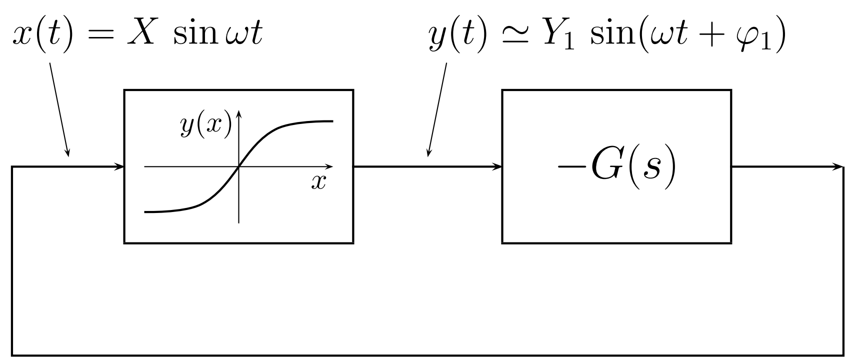
Il metodo della funzione descrittiva

• Tutti i sistemi fisici sono in realtà non lineari e si comportano approssimativamente come sistemi lineari solo per piccoli segnali.

• Il metodo della funzione descrittiva costituisce un utile strumento per verificare se l'innesco di oscillazioni autosostenute in un sistema di controllo progettato sotto l'ipotesi di linearità è possibile o meno.

• È un metodo *non rigoroso, semplice, intuitivo e soddisfacente da un punto di vista numerico* nella maggior parte dei casi di interesse pratico.

• Il metodo si applica a sistemi che possano essere descritti dal seguente schema a blocchi:



• Sul sistema si fanno le seguenti ipotesi:

i) il sistema é privo di ingressi;

ii) la non linearitá è puramente algebrica ed è descritta da una caratteristica statica $y(x)$ indipendente dalla pulsazione ω del segnale di ingresso $x(t)$;

iii) la caratteristica statica $y(x)$ è simmetrica rispetto all'origine.

• Si suppone che il sistema retroazionato sia sede di un'oscillazione persistente e che all'ingresso del blocco non lineare tale oscillazione sia sinusoidale:

$$x(t) = X\,\sin\,\omega t$$

• All'uscita del blocco non lineare é presente un segnale periodico $y(t)$ avente la stessa pulsazione ω della sinusoide in ingresso. Il segnale periodico $y(t)$ puó essere sviluppato in serie di Fourier:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

dove i coefficienti a_n e b_n vengono calcolati nel seguente modo:

$$a_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t)\cos n\omega t \, d\omega t \qquad\qquad b_n := \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} y(t) \sin n\omega t \, d\omega t$$

Nello sviluppo in serie manca il termine costante per l'ipotesi di simmetria della caratteristica $y(x)$.

• Lo sviluppo in serie può anche essere scritto nel seguente modo:

$$y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$$

dove $Y_n := \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ e $\varphi_n := \arctan \frac{a_n}{b_n}$. I coefficienti $a_n(X)$, $b_n(X)$, $Y_n(X)$ e $\varphi_n(X)$ sono tipicamente funzioni dell'ampiezza X del segnale di ingresso.

• Trascurando le armoniche di ordine superiore al primo, il segnale periodico $y(t)$ può essere approssimato con la sola componente armonica fondamentale:

$$y(t) \simeq Y_1(X) \ \sin\big(\omega t + \varphi_1(X)\big)$$

• Si definisce "*funzione descrittiva*" $F(X)$ dell'elemento non lineare il numero complesso, funzione dell'ampiezza X del segnale sinusoidale d'ingresso $x(t)$, il cui modulo è uguale al rapporto fra l'ampiezza $Y_1(X)$ della fondamentale del segnale d'uscita $y(t)$ e l'ampiezza X del segnale d'ingresso, e il cui argomento è uguale allo sfasamento $\varphi_1(X)$ della fondamentale del segnale d'uscita rispetto al segnale d'ingresso:

$$\boxed{F(X) = \frac{Y_1(X)}{X} \ e^{j\varphi_1(X)}}$$

• Entro i limiti dell'approssimazione fatta, la funzione descrittiva è analoga alla funzione di risposta armonica, salvo che essa dipende dall'ampiezza X anziché dalla pulsazione ω del segnale di ingresso $x(t)$.

• Una giustificazione dell'ipotesi di poter trascurare le armoniche di ordine superiore al primo è data dalle seguenti considerazioni:

i) la loro ampiezza di solito è minore di quella della fondamentale;

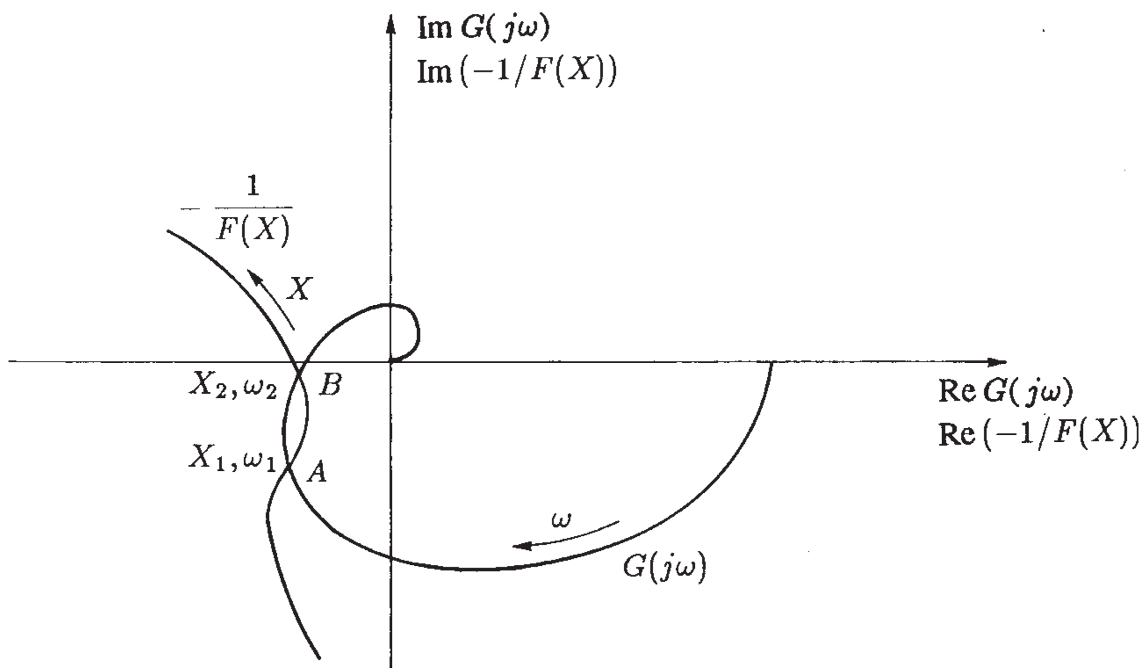
ii) la parte lineare del sistema, comportandosi in genere come un filtro passa basso, tende a ridurne l'ampiezza rispetto alla fondamentale.

• Affinché il sistema sia sede di un'oscillazione persistente deve essere soddisfatta la seguente equazione di autosostentamento:

$$\boxed{F(X)\,G(j\omega) = -1} \qquad \Rightarrow \qquad G(j\omega) = -\frac{1}{F(X)}$$

• Questa equazione (nelle incognite X e ω) coinvolge funzioni a valori complessi (la funzione descrittiva $F(X)$ e la funzione di risposta armonica $G(j\omega)$): le sue soluzioni corrispondono alle ampiezze e alle pulsazioni delle possibili oscillazioni autosostenute presenti nel sistema.

