Esercizi sulla scomposizione in fratti semplici

Calcolare la risposta impulsiva $g(t)$ delle seguenti funzioni $G(s)$:

1. **Somma di funzioni note.**

$$G(s) = 3 + \frac{10}{(s+5)^3} \qquad \rightarrow \qquad g(t) = 3\,\delta(t) + 5\,t^2 e^{-5\,t}$$

2. **Funzione razionale fratta a grado relativo $r = 0$.**

$$G(s) = \frac{s+10}{s+a} = g_0 + G_1(s)$$

In questo caso la funzione $G(s)$ va riscritta come somma di una costante g_0 e di una funzione $G_1(s)$ a grado relativo $r \geq 1$:

$$g_0 = \lim_{s\to\infty} G(s) = 1, \qquad G_1(s) = G(s) - g_0 = \frac{(10-a)}{s+a}$$

Si procede quindi ad antitrasformare i singoli termini:

$$G(s) = 1 + \frac{(10-a)}{s+a} \qquad \rightarrow \qquad g(t) = \delta(t) + (10-a)\,e^{-a\,t}$$

3. **Funzione con ritardo puro.**

$$G(s) = \frac{e^{-t_0\,s}}{s^2} \qquad \rightarrow \qquad g(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ t - t_0 & t \geq t_0 \end{cases}$$

In questo caso si calcola l'antitrasformata $g_1(t) = t$ della funzione $G_1(s) = \frac{1}{s^2}$ che si ottiene dalla $G(s)$ togliendo il ritardo. La funzione cercata $g(t)$ di ottiene traslando nel tempo la funzione $g_1(t)$ di una quantità pari al ritardo t_0 e ricordando che la funzione $g(t)$ dovrà essere nulla per $t \leq t_0$.

4. **Funzione $G(s)$ posta nella forma fattorizzata poli-zeri.**

$$G(s) = \frac{2}{s(s+1)(s+2)} = \frac{K_1}{s} + \frac{K_2}{s+1} + \frac{K_3}{s+2}$$

In questo caso è possibile scomporre la funzione in fratti semplici utilizzando la regola dei residui:

$$K_1 = s\,G(s)\Big|_{s=0} = 1, \qquad K_2 = (s+1)\,G(s)\Big|_{s=-1} = -2, \qquad K_3 = (s+2)\,G(s)\Big|_{s=-2} = 1$$

In questo caso in cui il grado relativo della funzione $G(s)$ è maggiore o uguale a 2, si può verificare che la somma dei residui è nulla: $K_1 + K_2 + K_3 = 0$. Antitrasformando si ottiene quindi che:

$$G(s) = \frac{1}{s} - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \qquad \rightarrow \qquad g(t) = 1 - 2\,e^{-t} + e^{-2\,t}$$

5. **Funzione $G(s)$ posta nella forma fattorizzata mista.**

$$G(s) = \frac{7}{(4\,s+1)(s+2)^2}$$

In questo caso, per non commettere errori, prima di antitrasformare è bene porre la funzione $G(s)$ nella forma fattorizzata poli zeri:

$$G(s) = \frac{7}{4(s+0.25)(s+2)^2} = \frac{K_1}{s+0.25} + \frac{K_2}{s+2} + \frac{K_3}{(s+2)^2}$$

In questo caso i termini più facili da calcolare sono K_1 e K_3:

$$K_1 = (s+0.25)\,G(s)\Big|_{s=-0.25} = \frac{7}{4(-0.25+2)^2} = \frac{4}{7}, \qquad K_3 = (s+2)^2\,G(s)\Big|_{s=-2} = \frac{7}{4(-2+0.25)} = -1$$

Il termine K_2 può essere facilmente calcolato ricordando che, in questo caso, la somma dei residui è nulla, $K_1 + K_2 = 0$, per cui si ha che $K_2 = -K_1 = -\frac{4}{7}$. Antitrasformando si ottiene quindi che:

$$G(s) = \frac{4}{7(s+0.25)} - \frac{4}{7(s+2)} - \frac{1}{(s+2)^2} \qquad \rightarrow \qquad g(t) = \frac{4}{7}\,e^{-0.25\,t} - \frac{4}{7}\,e^{-2\,t} - t\,e^{-2\,t}$$

6. **Funzione $G(s)$ caratterizzata solo da 2 poli complessi coniugati.**

$$G(s) = \frac{a\,s+b}{(s+\sigma)^2+\omega^2}$$

In questo caso si cerca di scomporre la funzione $G(s)$ in due termini, uno proporzionale al seno e l'altro proporzionale al coseno:

$$\begin{aligned} G(s) &= \frac{a\,(s+\sigma-\sigma)+b}{(s+\sigma)^2+\omega^2} = \frac{a\,(s+\sigma)+(b-a\sigma)}{(s+\sigma)^2+\omega^2} \\ &= a\,\frac{(s+\sigma)}{(s+\sigma)^2+\omega^2} + \frac{(b-a\sigma)}{\omega}\frac{\omega}{(s+\sigma)^2+\omega^2} \end{aligned}$$

Il fatto che ad ogni termine in s sia associato un termine additivo $+\sigma$ indica che le corrispondenti funzioni $\sin(\omega t)$ e $\cos(\omega t)$ devono essere moltiplicate per un termine esponenziale $e^{-\sigma t}$. Antitrasformando si ottiene quindi la seguente funzione:

$$g(t) = a\,e^{-\sigma t}\cos(\omega t) + \frac{(b-a\sigma)}{\omega}\,e^{-\sigma t}\sin(\omega t)$$

7. **Funzione $G(s)$ espressa come somme e prodotto di fattori.**

$$G(s) = \left[\frac{3\,b}{(s+a)^2} + 4\right]\frac{1}{(s+a)^2}$$

In questo caso si riscrive la funzione $G(s)$ come somma di fattori e poi si antitrasforma:

$$G(s) = \frac{3\,b}{(s+a)^4} + \frac{4}{(s+a)^2} \qquad \rightarrow \qquad g(t) = \frac{3b}{6}\,t^3\,e^{-a\,t} + 4\,t\,e^{-a\,t}$$