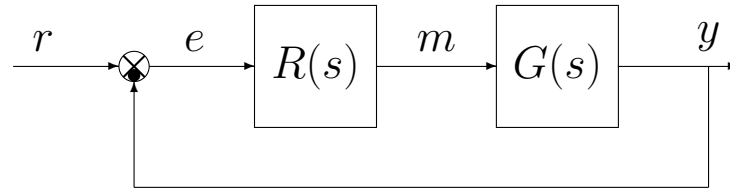


## Progetto delle reti correttrici

- Si consideri il seguente sistema retroazionato:



- Le specifiche su cui si basa il progetto del regolatore  $R(s)$  riguardano:
  - la **precisione**: gli errori a regime in risposta ai segnali tipici e il comportamento a regime in presenza di disturbi e di variazioni parametriche;
  - la **stabilità** (“comportamento dinamico soddisfacente”): massima sovraelongazione nella risposta al gradino, il picco di risonanza, i margini di ampiezza e di fase e il coefficiente di smorzamento dei poli dominanti;
  - **velocità di risposta**: il tempo di ritardo, il tempo di salita, il tempo di assestamento, la banda passante.
- Il primo parametro che si determina in fase di progetto, è il numero  $h$  di integratori da inserire nel regolatore  $R(s)$ :

$$R(s) = \frac{1}{s^h}$$

É necessario introdurre uno o piú poli nell’origine quando si vuole avere errori a regime nulli per ingressi a gradino, a rampa o a parabola. Il valore di  $h$  dipende anche dal numero di poli nell’origine presenti all’interno della funzione  $G(s)$ .

Un altro caso in cui é opportuno inserire un polo nell’origine nel regolatore  $R(s)$  é quando il sistema  $G(s)$  é di tipo zero ed é dominato da un ampio ritardo finito.

- Il secondo parametro di progetto che si determina all'interno del regolatore  $R(s)$  é la costante di guadagno  $K$ :

$$R(s) = \frac{K}{s^h}$$

Il valore di  $K$  viene scelto sufficientemente elevato da garantire errori a regime sufficientemente piccoli, oppure per rendere il sistema retroazionato piú robusto alle variazioni parametriche e ai disturbi esterni agenti sul sistema. Con una opportuna scelta dei parametri  $h$  e  $K$  si riesce tipicamente a soddisfare tutte le specifiche di *precisione*.

- Nel caso in cui le specifiche di precisione siano soddisfatte dalla scelta del parametro  $h$ , il guadagno  $K$  può essere scelto a piacere. In questo caso, tipicamente si utilizza il *luogo delle radici* applicato alla funzione  $\frac{G(s)}{s^h}$  per fare una scelta ottimale del parametro  $K$  in modo da garantire la stabilità del sistema retroazionato ed eventualmente il minimo tempo di assestamento alla risposta al gradino.
- Dopo aver soddisfatto le specifiche di precisione utilizzando i parametri  $h$  e  $K$ , accade spesso che il sistema retroazionato sia instabile, oppure sia stabile ma con bassi margini di stabilità e quindi transitori iniziali insoddisfacenti. In questo caso all'interno del regolatore  $R(s)$  si inserisce una rete correttiva  $C(s)$ :

$$R(s) = \frac{KC(s)}{s^h}$$

e si utilizzano i gradi di libertà da essa presenti per soddisfare le specifiche di *stabilità* ed, eventualmente, di *velocità di risposta*.

- La rete correttiva  $C(s)$  ha tipicamente una struttura dinamica del primo o del secondo ordine:

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}, \quad C(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{\left(1 + \frac{\tau_2}{\alpha} s\right)(1 + \alpha \tau_1 s)}$$

