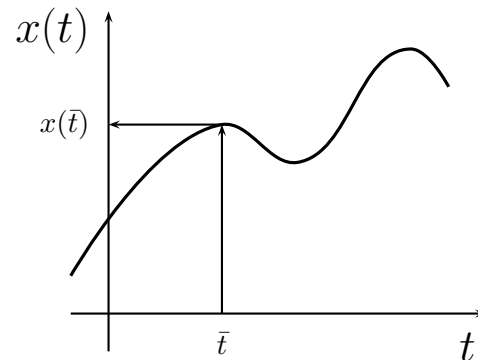


# RICHIAMI MATEMATICI

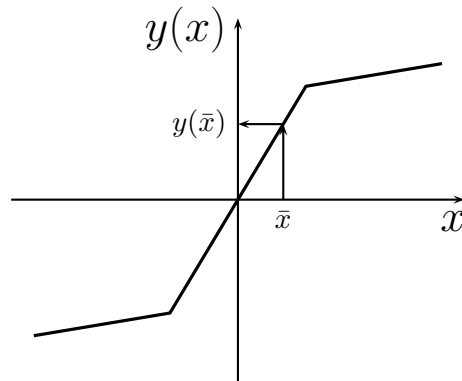
- Funzioni reali del tempo:

$$x(t) : t \rightarrow x(t)$$



- Funzioni reali dell'ingresso:

$$y(x) : x \rightarrow y(x)$$



- Numeri complessi. Un numero complesso è una coppia ordinata di numeri reali:

$$(x, y)$$

dove  $x$  è la parte reale ed  $y$  è la parte immaginaria. Vi sono molti modi equivalenti di rappresentare i numeri complessi:

1) Utilizzando il numero immaginario “ $j$ ” si ha che:

$$(x, y) \equiv x + j y$$

Il numero “ $j$ ” indica qual è la parte immaginaria. Il numero soddisfa le seguenti relazioni:

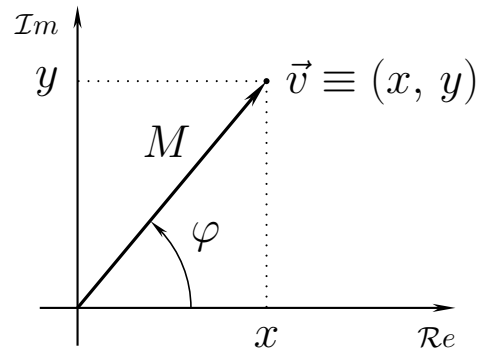
$$j = \sqrt{-1}, \quad j^2 = -1, \quad j^3 = -j, \quad j^4 = 1, \quad j^5 = j.$$

- 2) I numeri complessi  $(x, y)$  possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i punti di un piano:

$$\vec{v} \equiv (x, y) \equiv x + jy$$

$x$  indica la parte reale

$y$  indica la parte immaginaria.



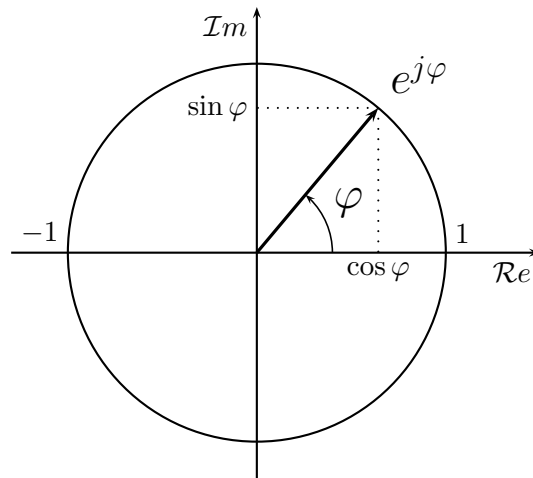
- 3) I punti del piano, a loro volta, possono essere messi in corrispondenza biunivoca con i vettori  $\vec{v}$  che collegano il punto  $(x, y)$  all'origine. Il vettore  $\vec{v}$  può essere espresso in forma "cartesiana" o in forma "polare":

$$\vec{v} = x + jy = M \angle \varphi = M e^{j\varphi}$$

Con  $M$  si è indicato il modulo e con  $\varphi$  la fase del vettore  $\vec{v}$ .