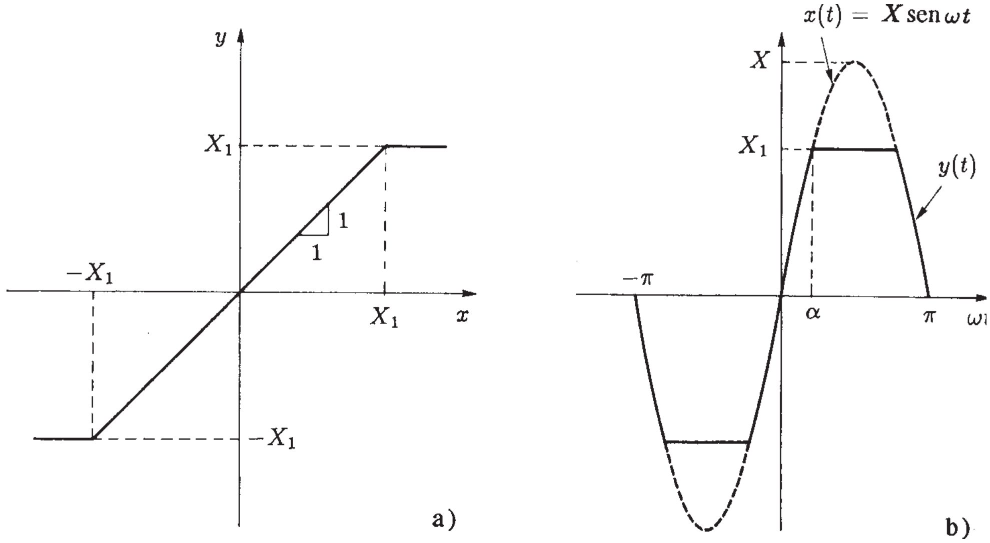
• Questa equazione può essere risolta graficamente tracciando (sul piano complesso) i diagrammi polari delle funzioni $G(j\omega)$ e $-1/F(X)$, il primo graduato in valori di ω e il secondo in valori di X:



• Gli eventuali punti di intersezione (A e B) corrispondono a valori delle pulsazione (ω_1, ω_2) e delle ampiezze (X_1, X_2) delle possibili oscillazioni autosostenute presenti all'interno del sistema retroazionato.

Funzioni descrittive delle principali non linearità

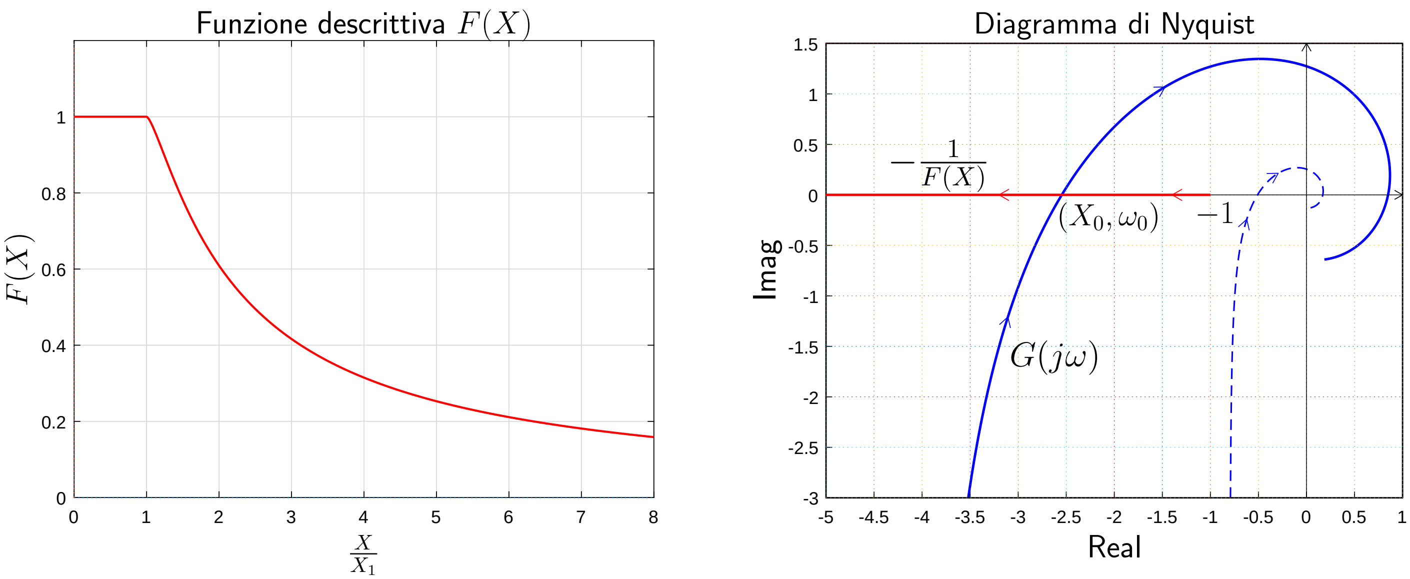
• **Saturazione**. La *saturazione* è una nonlinearità che è tipicamente presente in tutti i sistemi fisici retroazionati. La caratteristica ingresso-uscita della saturazione a pendenza unitaria è la seguente:



• Posto $\Phi\left(\frac{X}{X_1}\right) = \frac{2}{\pi}\left(\mathrm{arcsen}\,\frac{X_1}{X} + \frac{X_1}{X}\sqrt{1-\left(\frac{X_1}{X}\right)^2}\right)$, la funzione descrittiva della saturazione a pendenza unitaria è la seguente:

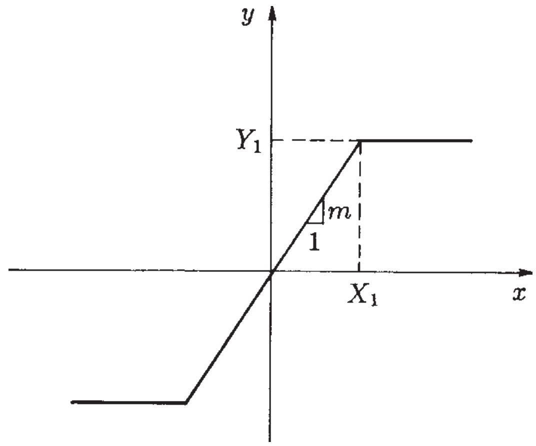
$$F(X) = \begin{cases} 1 & per \quad X \leq X_1 \\ \Phi\left(\dfrac{X}{X_1}\right) & per \quad X \geq X_1\ . \end{cases}$$

• La funzione descrittiva $F(X)$ è reale. Il suo andamento è il seguente:

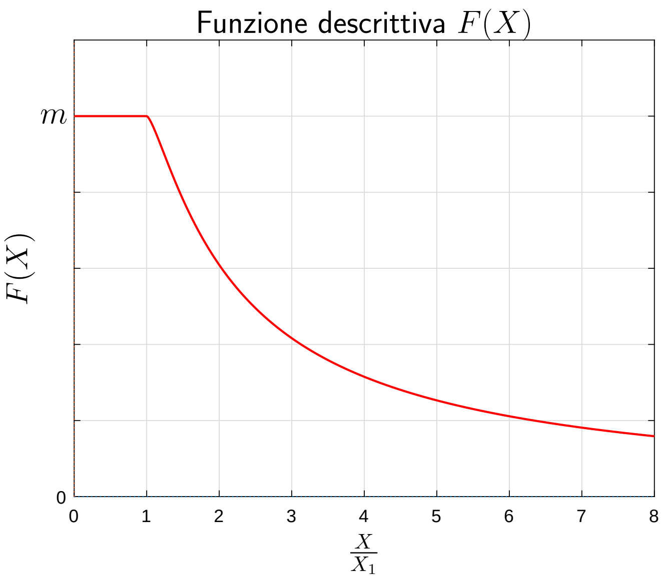


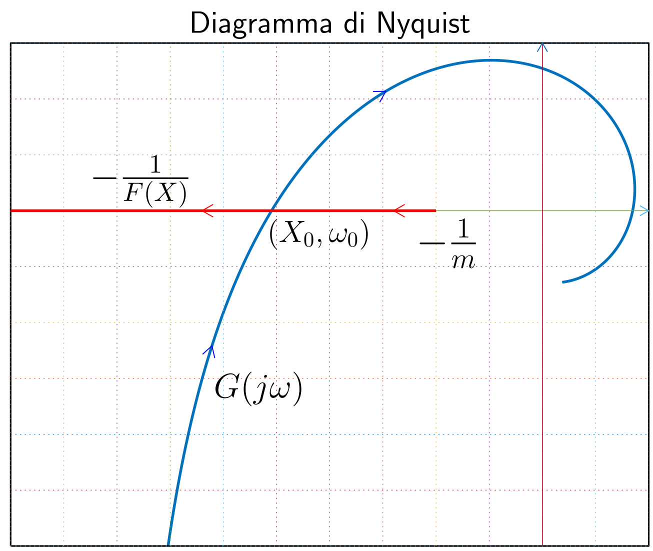
• La funzione descrittiva di una saturazione con pendenza $m = Y_1/X_1$ è:

$$F(X) = \begin{cases} m & per \;\; X \leq X_1 \\ m\,\Phi\!\left(\frac{X}{X_1}\right) & per \;\; X \geq X_1 \end{cases}$$



L'andamento della funzione descrittiva è il seguente:





• Poiché la funzione descrittiva della saturazione è reale, il diagramma della funzione $-1/F(X)$ si svolge su una porzione dell'asse reale negativo.