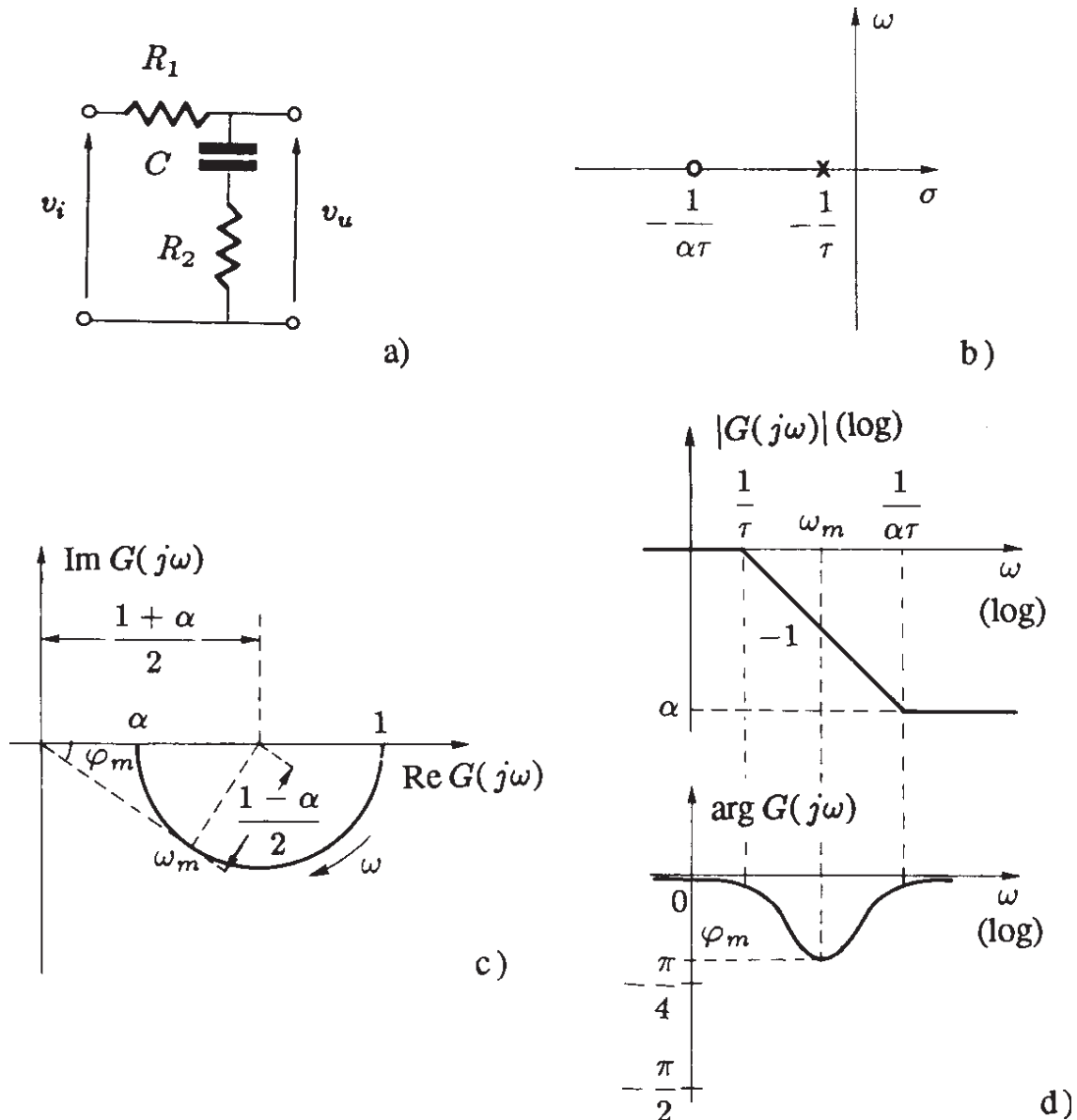
Si utilizzano tipicamente reti correttive  $C(s)$  con guadagno statico unitario,  $C(0) = 1$ , per non influire sulle specifiche di precisione precedentemente soddisfatte dalla scelta del parametro  $K$ .

## Rete ritardatrice

La funzione di trasferimento di una rete ritardatrice è:

$$G(s) = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s} \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

dove  $\alpha < 1$  oppure  $\alpha\tau = \tau_1 < \tau_2 = \tau$ . Diagrammi di Bode e Nyquist:



La rete attenua il modulo e ritarda la fase per tutte le pulsazioni finite. Il massimo ritardo di fase  $\varphi_m$  si ottiene in corrispondenza della pulsazione  $\omega_m$ , media geometrica delle pulsazioni  $1/\tau$  e  $1/(\alpha\tau)$ :

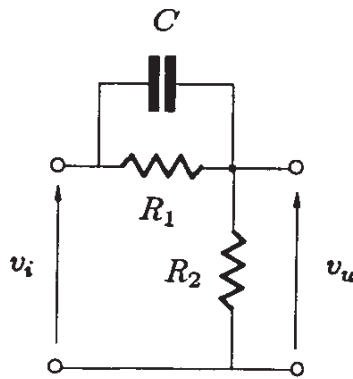
$$\varphi_m = -\arcsen \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad \omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}$$

## Rete anticipatrice

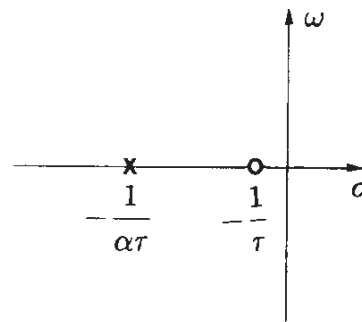
La funzione di trasferimento di una rete anticipatrice è:

$$\bar{G}(s) = \alpha \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s} \quad \Rightarrow \quad G(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s}$$

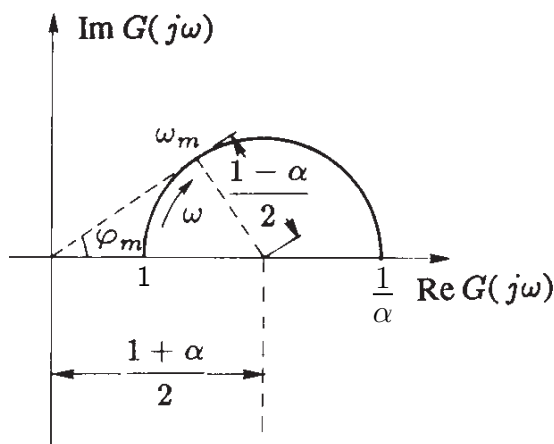
dove  $\alpha < 1$  e  $\tau = \tau_1 > \tau_2 = \alpha\tau$ . Diagrammi di Bode e Nyquist:



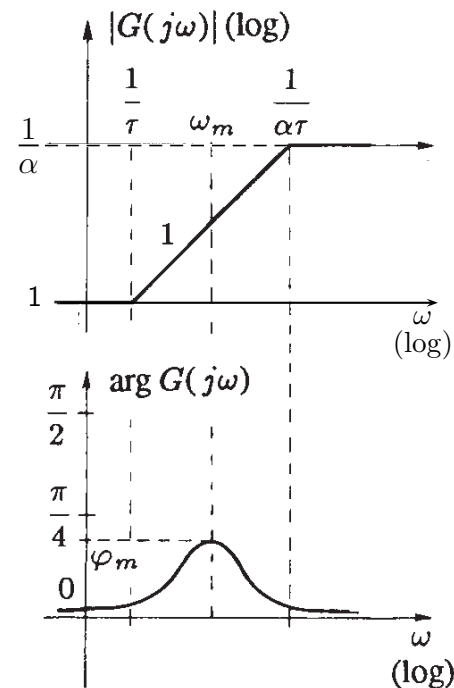
a)



b)



c)



d)

