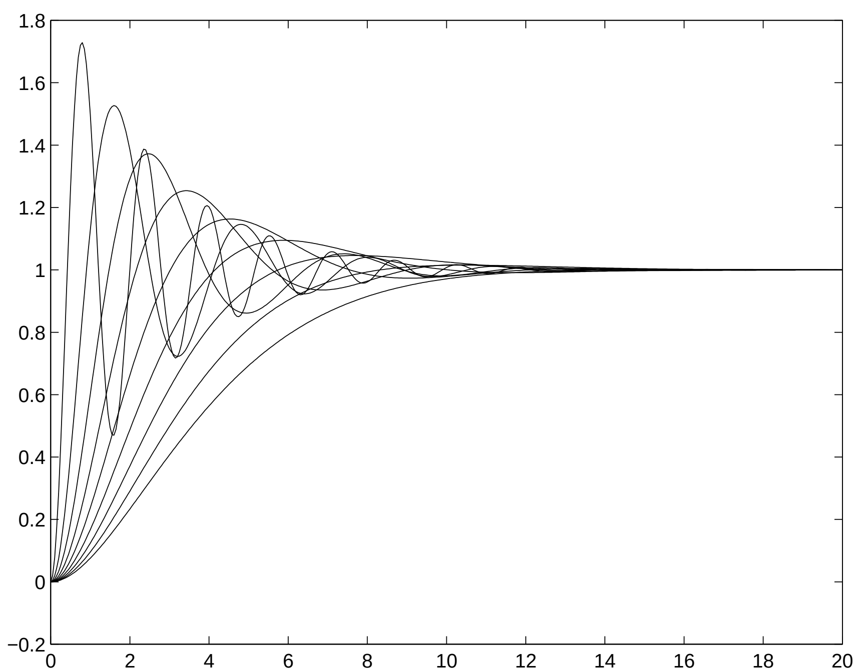
- Mantenere costante il prodotto $\delta\omega_n$ e far variare (per esempio) di δ, vuol dire spostare i poli del sistema lungo una retta verticale di ascissa $-\delta\omega_n$:

δ varia

$\delta\omega_n$ costante



- Gli andamenti temporali che si ottengono facendo variare $\delta \in [0.1 : 0.9]$, mantenendo però costante il prodotto $\delta\omega_n = 0.4$ sono i seguenti:



- Il tempo di assestamento T_a (5%) è inversamente proporzionale a $\delta\omega_n$:

$$\boxed{T_a = \frac{3}{\delta\omega_n} = \frac{3}{\sigma}}$$

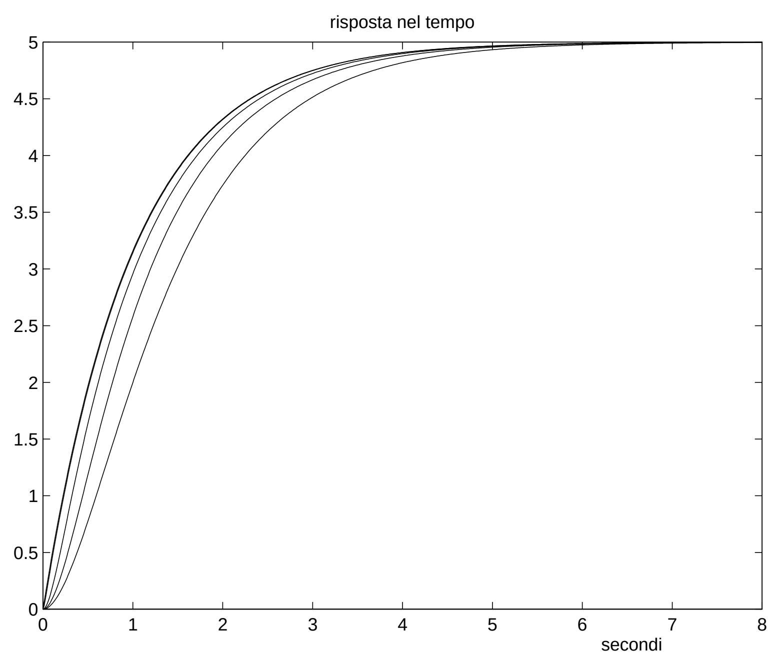
Sistemi a polo dominante

- I seguenti sistemi del secondo ordine hanno tutti guadagno statico $G_i(0) = 5$, hanno tutti un polo in -1 e differiscono per la posizione del secondo polo posizionato, rispettivamente, in -2, -4, -10, -100 e -1000:

$$G_1(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)}, \quad G_2(s) = \frac{20}{(s+1)(s+4)}, \quad G_3(s) = \frac{50}{(s+1)(s+10)}$$

$$G_4(s) = \frac{500}{(s+1)(s+100)}, \quad G_5(s) = \frac{5000}{(s+1)(s+1000)}, \quad \left[G(s) = \frac{5}{(s+1)}\right]$$

- La risposta al gradino unitario di questi sistemi è la seguente:



- Nel grafico l'andamento più lento è quello relativo al sistema $G_1(s)$, quello più veloce è relativo al sistema $G_5(s)$.
- Nel caso di sistemi stabili, si definisce **polo dominante** il polo che si trova più vicino all'asse immaginario.
- La risposta del sistema cambia "abbastanza poco" quando i poli non "dominanti" sono a parte reale molto più negativa del polo "dominante".
- I poli che si trovano una decade "più in basso" rispetto al polo dominante influenzano poco la risposta temporale del sistema.