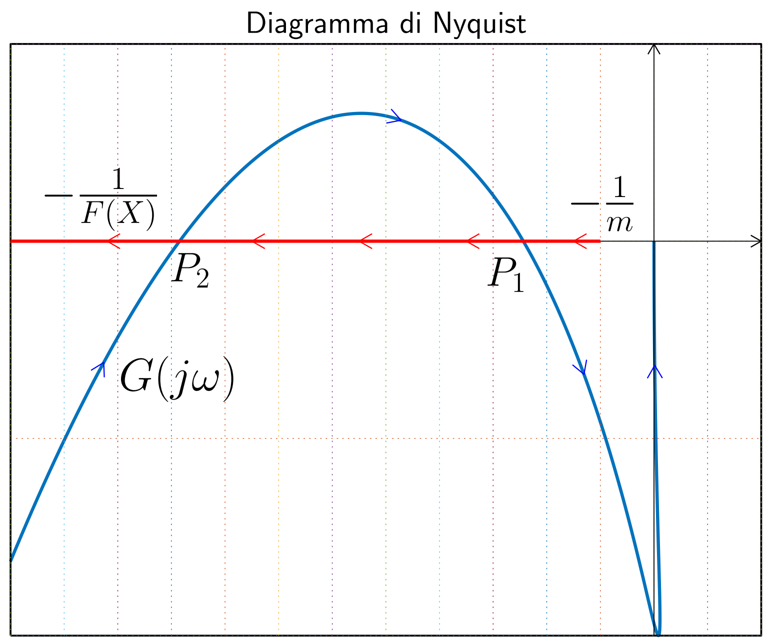
• Se il parametro m é sufficientemente grande, le due funzioni $G(j\omega)$ e $-\frac{1}{F(X)}$ si intersecano nel punto $(X_0,\, \omega_0)$ e quindi nel sistema retroazionato compare una oscillazione autosostenuta di ampiezza X_0 e di pulsazione ω_0.

• Nel caso in esame l'intersezione $(X_0,\, \omega_0)$ è unica. All'aumentare di X la funzione $-\frac{1}{F(X)}$ esce dal diagramma polare completo della funzione $G(j\omega)$ e questo é indice del fatto che il *ciclo limite* presente all'interno del sistema retroazionato é *stabile*.

• Il ciclo limite è stabile in quanto un aumento dell'ampiezza X delle oscillazioni rispetto al valore X_0 tende a spostare il "punto critico" $-1/F(X)$ all'esterno del diagramma polare completo della funzione $G(j\omega)$ e questo spostamento produce un effetto stabilizzante che fa diminuire l'ampiezza X delle oscillazioni e la riporta al valore X_0. Analogamente, una diminuzione dell'ampiezza X delle oscillazioni rispetto al valore X_0 produce uno spostamento del punto critico $-1/F(X)$ verso l'interno del diagramma polare completo e questo provoca un effetto destabilizzante che aumenta l'ampiezza X dell'oscillazione e la riporta al valore X_0.

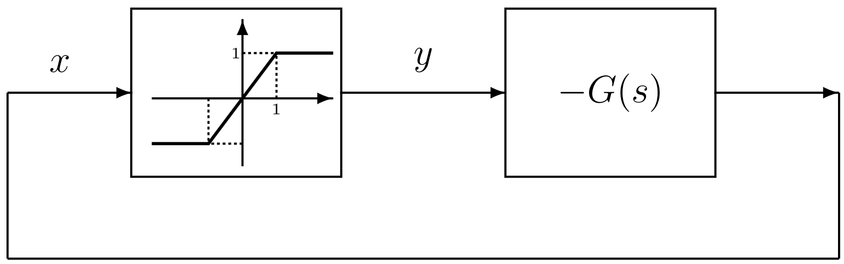
• In generale si può affermare che: *un punto di intersezione* (X_0, ω_0) *delle due funzioni complesse* $G(j\omega)$ *e* $-1/F(X)$ *corrisponde un ciclo limite* *stabile* *quando, all'aumentare di* X*, il punto* $-1/F(X)$ *tende a uscire dal diagramma polare completo della funzione* $G(j\omega)$*. Si ha un ciclo limite* *instabile* *nel caso contrario.*

• Esempio di sistema a stabilità condizionata che per effetto della saturazione presenta un ciclo limite instabile corrispondente al punto $P_1 = (X_1, \omega_1)$ e un ciclo limite stabile corrispondente al punto $P_2 = (X_2, \omega_2)$:



• Per piccoli segnali il sistema retroazionato è stabile, ma all'aumentare del guadagno d'anello all'interno del sistema retroazionato puó innescarsi una oscillazione stabile di pulsazione ω_2 e di ampiezza X_2 nel punto P_2. Le pulsazioni ω_1 e ω_2 dei punti P_1 e P_2 si determinano facilmente calcolando le intersezioni della funzione di risposta armonica $G(j\omega)$ con il semiasse reale negativo.

Esempio. Si consideri il seguente sistema retroazionato:



dove

$$G(s) = \frac{20}{s(s+1)(s+3)}$$

- Equazione caratteristica: $1 + K\,G(s) = 0 \qquad \leftrightarrow \qquad s^3 + 4\,s^2 + 3\,s + 20\,K = 0$
- Tabella di Routh:

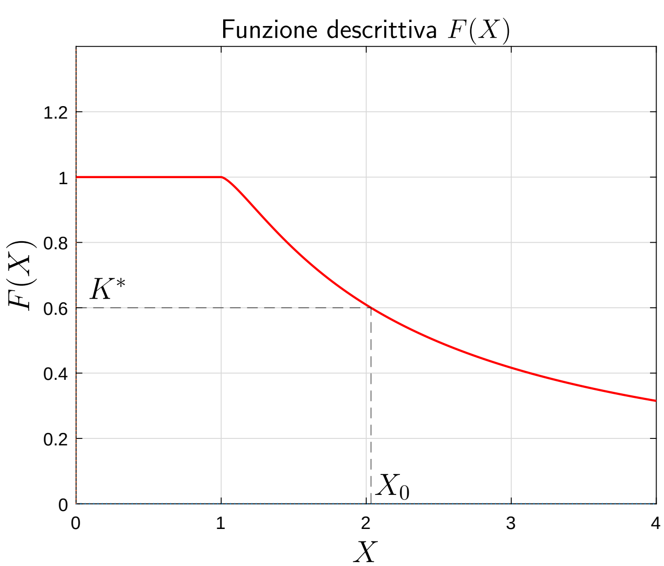
$$\begin{array}{c|cc} 3 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 20K \\ 1 & 12-20K & \\ 0 & 20K & \end{array}$$

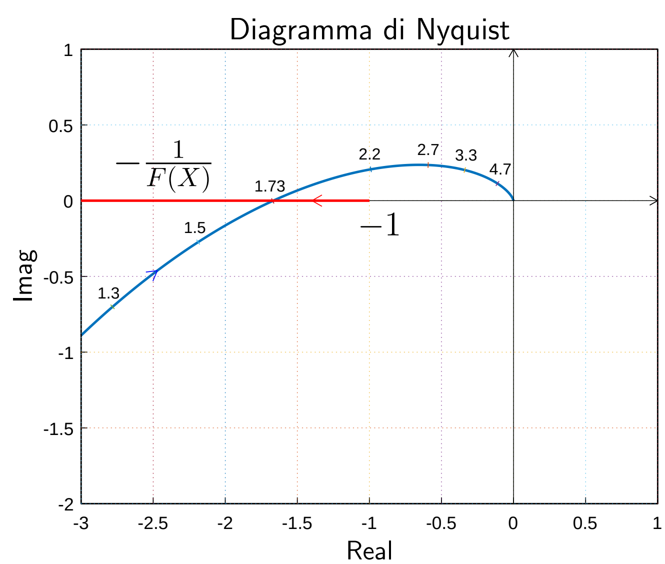
Margine di ampiezza:

$$K^* = \frac{12}{20} = 0.6$$

Intersezione σ^* con il semiasse reale negativo e pulsazione ω_0 del ciclo limite:

$$\sigma^* = -\frac{1}{K^*} = -\frac{20}{12}, \qquad \omega_0 = \sqrt{3} = 1.7321.$$