Dopo aver compensato con un guadagno aggiuntivo  $1/\alpha$  l'attenuazione  $\alpha$  a basse frequenze, si ottiene una rete che **amplifica il modulo e anticipa la fase per tutte le pulsazioni finite**. Il massimo anticipo di fase  $\varphi_m$  si ottiene in corrispondenza della pulsazione  $\omega_m$ :

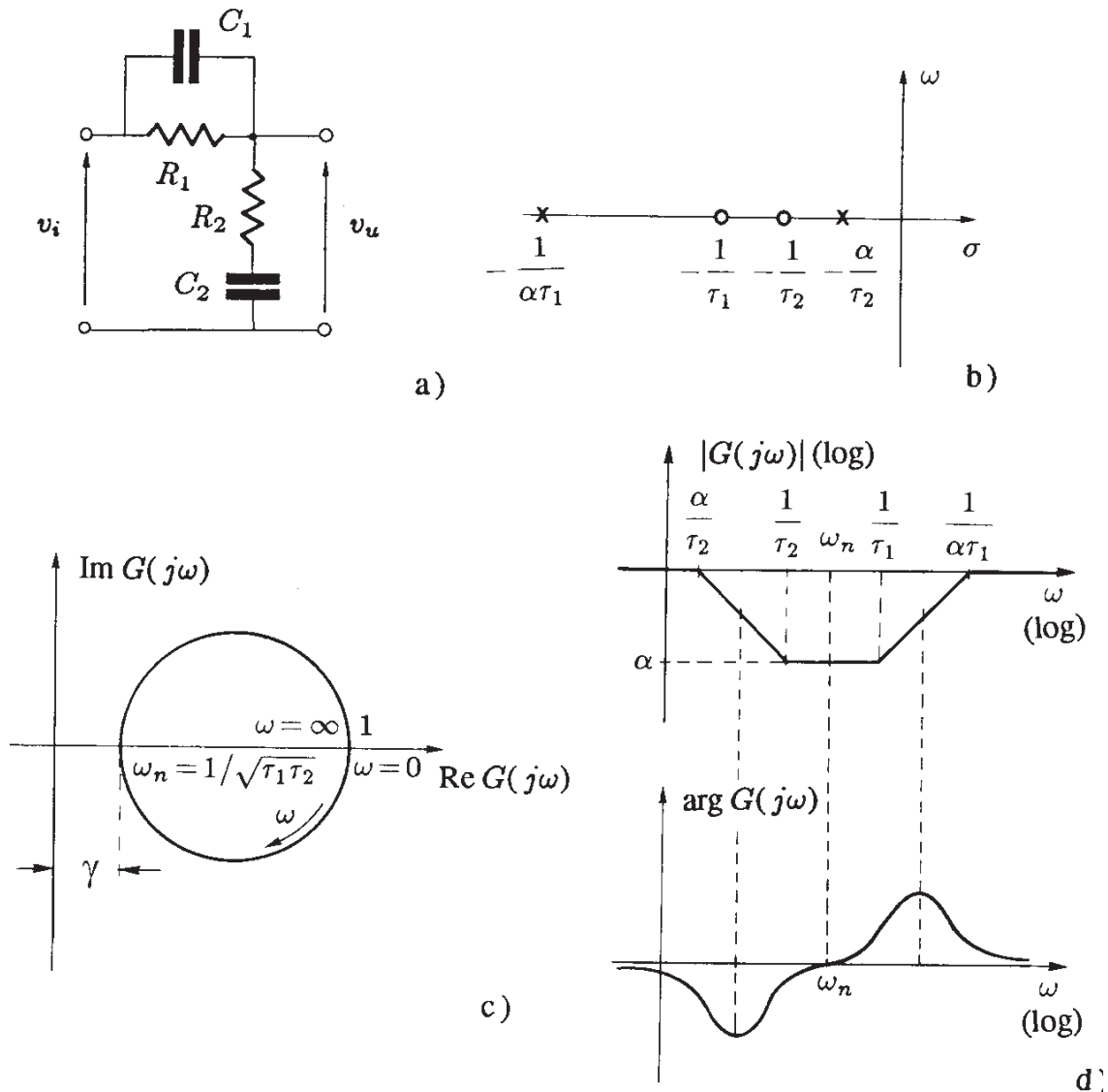
$$\varphi_m = \arcsen \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha}, \quad \omega_m = \frac{1}{\tau \sqrt{\alpha}}$$

## Rete a ritardo e anticipo

La funzione di trasferimento di una rete a ritardo e anticipo è:

$$G(s) = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \frac{\tau_2}{\alpha} s)(1 + \alpha \tau_1 s)}$$

dove  $\alpha < 1$  e  $\tau_1 < \tau_2$ . Diagrammi frequenziali di Bode e Nyquist:



Questa rete attenua all'interno della banda frequenziale  $\frac{\alpha}{\tau_2} < \omega < \frac{1}{\alpha\tau_1}$ . In corrispondenza della pulsazione  $\omega = \omega_n$  la rete attenua di un fattore  $\gamma$ :

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{\tau_1\tau_2}}, \quad \gamma = \frac{\tau_1 + \tau_2}{\alpha\tau_1 + \frac{\tau_2}{\alpha}}$$