- Il numero complesso  $e^{j\varphi}$  rappresenta un vettore a modulo unitario e fase  $\varphi$ . Vale la relazione:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

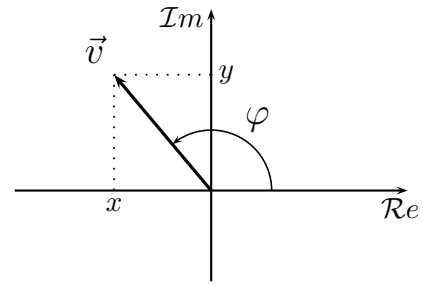


- In qualsiasi momento è possibile passare da una rappresentazione "cartesiana"  $(x, y)$  ad una rappresentazione "polare" (e viceversa) del numero complesso utilizzando le seguenti relazioni:

$$\begin{cases} M = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} x = M \cos \varphi \\ y = M \sin \varphi \end{cases}$$

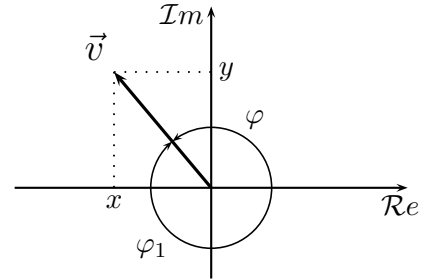
Attenzione: la funzione "arctan" fornisce valori  $\varphi$  compresi nell'intervallo  $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ . Quando  $x$  assume valori negativi occorre sommare a  $\varphi$  una fase costante  $\varphi_0 = \pi$ .

1) La fase  $\varphi$  di un vettore  $\vec{v}$  del piano, e quindi la fase  $\varphi$  del corrispondente numero complesso  $x + jy$ , si misura in senso **antiorario** rispetto al **semiasse reale positivo**.



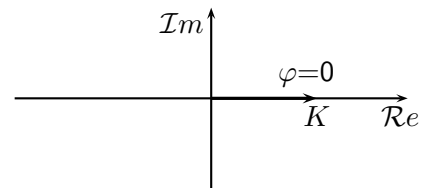
2) La fase  $\varphi$  di un vettore  $\vec{v}$  del piano è definita a meno di un multiplo intero di  $2\pi$ :

$$\arg[\vec{v}] = \varphi + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathcal{Z}$$



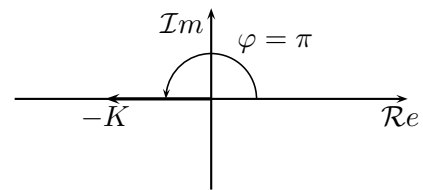
3) La fase dei numeri reali positivi  $K > 0$  è nulla:

$$\varphi = \arg[K] = 0 + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathcal{Z}$$



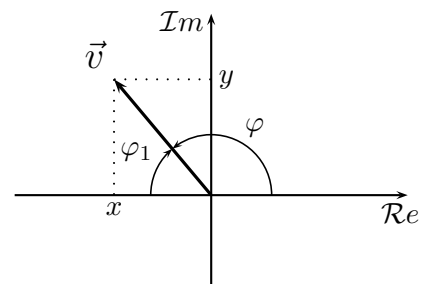
4) La fase dei numeri reali negativi  $-K < 0$  è  $\varphi = \pi$ :

$$\varphi = \arg[-K] = \pi + 2k\pi, \quad \forall k \in \mathcal{Z}$$



5) Per calcolare la fase  $\varphi$  di un vettore  $\vec{v} = x + jy$  con parte reale negativa,  $x < 0$ , utilizzare la formula:

$$\varphi = \arg[\vec{v}] = \pi - \arctan \left[ \frac{y}{|x|} \right]$$



6) Il modulo del prodotto di numeri complessi è uguale al **prodotto dei moduli**. Esempio:

$$\left| \frac{(1 + 3j)}{(2 - 5j)(-4 + j)} \right| = \frac{|1 + 3j|}{|2 - 5j| | -4 + j|} = \frac{\sqrt{1^2 + 3^2}}{\sqrt{2^2 + 5^2} \sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{29} \sqrt{17}}$$