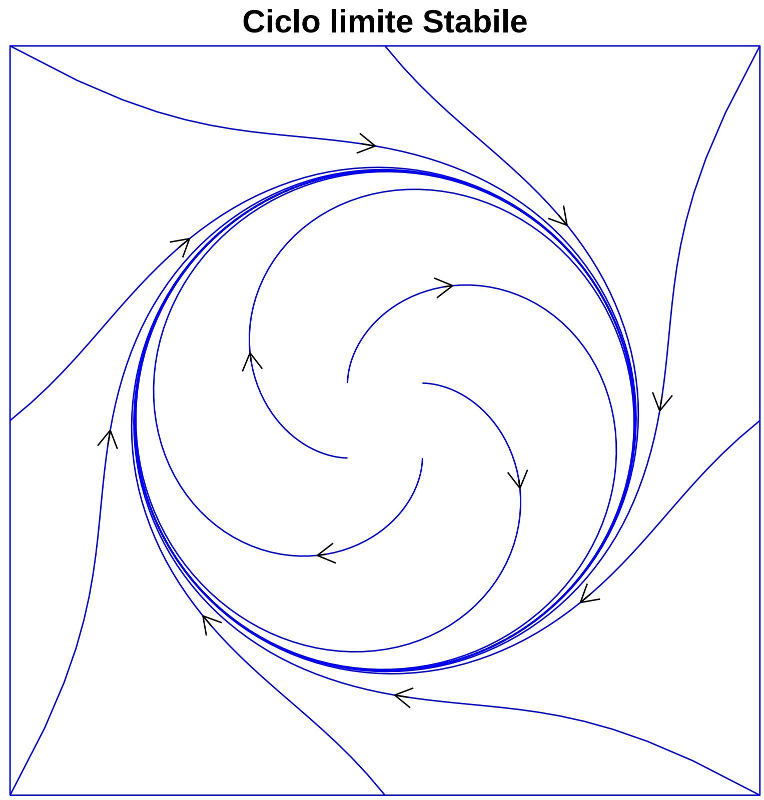


L'ampiezza X_0 si trova utilizzando il grafico della funzione descrittiva.

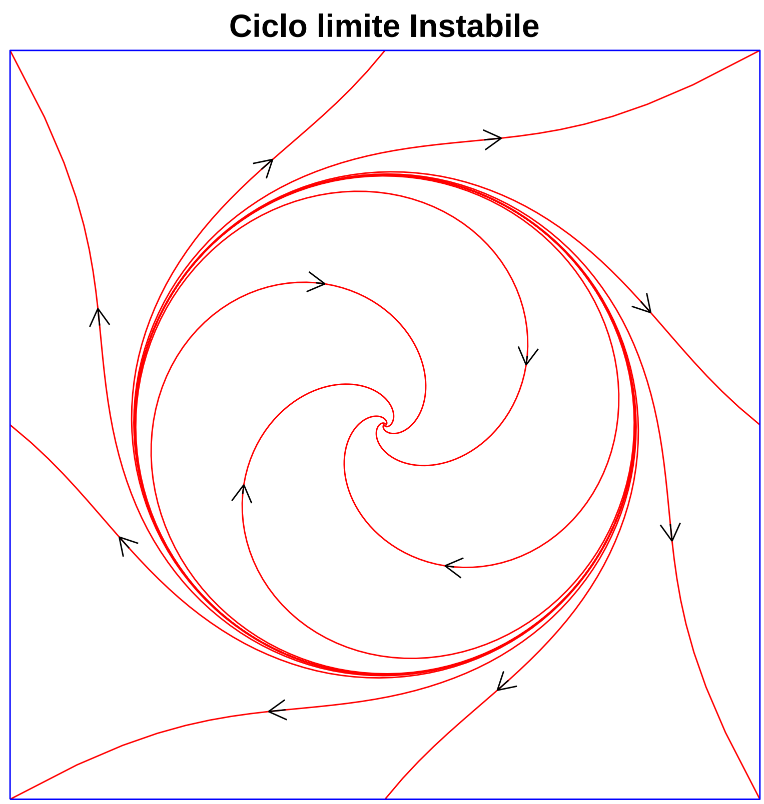
$$F(X_0)\,G(j\omega_0) = -1 \qquad \rightarrow \qquad F(X_0) = -\frac{1}{G(j\omega_0)} = K^*$$

Dal grafico si trova $X_0 = 2.06$.

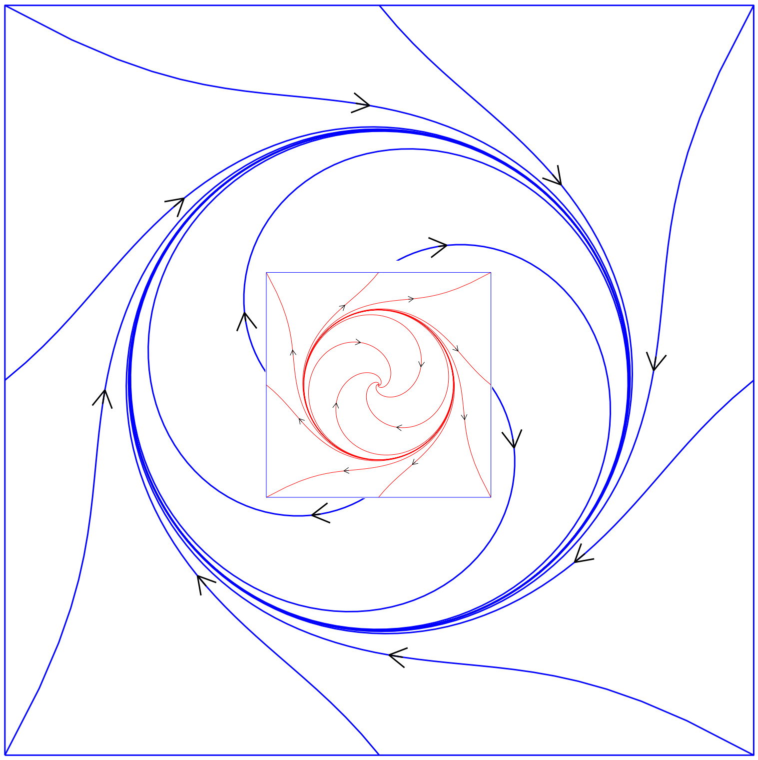
- Funzionamento di un sistema in presenza di un **ciclo limite stabile**.



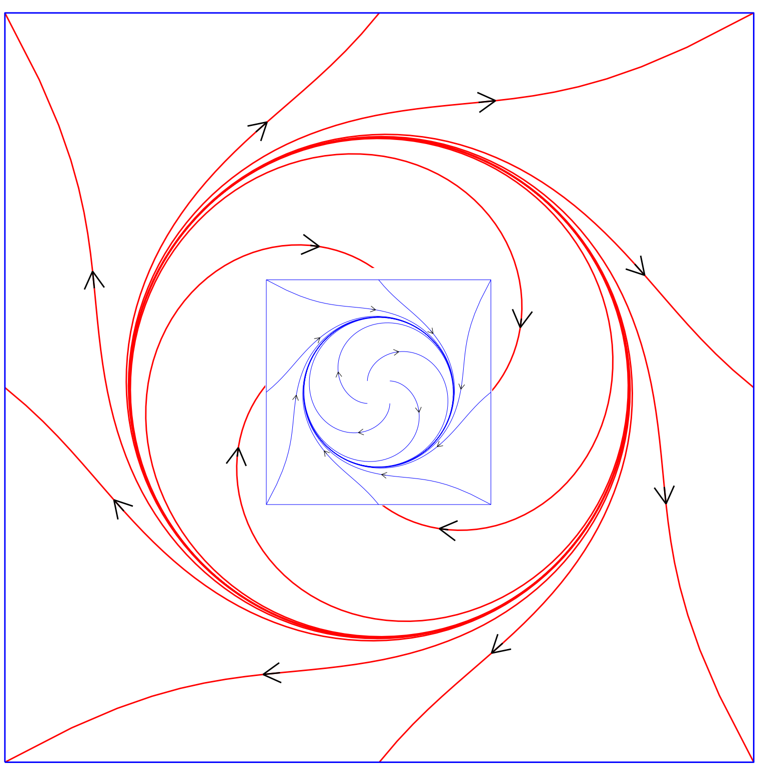
- Funzionamento di un sistema in presenza di un **ciclo limite instabile**.



• Funzionamento di un sistema in presenza di un **ciclo limite instabile** posto all'interno di **ciclo limite stabile**.



• Funzionamento di un sistema in presenza di un **ciclo limite stabile** posto all'interno di **ciclo limite instabile**.