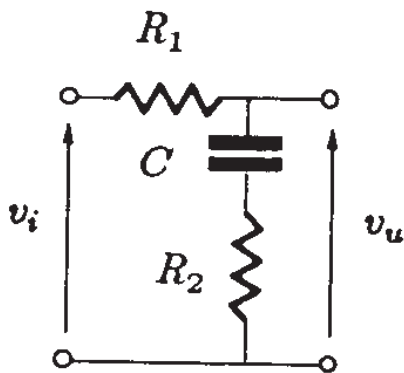
Per  $\omega = \omega_n$ , l'attenuazione reale  $\gamma$  è maggiore dell'attenuazione asintotica:

$$\gamma > \alpha.$$

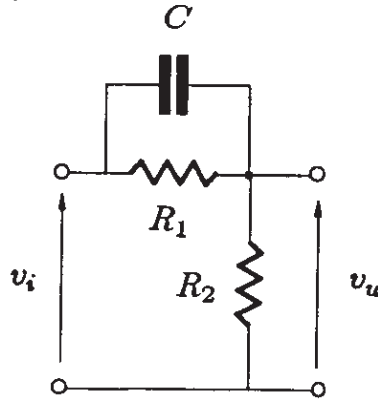
## Calcolo delle reti correttrici

Facendo l'ipotesi di corrente nulla fornita al carico, la funzione di trasferimento  $G(s)$  delle reti correttrici può essere determinata utilizzando le impedenze complesse e la regola del partitore di tensione.

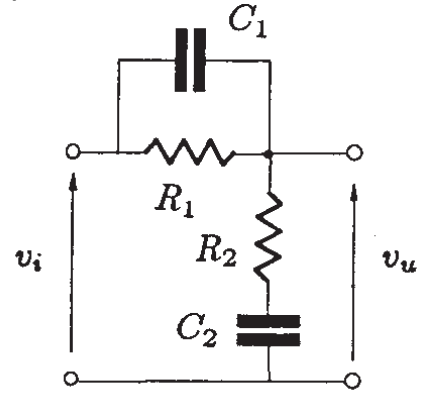
1) Rete ritardatrice:



2) Rete anticipatrice:



3) Rete ritardo-anticipo:



1) Rete ritardatrice:

$$G(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{1 + R_2 C s}{1 + (R_1 + R_2) C s} = \frac{1 + \alpha \tau s}{1 + \tau s}$$

in cui si è posto  $\tau := (R_1 + R_2) C$     $\alpha := \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$ .

2) Rete anticipatrice:

$$G(s) = \frac{R_2}{R_2 + \frac{1}{(1/R_1) + Cs}} = \frac{R_2 (1 + R_1 C s)}{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C s} = \alpha \frac{1 + \tau s}{1 + \alpha \tau s}$$

in cui si è posto  $\tau := R_1 C$     $\alpha := \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1$ .

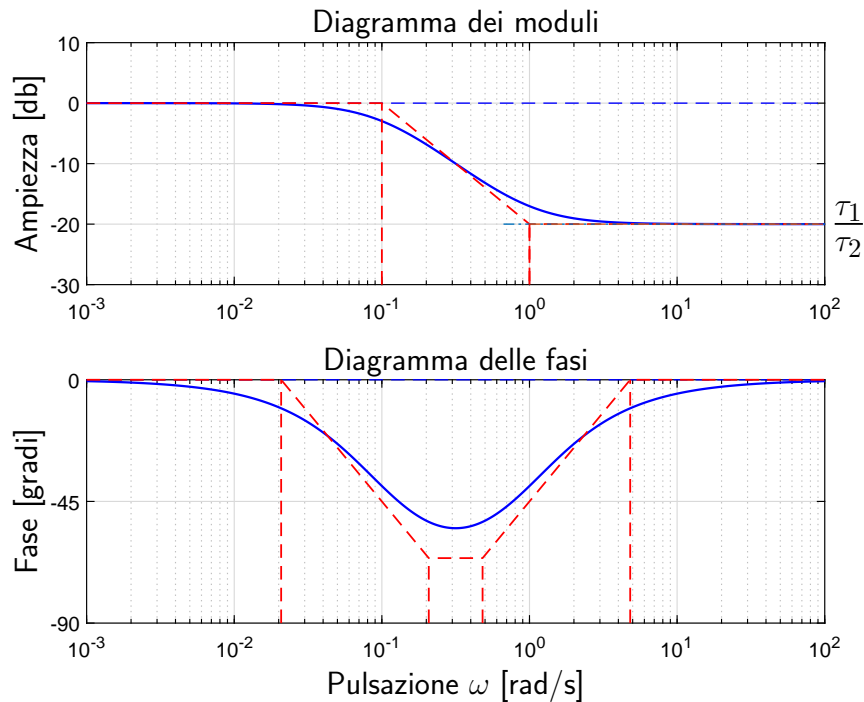
3) Rete ritardo-anticipo:

$$G(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 s}}{R_2 + \frac{1}{C_2 s} + \frac{1}{(1/R_1) + C_1 s}} = \frac{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s)}{(1 + \tau_1 s)(1 + \tau_2 s) + \tau_{12} s}$$

in cui si è posto  $\tau_1 := R_1 C_1$ ,  $\tau_2 := R_2 C_2$ ,  $\tau_{12} := R_1 C_2$ .