7) La fase del prodotto o del rapporto di numeri complessi è uguale, rispettivamente, alla **somma** o alla **differenza delle fasi** dei singoli elementi. Esempio:

$$\arg \left[ \frac{(1 + 3j)}{(2 - 5j)(-4 + j)} \right] = \arctan \frac{3}{1} - \left[ \arctan \frac{-5}{2} + \pi - \arctan \frac{1}{4} \right]$$

## Esempi

Scrivere il modulo  $M(\omega) = |G(j\omega)|$  e la fase  $\varphi(\omega) = \arg G(j\omega)$  delle seguenti funzioni di risposta armonica  $G(j\omega)$  con  $\omega > 0$ :

$$1) \quad G(j\omega) = \frac{(j\omega - 2)(j3\omega + 4)}{j\omega(j\omega + 2)} e^{-j5\omega}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{16+9\omega^2}}{\omega} \\ \varphi(\omega) = \pi - \arctan \frac{\omega}{2} + \arctan \frac{3\omega}{4} - 5\omega - \frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\omega}{2} \\ \quad = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan \frac{\omega}{2} + \arctan \frac{3\omega}{4} - 5\omega \end{cases}$$

$$2) \quad G(j\omega) = \frac{(2 + 3j\omega)(2j\omega - 1)}{(j\omega)^2(j\omega + 5)^2} e^{-4j\omega t_0}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{4+9\omega^2} \sqrt{1+4\omega^2}}{\omega^2(25+\omega^2)} \\ \varphi(\omega) = \arctan \frac{3\omega}{2} + \pi - \arctan 2\omega - 4\omega t_0 - \pi - 2 \arctan \frac{\omega}{5} \\ \quad = \arctan \frac{3\omega}{2} - \arctan 2\omega - 4\omega t_0 - 2 \arctan \frac{\omega}{5} \end{cases}$$

$$3) \quad G(j\omega) = \frac{(j\omega + 3)(j\omega - 3)}{j\omega(2 - 5j\omega)} e^{-j3\omega t_0}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{\omega^2+9}{\omega\sqrt{4+25\omega^2}} \\ \varphi(\omega) = \arctan \frac{\omega}{3} + \pi - \arctan \frac{\omega}{3} - 3\omega t_0 - \frac{\pi}{2} + \arctan \frac{5\omega}{2} \\ \quad = \frac{\pi}{2} - 3\omega t_0 + \arctan \frac{5\omega}{2} \end{cases}$$

$$4) \quad G(j\omega) = \frac{(1 - 5j\omega)^2}{(j\omega)^2(j\omega + 3)} e^{-2j\omega t_0}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{1+25\omega^2}{\omega^2\sqrt{\omega^2+9}} \\ \varphi(\omega) = -2 \arctan 5\omega - 2\omega t_0 - \pi - \arctan \frac{\omega}{3} \end{cases}$$

$$5) \quad G(j\omega) = \frac{(3 - j\omega)}{j\omega(1 + 5j\omega)^2} e^{-2j\omega t_0}$$

$$\begin{cases} M(\omega) = \frac{\sqrt{\omega^2+9}}{\omega(1+25\omega^2)} \\ \varphi(\omega) = -\arctan \frac{\omega}{3} - 2\omega t_0 - \frac{\pi}{2} - 2 \arctan 5\omega \end{cases}$$

- **Funzioni complesse di variabile reale.** Si consideri, per esempio, la seguente funzione  $F(\omega)$ :

$$F(\omega) = \frac{100}{(4 + j\omega)(13 - \omega^2 + j4\omega)} = M(\omega) e^{j\varphi(\omega)}$$

La funzione  $F(\omega)$  associa ad ogni valore reale di  $\omega$  un numero complesso  $F(\omega)$  avente modulo  $M(\omega) = |F(\omega)|$  e fase  $\varphi(\omega) = \arg[F(\omega)]$ .