Tracciamento qualitativo della funzione descrittiva

Nel caso in cui la caratteristica non lineare $y = f(x)$ sia a forma di spezzata, l'andamento "qualitativo" della corrispondente funzione descrittiva $F(X)$ può essere facilmente determinato ricordando che:

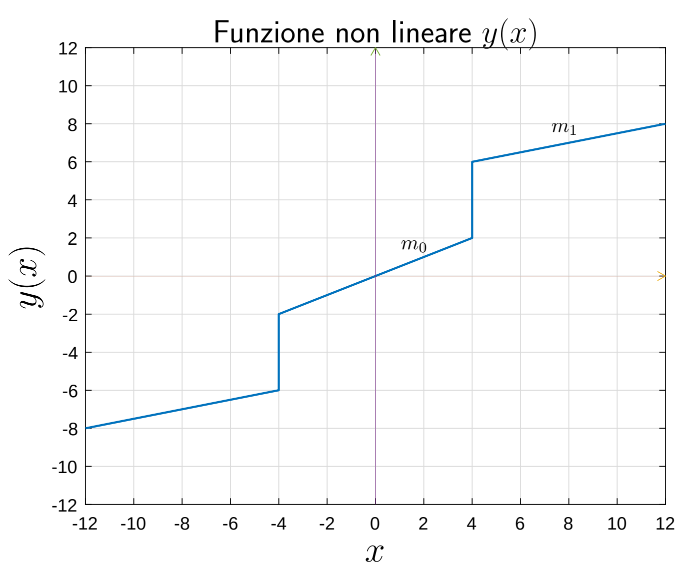
1) La funzione descrittiva $F(X)$ è sempre continua al variare del parametro X. Nel caso in cui la $y = f(x)$ sia lineare, la $F(X)$ è costante, e il suo valore coincide con la pendenza K dell'elemento lineare: se $y = K\,x$ allora $F(X) = K$.

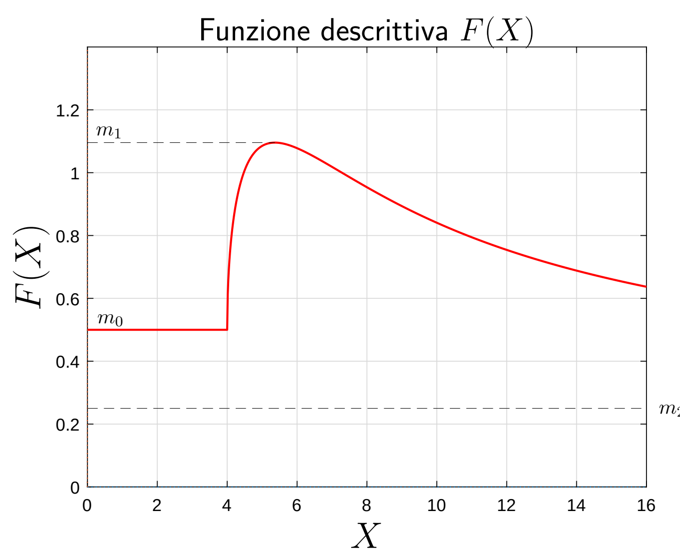
2) Per $X \to 0^+$, il valore della funzione descrittiva $F(X)$ coincide con la "pendenza del primo tratto lineare" della funzione $y = f(x)$. Nel caso in cui la $y = f(x)$ sia discontinua per $x = 0$, il valore della $F(X)$ per $X \to 0^+$ è infinito.

3) In corrispondenza di un cambiamento di pendenza o di una discontinuità della $y = f(x)$, la $F(X)$ cambia pendenza in modo concorde alla variazione di pendenza subita dalla $y = f(x)$.

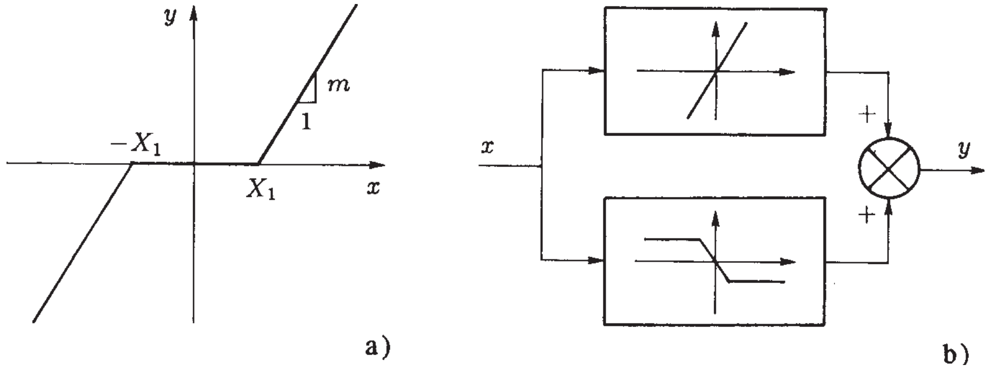
4) Per $X \to \infty$ il valore della funzione descrittiva $F(X)$ coincide con la "pendenza dell'ultimo tratto lineare" della funzione $y = f(x)$.

- Esempio di applicazione delle regole di graficazione qualitativa:





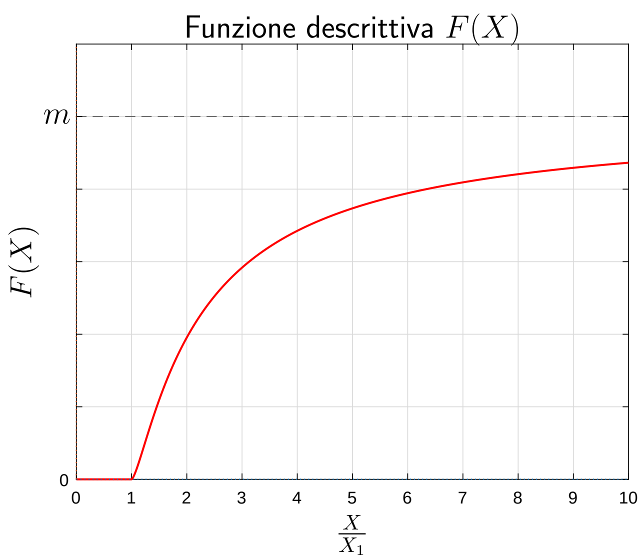
• **Soglia**. La caratteristica dell'elemento non lineare cui si dà il nome di *soglia* o *zona morta* è la seguente:

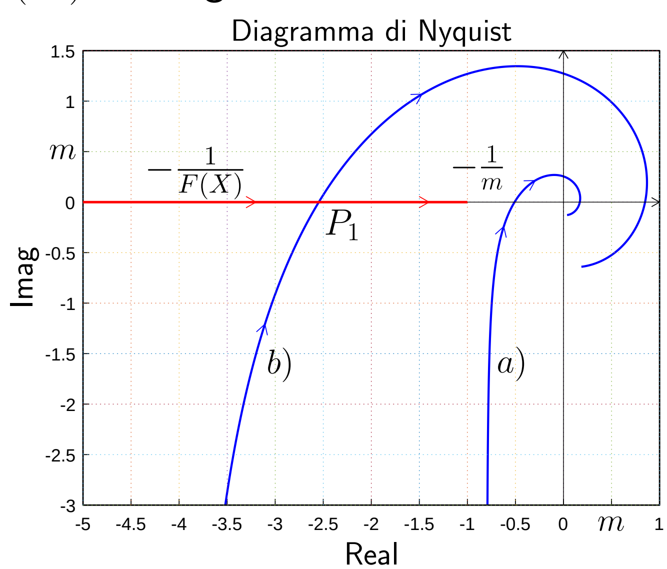


La funzione descrittiva della soglia risulta uguale alla somma delle funzioni descrittive dei due blocchi:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & per \;\; X \leq X_1 \\ m\left(1 - \Phi\left(\dfrac{X}{X_1}\right)\right) & per \;\; X \geq X_1 \; . \end{cases}$$

L'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ è il seguente:



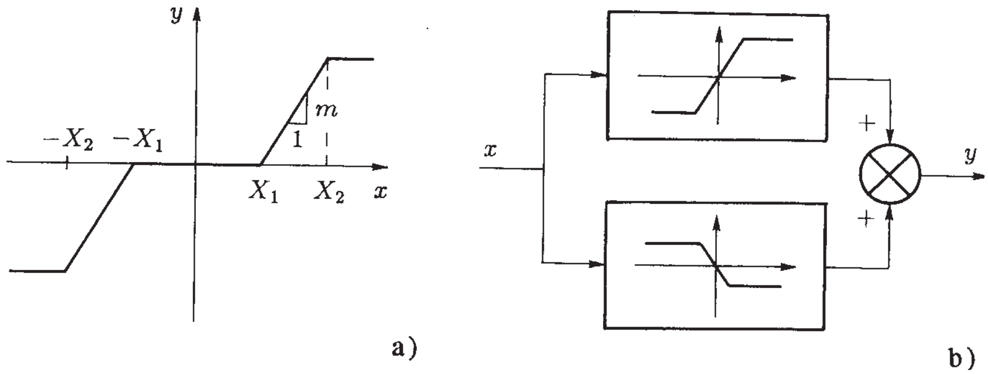


Con questo tipo di non linearitá si possono avere due modi di funzionamento:

a) Se il guadagno di anello é sufficientemente basso, non esistono cicli limite. Inoltre, la funzione $-\frac{1}{F(X)}$ é esterna al diagramma polare completo, per cui l'origine risulta essere un punto di lavoro asintoticamente stabile.

b) Se il guadagno di anello é sufficientemente alto esiste un punto di intersezione P_1 tra le due curve. Tale ciclo limite peró é instabile per cui, in funzione della condizione iniziale, il sistema tenderá asintoticamente a zero oppure a divergere verso l'infinito.