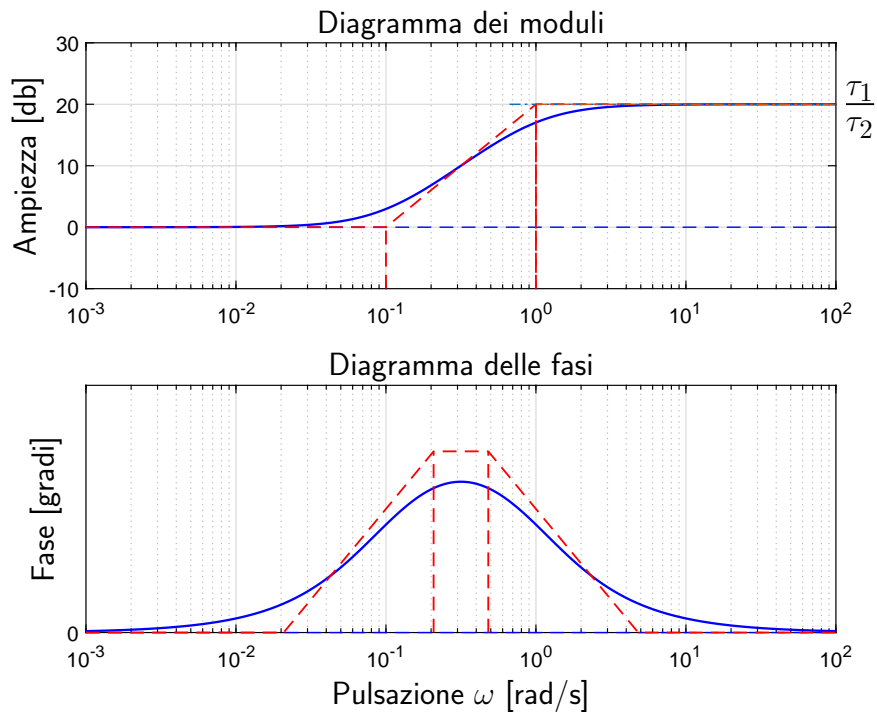
## Diagrammi di bode delle reti corretttrici del primo ordine

### Rete ritardatrice:



Effetto stabilizzante: attenuazione alle alte frequenze (anche molto ampia).

### Rete anticipatrice:



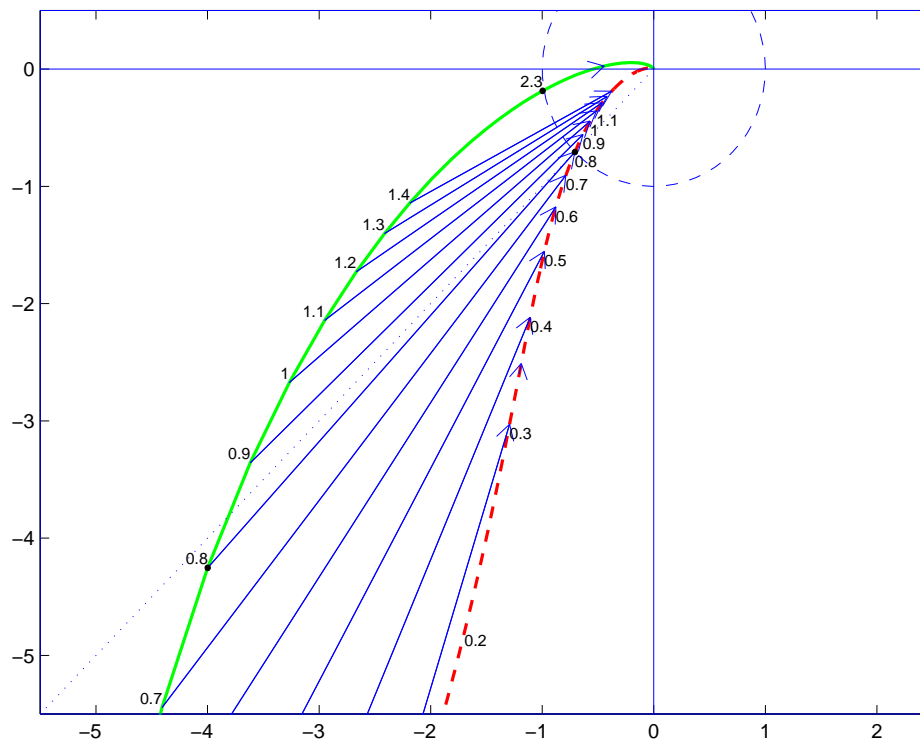
Effetto stabilizzante: anticipo di fase nella zona centrale (di ampiezza limitata).

## Azione stabilizzante di una rete ritardatrice

- Una rete ritardatrice **attenua e sfasa** a tutte la pulsazioni.

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} \quad \text{con} \quad \tau_1 < \tau_2.$$

- Azione stabilizzante di una rete ritardatrice è essenzialmente data dall'attenuazione alle alte pulsazioni.
- Esempio di sintesi sul piano di Nyquist:



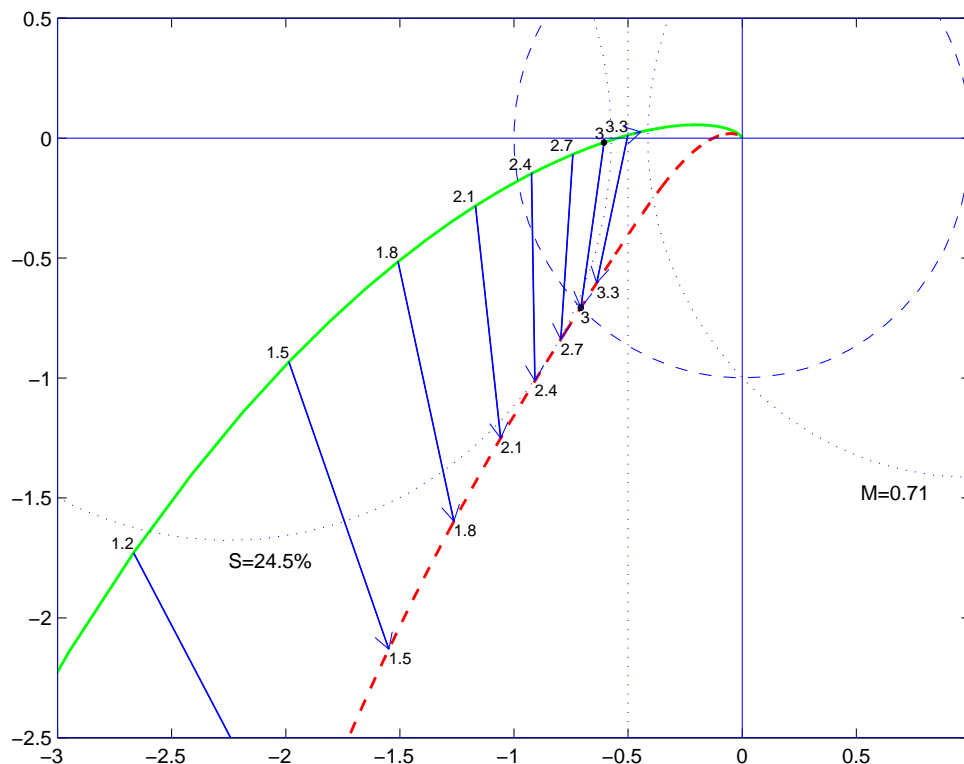
- L'attenuazione alle alte frequenze ha come effetto negativo la riduzione della banda passante del sistema.
- Nell'esempio riportato sopra, il sistema senza rete correttore ha larghezza di banda  $\omega_f = 2.3$ , quello con rete correttore  $\omega_f = 0.8$ . Il sistema retroazionato avrà un tempo di salita più lungo.
- Un vantaggio della rete ritardatrice rispetto a quella anticipatrice è la sua capacità di poter stabilizzare anche sistemi con margini di fase fortemente negativi.

## Azione stabilizzante di una rete anticipatrice

- Una rete anticipatrice amplifica e anticipa a tutte le pulsazioni

$$C(s) = \frac{1 + \tau_1 s}{1 + \tau_2 s} \quad \text{con} \quad \tau_1 > \tau_2.$$

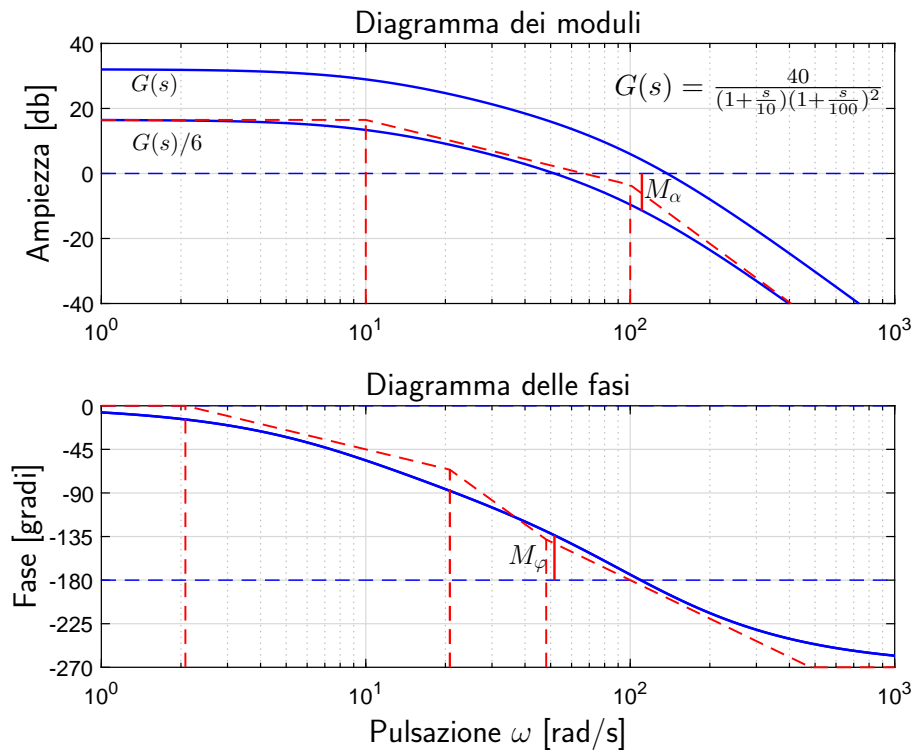
- Azione stabilizzante di una rete anticipatrice è essenzialmente data dall'anticipo di fase.
- Esempio di sintesi sul piano di Nyquist:



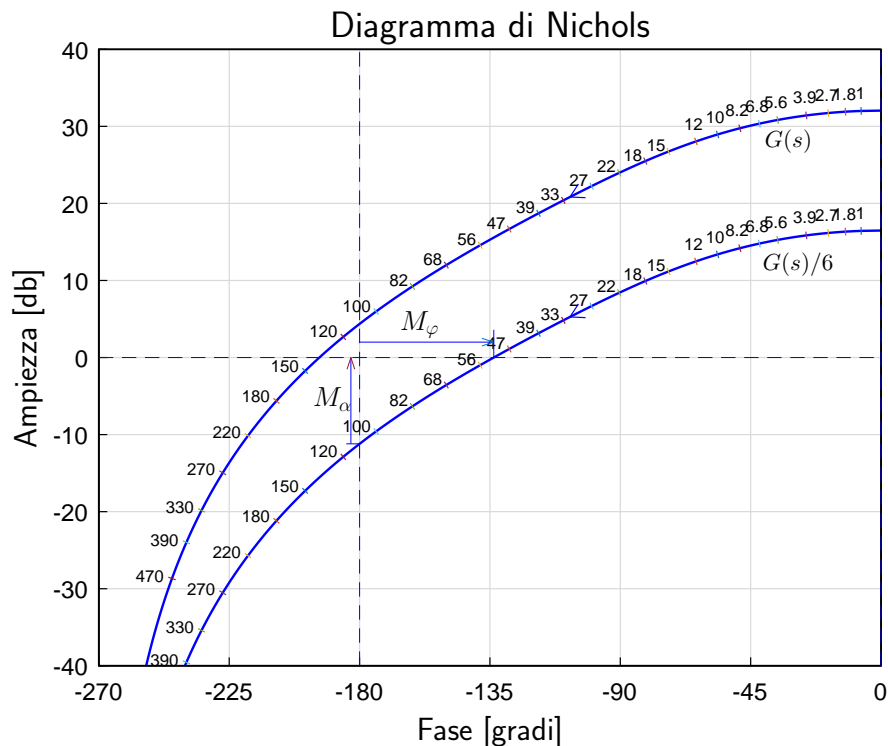
- L'azione amplificatrice ha come effetto positivo l'allargamento della banda passante.
- Nell'esempio riportato sopra, il sistema senza rete correttiva ha larghezza di banda  $\omega_f = 2.3$ , quello con rete correttiva  $\omega_f = 3$ .
- Il massimo anticipo di fase  $\varphi_m$  che può essere fornito da una rete anticipatrice è  $\varphi_m = \frac{\pi}{2}$ , per cui una rete anticipatrice può essere utilizzata solamente per migliorare il transitorio di sistemi già stabili o per stabilizzare sistemi con margini di fase negativi ma piccoli.

## Stabilizzazione mediante riduzione del guadagno

- Diagrammi di Bode:



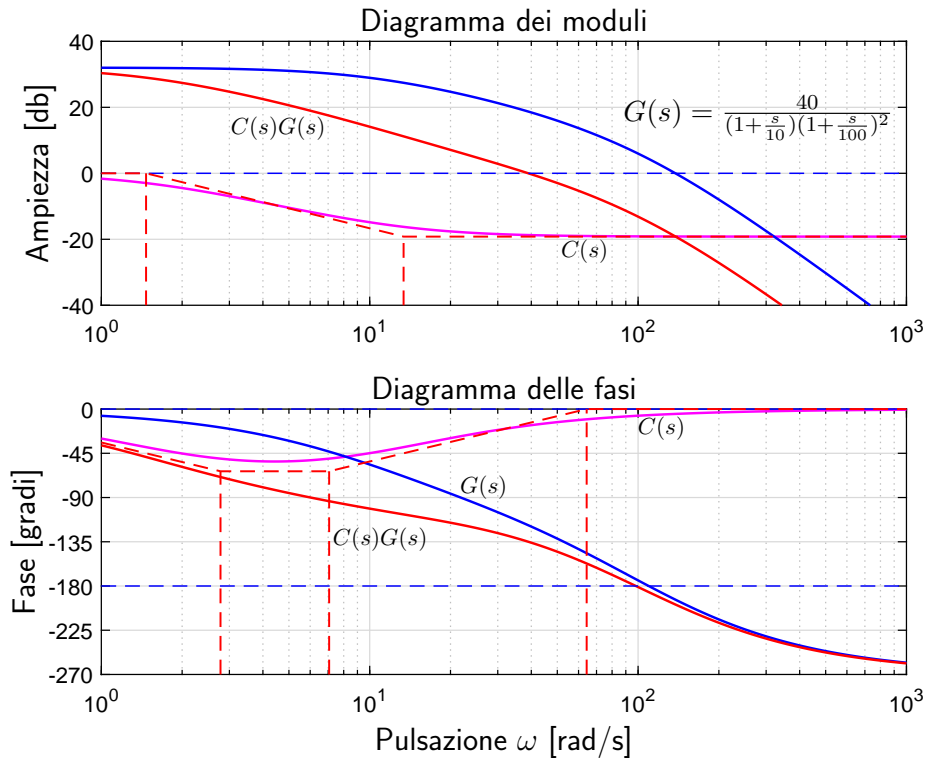
- Diagrammi di Nichols:



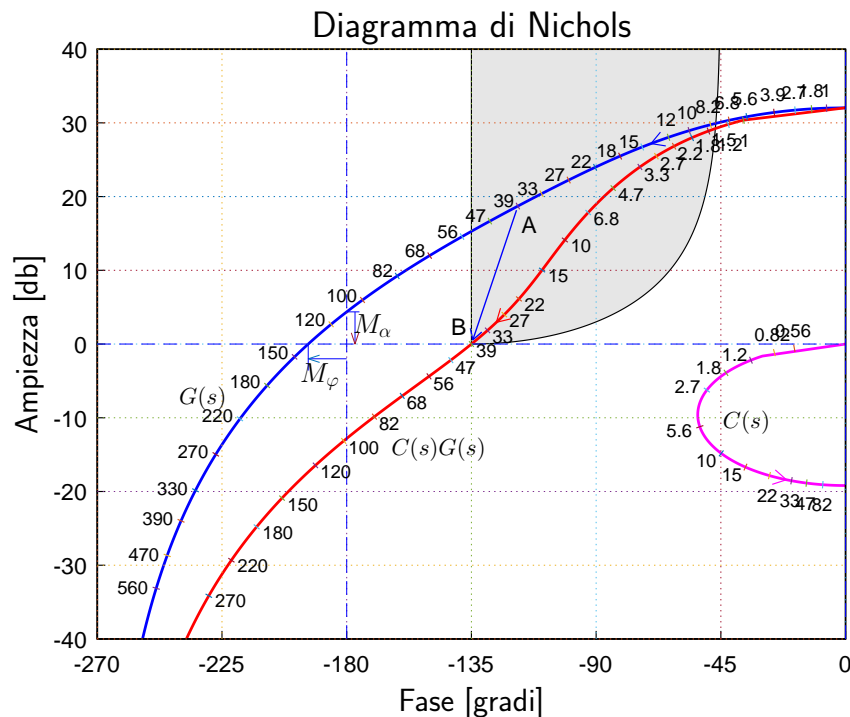
- Intervento sconsigliabile, in quanto i sistemi in retroazione funzionano tanto meglio, come prontezza e insensibilità ai disturbi, quanto più elevato è il guadagno di anello.