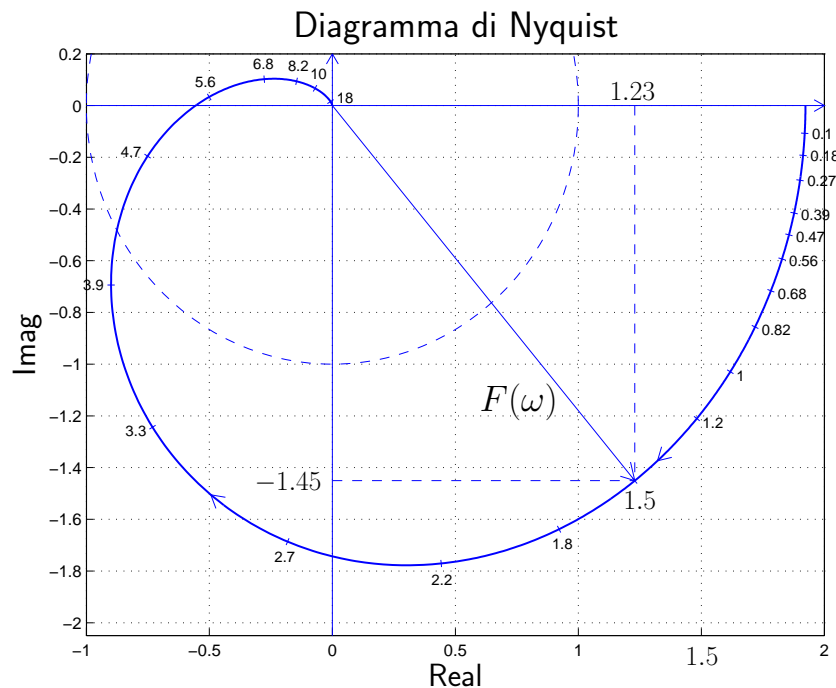
$$F(\omega) : \omega \rightarrow F(\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)}$$

La funzione  $F(\omega)$  può rappresentare, per esempio, la funzione di risposta armonica di un sistema lineare:

$$x(t) = X \sin \omega t \quad \longrightarrow \quad \boxed{F(\omega)} \quad \longrightarrow \quad y(t) = \underbrace{M(\omega) X}_{Y(\omega)} \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$$

In questo caso il modulo  $M(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X}$  ha il significato di “guadagno” del sistema alla pulsazione  $\omega$ , mentre  $\varphi(\omega)$  rappresenta lo sfasamento della sinusoide di uscita  $y(t) = Y(\omega) \sin[\omega t + \varphi(\omega)]$  rispetto a quella di ingresso  $x(t) = X \sin \omega t$ .

- Funzioni  $F(\omega)$  di questo tipo possono essere rappresentate, al variare del parametro  $\omega$ , come curve sul piano complesso:



In corrispondenza della pulsazione  $\omega = 1.5$  si ha:

$$F(\omega)|_{\omega=1.5} = 1.23 - 1.45j = \sqrt{1.23^2 + 1.45^2} e^{-j \arctan \frac{1.45}{1.23}} = M e^{-j\varphi}$$

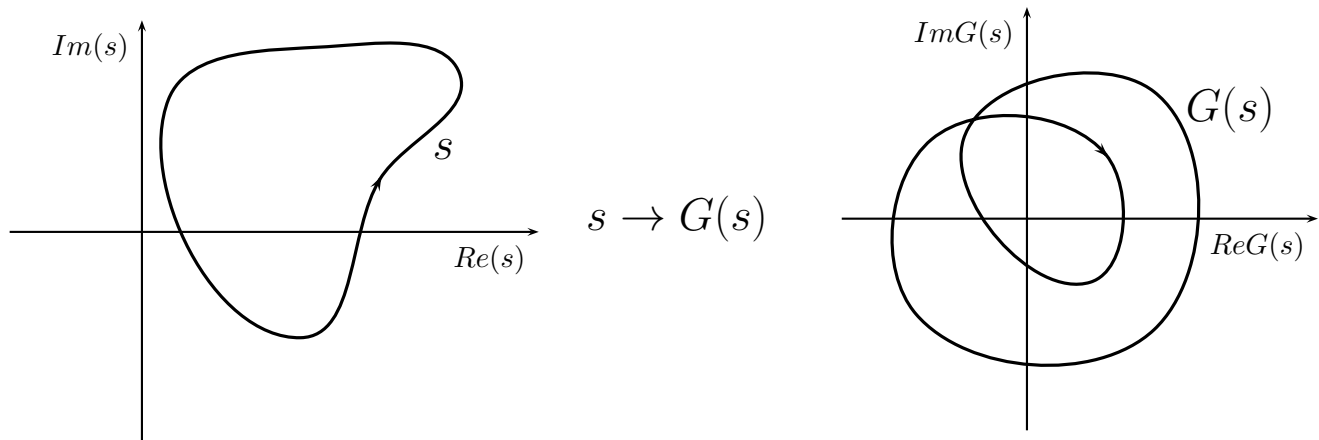
- **Funzioni complesse di variabile complessa.** Ad esempio la trasformata di Laplace  $G(s)$  di un segnale continuo  $g(t)$ :