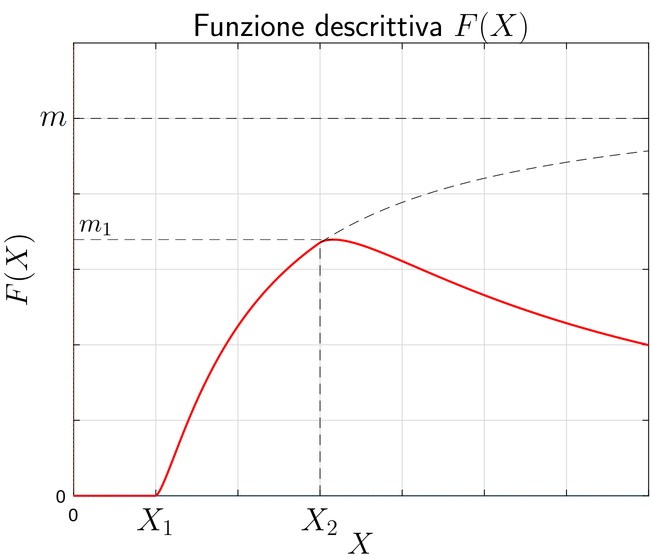
• **Soglia con saturazione**. La caratteristica ingresso-uscita di una soglia con saturazione è:

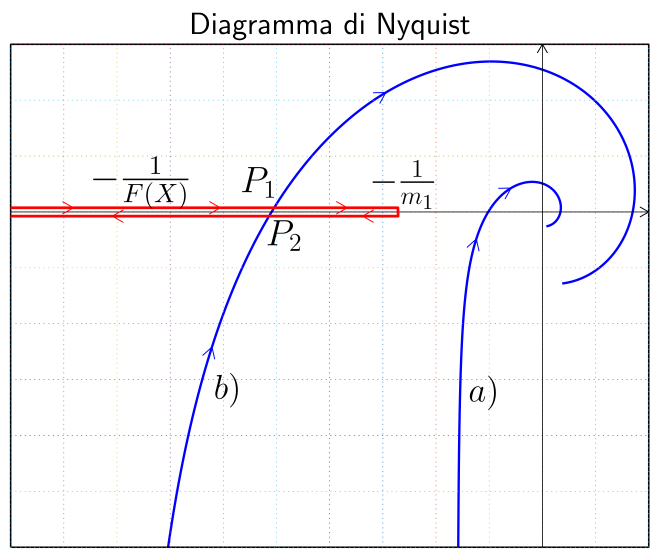


La funzione descrittiva della soglia con saturazione è:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & per X \leq X_1 \\ m\left(1 - \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right)\right) & per X_1 \leq X \leq X_2 \\ m\left(\Phi\left(\frac{X}{X_2}\right) - \Phi\left(\frac{X}{X_1}\right)\right) & per X \geq X_2\ . \end{cases}$$

L'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ è il seguente:



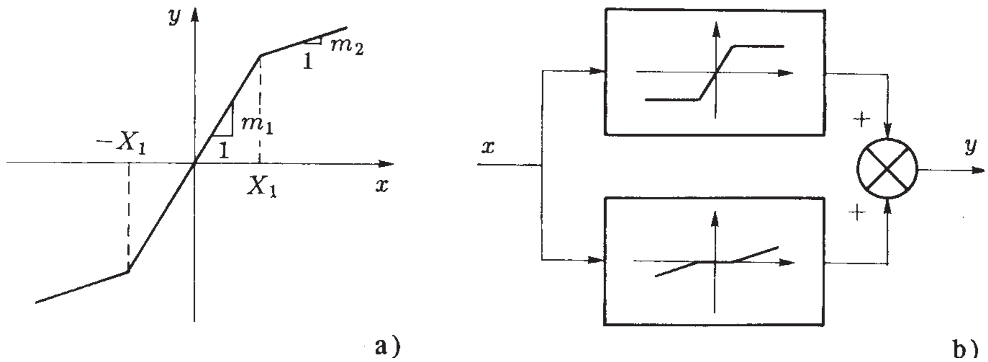


Nel sistema retroazionato si possono avere due diversi modi di funzionamento:

a) Non esistono cicli limite, la funzione $-\frac{1}{F(X)}$ é esterna al diagramma polare completo e l'origine é un punto di lavoro asintoticamente stabile.

b) Esistono due cicli limite $P_1 = (X_1, \omega_0)$ e $P_2 = (X_2, \omega_0)$, il primo instabile e il secondo stabile. Il sistema tende al ciclo limite stabile $P_2 = (X_2, \omega_0)$ con ampiezza X_2 e pulsazione ω_0.

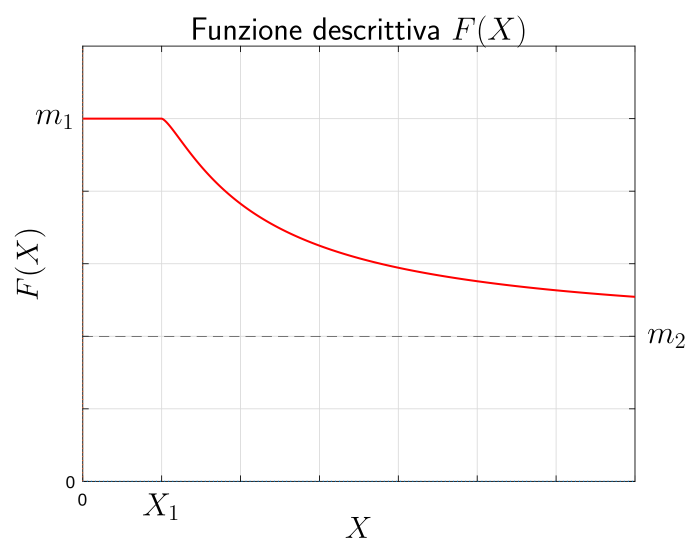
• **Saturazione non netta**. La caratteristica ingresso-uscita di una saturazione non netta è:

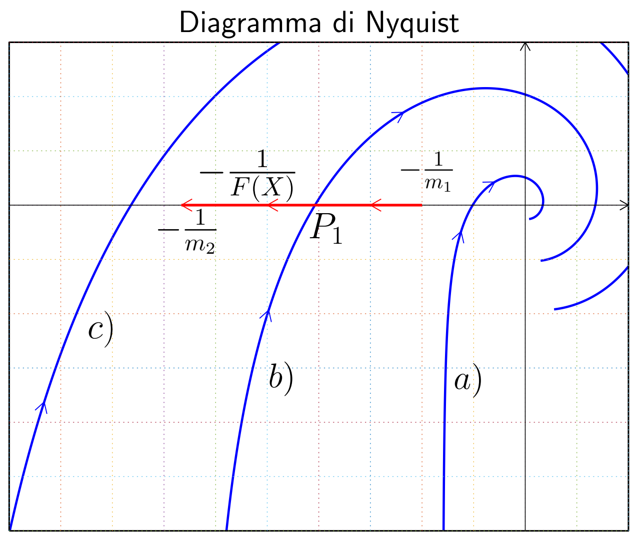


La caratteristica di questo elemento si ottiene come somma delle caratteristiche di una saturazione e di una soglia per cui la sua funzione descrittiva è:

$$F(X) = \begin{cases} m_1 & per X \leq X_1 \\ (m_1 - m_2)\,\Phi\!\left(\dfrac{X}{X_1}\right) + m_2 & per X \geq X_1 \;. \end{cases}$$

L'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ è il seguente:





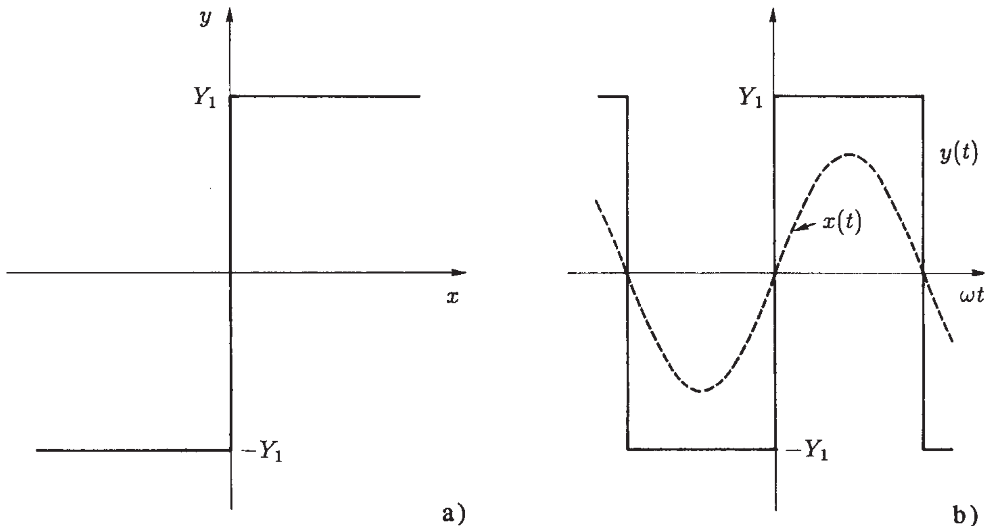
Il sistema retroazionato ha tre diversi modi di funzionamento:

a) Non ci sono cicli limite, la funzione $-\frac{1}{F(X)}$ é esterna al diagramma polare completo e l'origine é un punto di lavoro asintoticamente stabile.

b) Esiste un ciclo limite $P_1 = (X_1, \omega_0)$ stabile. Il sistema é sede di un'oscillazione autosostenuta di ampiezza X_1 e pulsazione ω_0.

c) Non ci sono cicli limite, ma la funzione $-\frac{1}{F(X)}$ é tutta interna al diagramma polare completo per cui il sistema retroazionato é instabile.

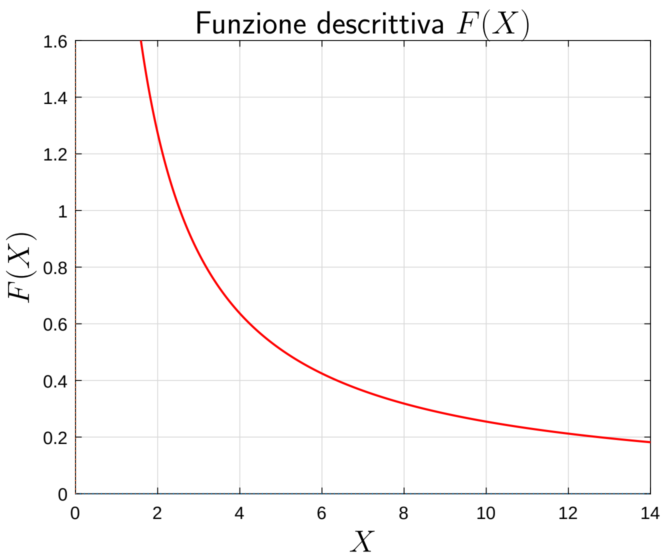
• **Relè ideale**. Caratteristica ingresso-uscita di un relè ideale:

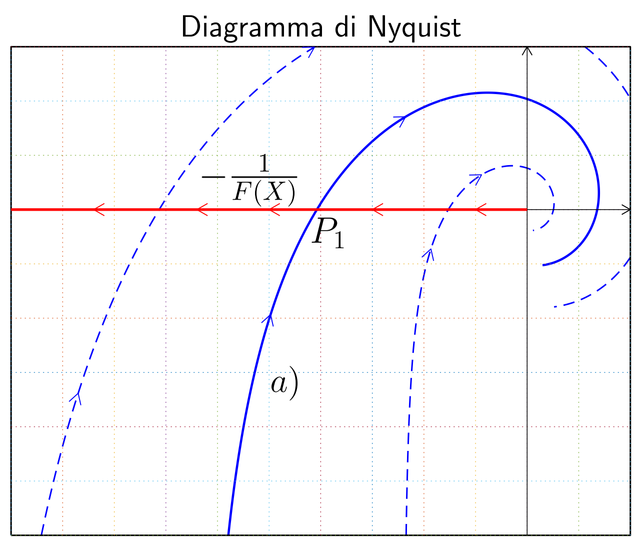


• La corrispondente funzione descrittiva è particolarmente semplice:

$$\boxed{F(X) = \frac{4\,Y_1}{\pi\,X}}$$

• L'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ è il seguente:



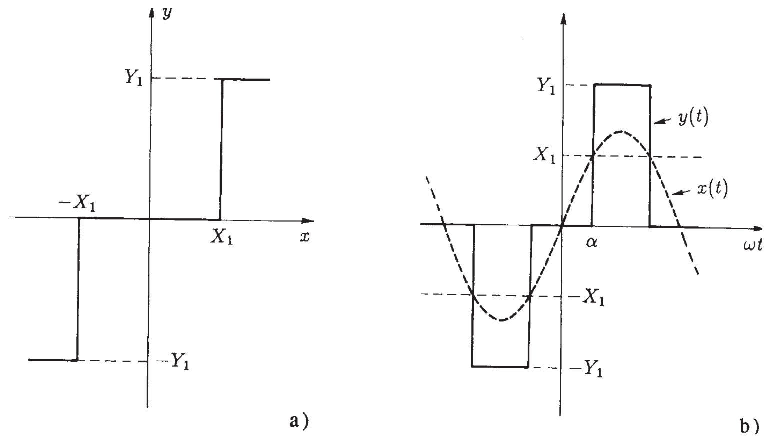


• Qualunque sia il guadagno di anello il sistema retroazionato é sempre "autooscillante": a) esiste un ciclo limite $P_1 = (X_1, \omega_0)$ stabile. Il sistema é sede di un'oscillazione autosostenuta di ampiezza X_1 e pulsazione ω_0.

• Applicando il criterio di Routh alla funzione $G(s)$ é possibile determinare i parametri K^* e ω^*. Da tali valori di determina: $\omega_0 = \omega^*$ e $P_1 = -1/K^*$. Imponendo $-1/F(X_1) = P_1 = -1/K^*$ si ricava: $F(X_1) = K^*$ e $X_1 = \frac{4\,Y}{\pi K^*}$:

$$F(X_1) = \frac{4\,Y_1}{\pi\,X_1} = K^* \qquad \Rightarrow \qquad X_1 = \frac{4\,Y}{\pi K^*}$$

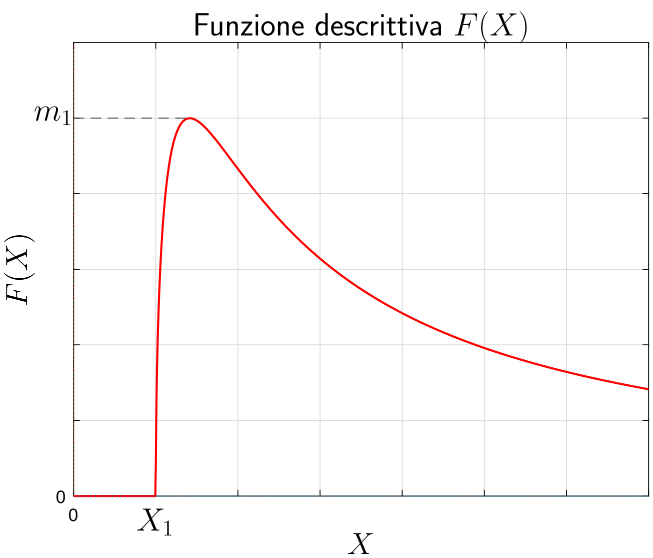
• **Relè con soglia**. La sua caratteristica ingresso-uscita è la seguente:

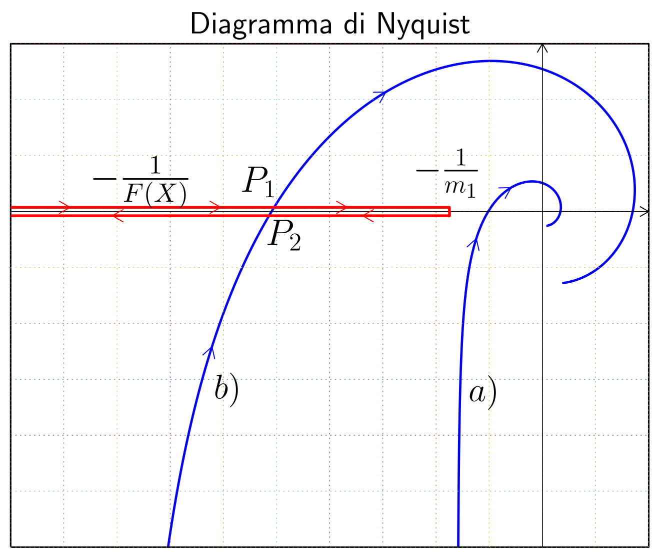


• La sua funzione descrittiva è:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & per \;\; X \leq X_1 \\ \frac{4\,Y_1}{\pi X}\sqrt{1-\left(\frac{X_1}{X}\right)^2} & per \;\; X \geq X_1 \;. \end{cases}$$

• L'andamento della funzione descrittiva $F(X)$ è il seguente:





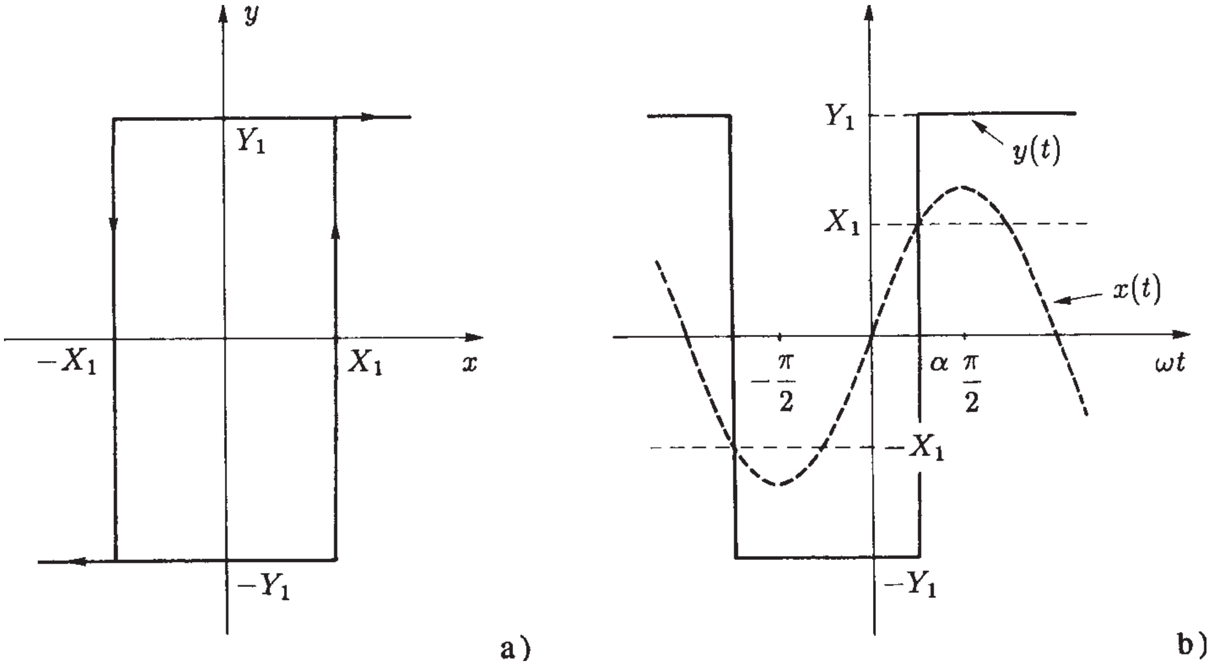
• Nel sistema retroazionato si possono avere due soli modi di funzionamento:

a) Non esistono cicli limite, la funzione $-\frac{1}{F(X)}$ é esterna al diagramma polare completo e l'origine é un punto di lavoro asintoticamente stabile.

b) Esistono due cicli limite $P_1 = (X_1, \omega_0)$ e $P_2 = (X_2, \omega_0)$, il primo instabile e il secondo stabile. Il sistema tende al ciclo limite stabile $P_2 = (X_2, \omega_0)$ con ampiezza X_2 e pulsazione ω_0.

• Il comportamento dinamico é simile a quello ottenuto con una soglia con saturazione.

• **Relè con isteresi**. Caratteristica $y = f(x)$ e forme d'onda dei segnali di ingresso $x(t)$ e di uscita $y(t)$:



• Si noti che la caratteristica $y = f(x)$ non è da una funzione ad un sol valore. Il relè con isteresi è un tipico elemento non lineare la cui funzione descrittiva $F(X)$ è complessa in quanto la fondamentale del segnale di uscita è sfasata in ritardo rispetto al segnale di ingresso.

• Per $X < X_1$ la funzione descrittiva *non è definita*, mentre per $X \geq X_1$ la funzione descrittiva $F(X)$ é la segunete:

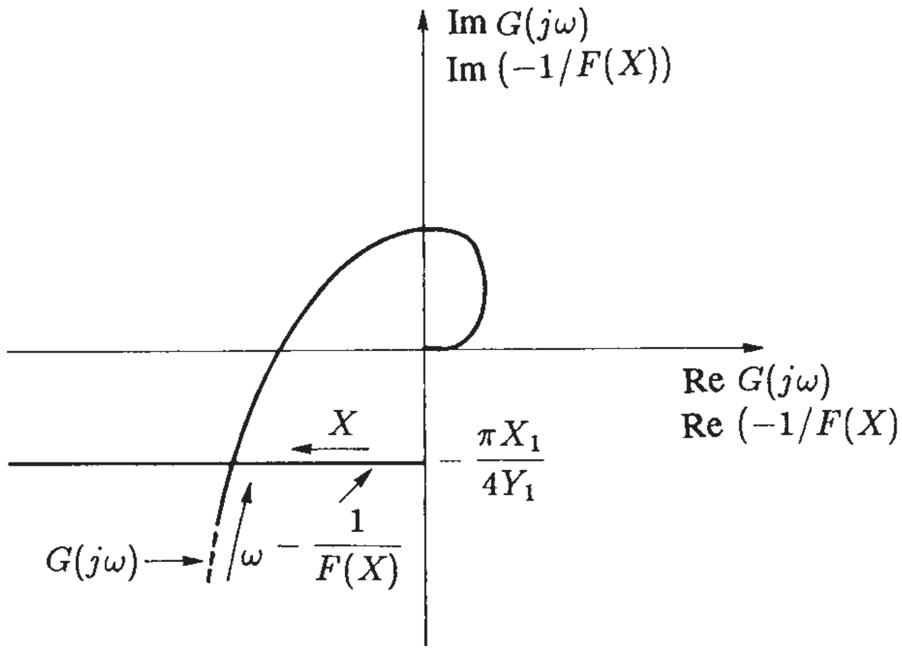
$$F(X) = \frac{4\,Y_1}{\pi\,X}\left(\sqrt{1-\left(\frac{X_1}{X}\right)^2} - j\,\frac{X_1}{X}\right) = \frac{4\,Y_1}{\pi\,X}\,e^{-j\,\mathrm{arcsen}\frac{X_1}{X}}$$

• Si noti che la funzione $-1/F(X)$ puó essere espressa nel seguente modo:

$$\begin{aligned}-\tfrac{1}{F(X)} &= -\frac{\pi\,X}{4\,Y_1}\,e^{j\,\mathrm{arcsen}\frac{X_1}{X}} = \frac{\pi\,X}{4\,Y_1}\left(-\sqrt{1-\left(\frac{X_1}{X}\right)^2} - j\,\frac{X_1}{X}\right)\\ &= -\frac{\pi\,X}{4\,Y_1}\sqrt{1-\left(\frac{X_1}{X}\right)^2} - j\,\frac{\pi X_1}{4\,Y_1}\end{aligned}$$

Si noti che la parte immaginaria della funzione $-1/F(X)$ è costante.

• Il diagramma polare della funzione $-1/F(X)$ é una semiretta parallela all'asse reale di ordinata $-\frac{\pi X_1}{4Y_1}$:



• Dal precedente grafico risulta chiaro che:

i) se il guadagno di anello $G(s)$ ha grado relativo $r \geq 3$ ed é di tipo $h \leq 1$, nel sistema retroazionato é sicuramente presente un'oscillazione autosostenuta di ampiezza X_1 e pulsazione ω_1.

ii) La pulsazione ω_1 di tale oscillazione autosostenuta é sicuramente piú bassa di quella ω_0 che si avrebbe nel sistema retrioazionato se si utilizzasse un semplice relé ideale.