Sistemi a "poli" dominanti

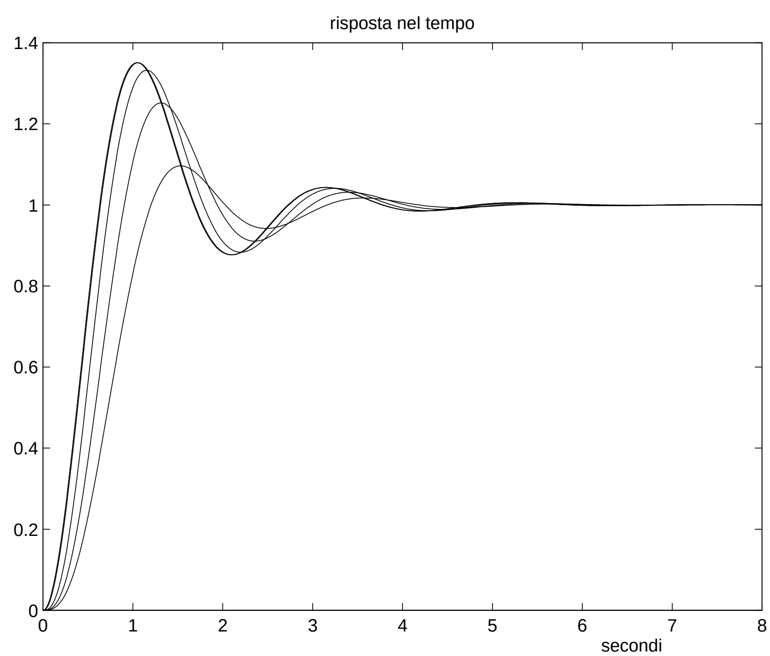
- Le stesse considerazioni valgono anche per sistemi "dominati" da una coppia di poli complessi coniugati.
- Si definiscono "**poli dominanti**" di un sistema asintoticamente stabile i due poli complessi coniugati che si trovano più vicino all'asse immaginario rispetto ad un qualunque altro polo del sistema.
- La risposta al gradino unitario dei seguenti sistemi

$$G_1(s) = \frac{10}{[(s+1)^2+3^2](1+\frac{s}{2})}, \quad G_2(s) = \frac{10}{[(s+1)^2+3^2](1+\frac{s}{4})}$$

$$G_3(s) = \frac{10}{[(s+1)^2+3^2](1+\frac{s}{10})}, \quad G_4(s) = \frac{10}{[(s+1)^2+3^2](1+\frac{s}{100})}$$

$$G_5(s) = \frac{10}{[(s+1)^2+3^2](1+\frac{s}{1000})}, \qquad \left[G(s) = \frac{10}{[(s+1)^2+3^2]}\right]$$

è quella riportata nel seguente grafico:



- Anche in questo caso, i poli che si trovano una decade "più in basso" rispetto alla coppia di "poli dominanti" influenzano poco la risposta temporale del sistema.

Sistema dinamico del secondo ordine

- Un qualunque sistema dinamico del secondo ordine privo di zeri:

$$G(s) = \frac{c}{s^2 + a\,s + b}$$

può sempre essere trasformato nel modo seguente:

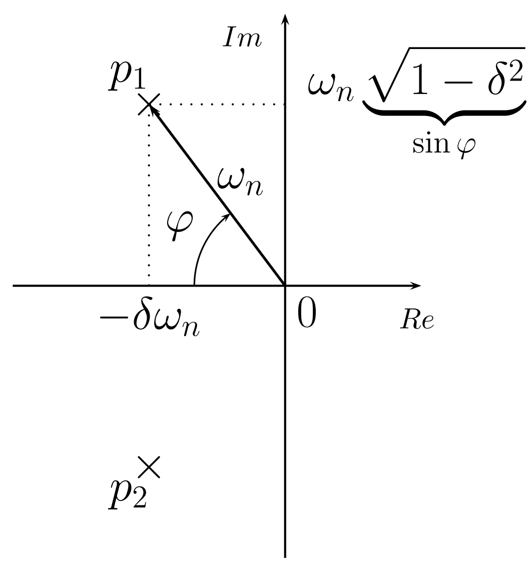
$$G(s) = K\,\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\delta\omega_n s + \omega_n^2}$$

- La pulsazione naturale ω_n, il coefficiente di smorzamento δ e il guadagno statico K sono definiti come segue:

$$\boxed{\omega_n = \sqrt{b}, \qquad \delta = \frac{a}{2\sqrt{b}}}\,, \qquad\qquad K = \frac{c}{b} = G(s)|_{s\to 0}$$

- Il significato geometrico dei parametri sul piano complesso è il seguente:

$$\begin{aligned}
p_{1,2} &= -\delta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\delta^2}\\
&= -\sigma \pm j\omega\\
\\
\delta &= \cos\varphi\\
\sigma &= \delta\,\omega_n\\
\omega &= \omega_n\sqrt{1-\delta^2}\\
\omega_n &= \sqrt{\sigma^2+\omega^2} = |p_1| = |p_2|
\end{aligned}$$



- Sul piano complesso s, la *pulsazione naturale* ω_n è la distanza dei poli complessi coniugati $p_{1,2}$ dall'origine.

- Il *coefficiente di smorzamento* δ è uguale al coseno dell'angolo φ che il segmento $\overline{p_1 0}$ forma con il semiasse negativo.