$$g(t) \quad \leftrightarrow \quad G(s) = \int_0^{\infty} g(t)e^{-st} dt$$

- Per ogni valore della variabile complessa  $s$ , la funzione  $G(s)$  fornisce un numero complesso  $G(s)$ :

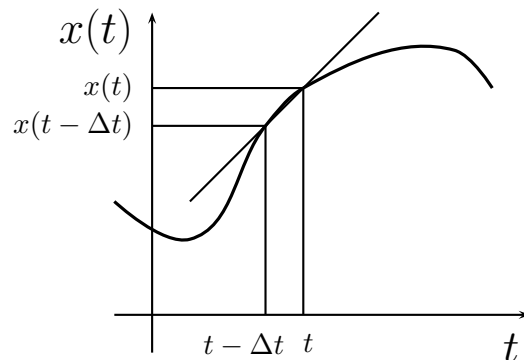
$$G(s) : s \rightarrow G(s) \quad s \in \mathbb{C}, G(s) \in \mathbb{C}$$

Ad ogni curva chiusa del piano complesso è associata una curva chiusa nel piano complesso:



- Una funzione di questo tipo è in grado di descrivere una “trasformazione” del piano complesso.
- **Derivata di una funzione.** Data la funzione  $x(t)$ , con  $\dot{x}(t)$  si indica la derivata di  $x(t)$  rispetto al parametro  $t$ , definita come segue:

$$\dot{x}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t) - x(t - \Delta t)}{\Delta t}$$



- La derivata  $\dot{x}(t)$  descrive la “pendenza” funzione  $x(t)$  nell’intorno del punto  $t$ .

## Equazioni differenziali

- **Equazioni differenziali:** sono dei legami algebrici tra una o più funzioni, per esempio  $x(t)$ ,  $y(t)$ , ecc., e le loro derivate  $\dot{x}(t)$ ,  $\dot{y}(t)$ ,  $\ddot{x}(t)$ ,  $\ddot{y}(t)$ , ecc.
- Le equazioni differenziali possono essere:

1) non lineari:

$$f(x(t), y(t), \dot{x}(t), \dot{y}(t), \ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \dots) = 0$$

2) lineari tempo varianti (i coefficienti  $a_i(t)$  e  $b_i(t)$  variano nel tempo):

$$b_2(t)\ddot{y}(t) + b_1(t)\dot{y}(t) + b_0(t)y(t) = a_1(t)\dot{x}(t) + a_0(t)x(t)$$

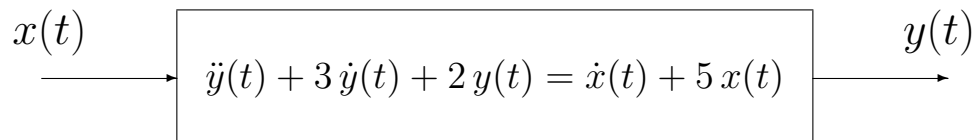
3) lineari tempo-invarianti (i coefficienti  $a_i$  e  $b_i$  sono costanti):

$$b_2\ddot{y}(t) + b_1\dot{y}(t) + b_0y(t) = a_1\dot{x}(t) + a_0x(t)$$

- Nel seguito si farà riferimento solamente ad equazioni differenziali lineari tempo-invarianti. Esempio:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{x}(t) + 5x(t)$$

- Vengono utilizzate per descrivere il comportamento dinamico di un sistema fisico. Conoscere l'equazione differenziale che descrive un sistema dinamico vuol dire conoscere completamente il sistema stesso.
- Utilizzando l'equazione differenziale è possibile prevedere (cioè calcolare) quale sarà l'andamento futuro dell'uscita  $y(t)$  del sistema, noto che sia l'andamento dell'ingresso  $x(t)$ .