## Stabilizzazione mediante rete ritardatrice

- Diagrammi di Bode:



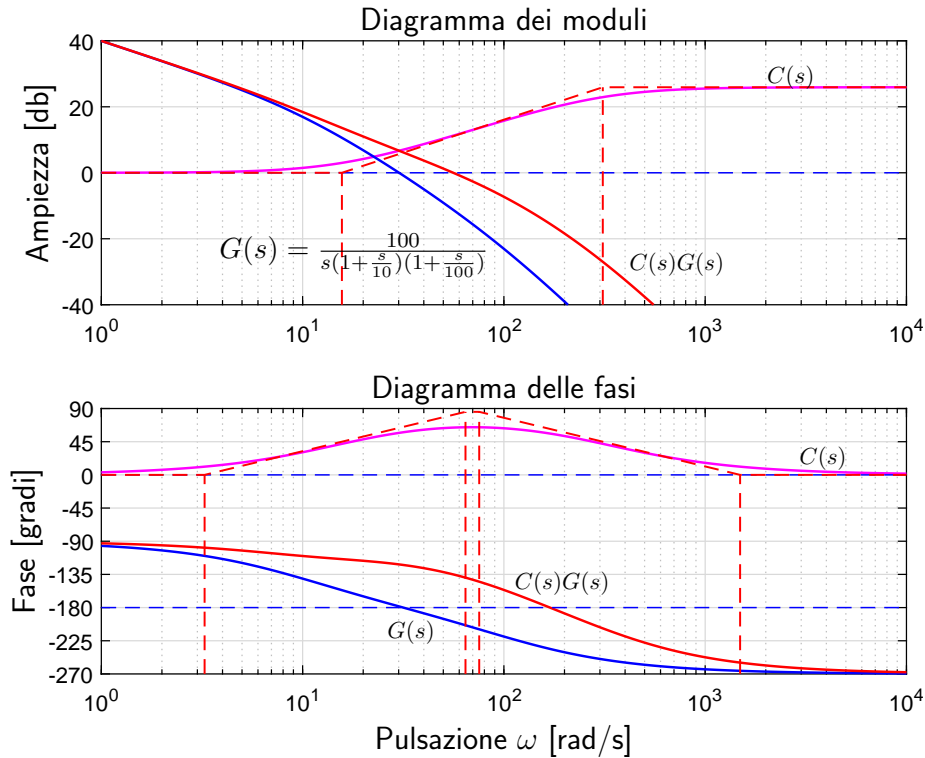
- Diagrammi di Nichols:



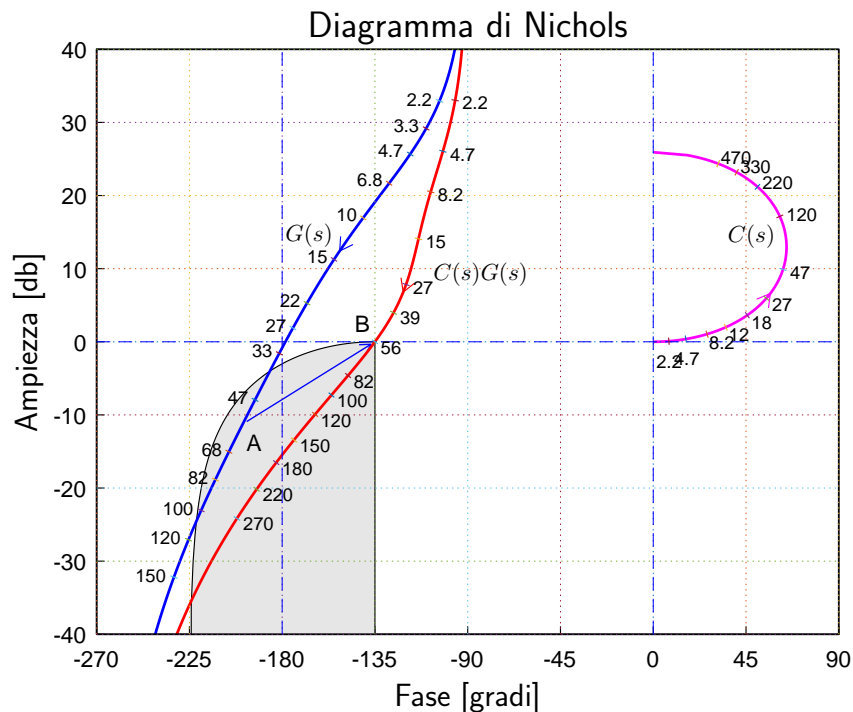
- Si usa per stabilizzare sistemi che abbiamo un margine di fase fortemente negativo (per esempio gli amplificatori operazionali). L'inconveniente principale è la *riduzione della banda passante*: risposta transitoria meno pronta e neutralizzazione meno efficace dei disturbi ad alta frequenza.

## Stabilizzazione mediante rete anticipatrice

- Diagrammi di Bode:



- Diagrammi di Nichols:



- La rete anticipatrice ha l'effetto di aumentare sia il margine di fase (diminuzione dell'overshoot) che il guadagno alle alte frequenze (la risposta più pronta perchè aumenta la banda passante).