- Noto  $x(t)$ , l'incognita dell'equazione differenziale è la funzione  $y(t)$ . Eseguire questo calcolo vuol dire "risolvere" l'equazione differenziale del sistema per quel particolare andamento della funzione di ingresso  $x(t)$ .
- Dall'equazione differenziale è possibile ricavare anche la descrizione "statica" del sistema, basta mettere a zero tutte le derivate ( $\dot{y}(t) = 0$ ,  $\ddot{y}(t) = 0, \dots$ ,  $\dot{x}(t) = 0$ ,  $\ddot{x}(t) = 0, \dots$ ):

$$2y(t) = 5x(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = \frac{5}{2}x(t)$$

- È possibile anche tenere conto, eventualmente, delle condizioni iniziali del sistema (cioè dell'energia accumulata nel sistema all'istante iniziale).
- Nei problemi di controllo, le condizioni iniziali vengono spesso trascurate in quanto, per sistemi controllati stabili, la loro influenza tende ad annullarsi per  $t \rightarrow \infty$ .
- Le equazioni differenziali si possono risolvere in vari modi. Il modo più efficiente, dal punto di vista dei controlli, è quello di utilizzare le **Trasformate di Laplace**.
- Questo metodo si basa sull'utilizzo di funzioni complesse  $X(s)$  ed  $Y(s)$  della variabile complessa  $s$  messe in corrispondenza *biunivoca* con i corrispondenti segnali temporali  $x(t)$  e  $y(t)$ :

$$x(t) \quad \leftrightarrow \quad X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

$$y(t) \quad \leftrightarrow \quad Y(s) = \int_0^{\infty} y(t)e^{-st} dt$$

- Il vantaggio che si ha nell'utilizzo delle trasformate di Laplace è che l'equazione differenziale di partenza si trasforma in una semplice equazione algebrica facilmente risolvibile.
- Una proprietà importante della trasformata di Laplace è la seguente:

$$\mathcal{L}[x(t)] = X(s) \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[\dot{x}(t)] = sX(s) - x(0^-)$$

- Nel caso in cui le condizioni iniziali siano nulle,  $x(0^-) = 0$ , si ha:

$$\mathcal{L}[\dot{x}(t)] = s X(s)$$

cioè in ambito trasformato per derivare un segnale basta moltiplicare per “s” la sua trasformata di Laplace.

- Esempio. Applicando la trasformata di Laplace alla seguente equazione differenziale (se le condizioni iniziali sono nulle)

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{x}(t) + 5x(t)$$

si ottiene la seguente relazione algebrica

$$s^2 Y(s) + 3s Y(s) + 2Y(s) = s X(s) + 5X(s)$$

$$(s^2 + 3s + 2)Y(s) = (s + 5)X(s)$$

dalla quale si ricava il seguente legame tra la funzione di ingresso  $X(s)$  e la funzione di uscita  $Y(s)$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{(s + 5)}{s^2 + 3s + 2}}_{G(s)} X(s) = G(s) X(s)$$

- La funzione  $G(s)$  prende il nome di **funzione di trasferimento** del sistema. Essa caratterizza completamente il sistema in esame e si ricava direttamente e in modo biunivoco dalla corrispondente equazione differenziale:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = \dot{x}(t) + 5x(t) \quad \leftrightarrow \quad G(s) = \frac{(s + 5)}{s^2 + 3s + 2}$$

- La relazione  $Y(s) = G(s)X(s)$  indica che la risoluzione di equazioni differenziali in ambito trasformato è molto semplice: la trasformata del segnale di uscita si ricava semplicemente moltiplicando la funzione di trasferimento  $G(s)$  del sistema per la trasformata di Laplace  $X(s)$  del segnale di ingresso:

$$Y(s) = G(s)X(s) \quad \rightarrow \quad y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}[G(s)X(s)]$$

Per ricavare  $y(t)$  sarà sufficiente antitrasformare la funzione  $Y(s)$ .