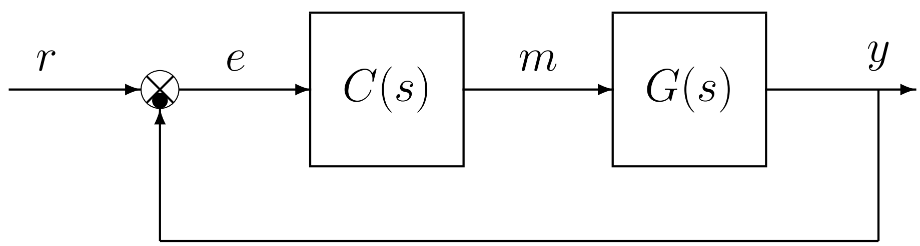
Sintesi di reti correttrici: formule di inversione

- Si consideri il seguente sistema retroazionato:



dove $G(s)$ è il sistema da controllare e $C(s)$ è un'opportuna rete correttrice aventi la seguente struttura:

$$\boxed{C(s) = \frac{1+\tau_1 s}{1+\tau_2 s}}$$

- Si ha una rete anticipatrice quando $\tau_1 > \tau_2$:

$$C(s) = \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s} \qquad \text{dove} \qquad \tau = \tau_1, \quad \alpha = \frac{\tau_2}{\tau_1} < 1$$

- Si ha una rete ritardatrice quando $\tau_1 < \tau_2$:

$$C(s) = \frac{1+\alpha\tau s}{1+\tau s} \qquad \text{dove} \qquad \tau = \tau_2, \quad \alpha = \frac{\tau_1}{\tau_2} < 1$$

- Le specifiche di stabilitá del sistema retroazionato vengono tipicamente date in termini di *margine di fase* M_φ e di *margine di ampiezza* M_α.

- I parametri τ_1 e τ_2 della rete correttrice $C(s)$ vengono progettati utilizzano le seguenti *formule di inversione*:

$$\boxed{\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega \sin\varphi}, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega \sin\varphi}}$$

dove M e φ rappresentano l'amplificazione anticipo di fase della rete correttrice in corrispondenza della pulsazione ω.

Calcolo delle formule di inversione

- Problema di progetto: *determinare i valori τ_1 e τ_2 della funzione $C(s)$ in modo che:*

$$C(j\omega) = \frac{1 + j\,\tau_1\omega}{1 + j\,\tau_2\omega} = M\; e^{j\varphi}$$

cioè in modo che la rete correttrice $C(s)$ amplifichi di M ed anticipi di φ in corrispondenza della pulsazione ω.

- Le formule di inversione si ottengono riscrivendo l'equazione

$$C(j\omega) = \frac{1 + j\,\tau_1\omega}{1 + j\,\tau_2\omega} = M\; e^{j\varphi} = M\cos\varphi + jM\sin\varphi$$

nella seguente forma

$$(M\cos\varphi + jM\sin\varphi)(1 + j\;\tau_2\omega) = 1 + j\;\tau_1\omega$$

Trasformando tale equazione nel sistema lineare

$$\begin{bmatrix} 1 & -M\cos\varphi \\ 0 & M\sin\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tau_1\omega \\ \tau_2\omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M\sin\varphi \\ M\cos\varphi - 1 \end{bmatrix}$$

e risolvendo rispetto alle variabili τ_1 e τ_2

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{\begin{vmatrix} M\sin\varphi & -M\cos\varphi \\ M\cos\varphi - 1 & M\sin\varphi \end{vmatrix}}{\omega M\sin\varphi} = \frac{M - \cos\varphi}{\omega\sin\varphi} \\ \tau_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & M\sin\varphi \\ 0 & M\cos\varphi - 1 \end{vmatrix}}{\omega M\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi - \dfrac{1}{M}}{\omega\sin\varphi} \end{aligned}$$

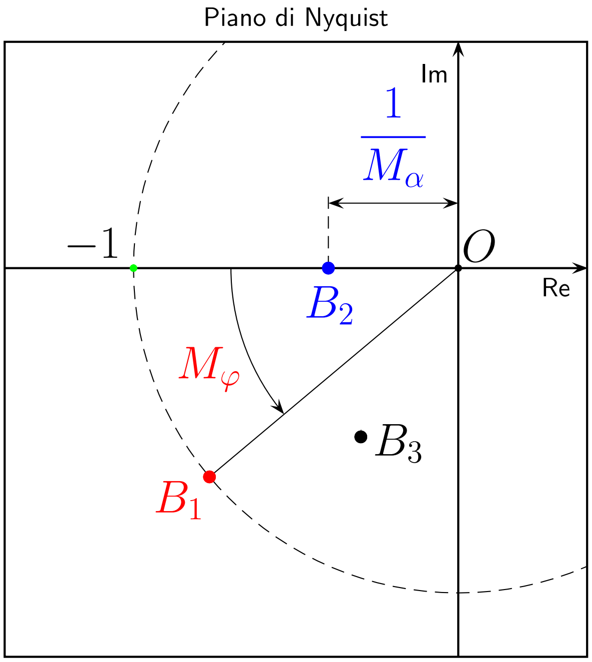
si ottengono le seguenti *formule di inversione*:

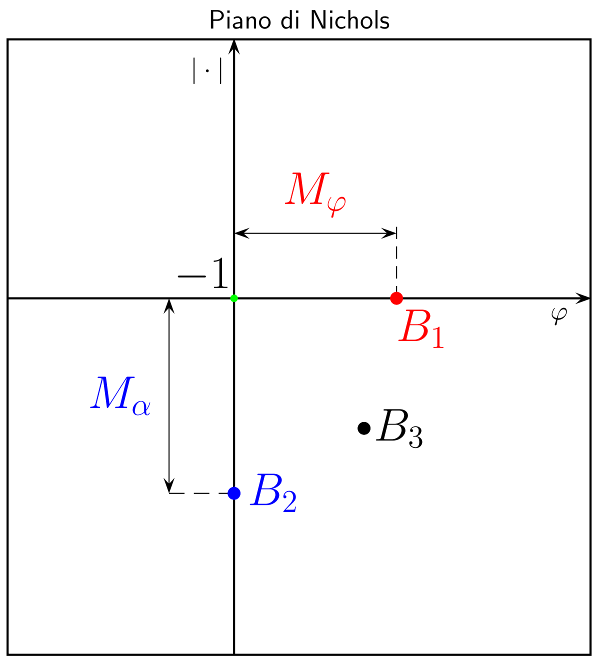
$$\boxed{\tau_1 = \frac{M - \cos\varphi}{\omega\sin\varphi}, \qquad \tau_2 = \frac{\cos\varphi - \frac{1}{M}}{\omega\sin\varphi}}$$

- Tali formule sono valide sia per reti anticipatrici ($M > 1$ e $\varphi > 0$) che per reti ritardatrici ($M < 1$ e $\varphi < 0$).

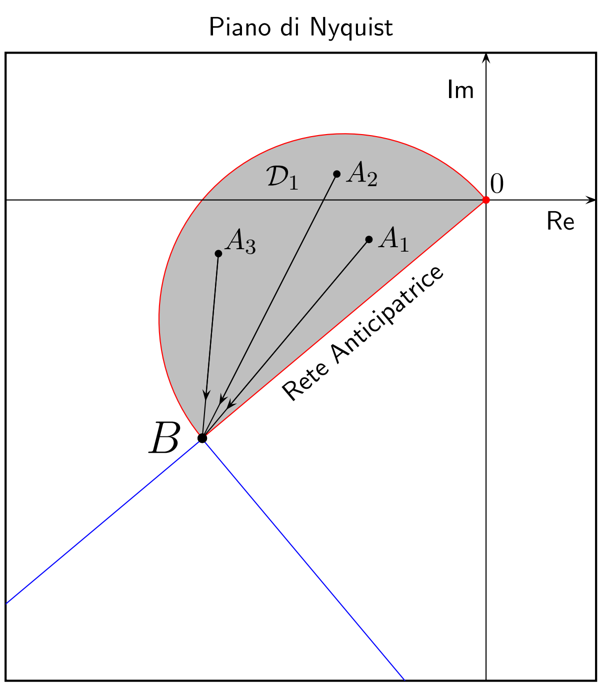
- Le specifiche di stabilitá riguardanti il *margine di fase* M_φ e il *margine di ampiezza* M_α possono sempre essere convertite nell'individuazione di un punto B sul piano complesso attraverso il quale deve passare la funzione armonica del sistema controllato $C(s)G(s)$.

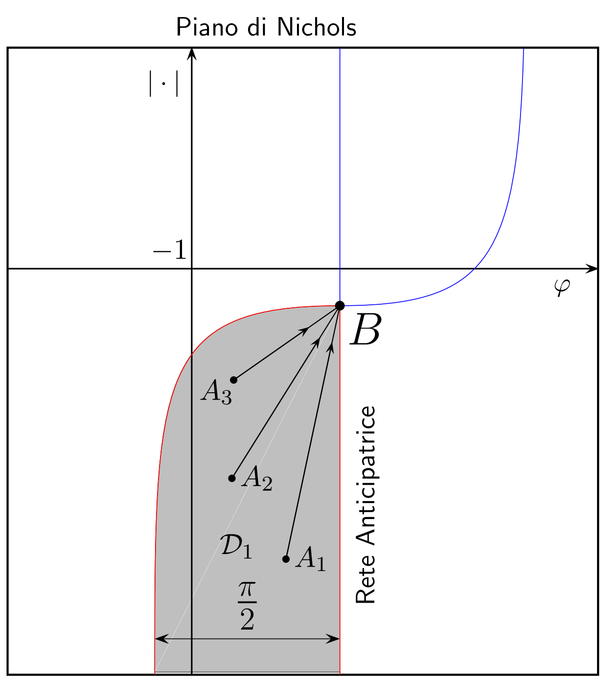
- Determinazione del punto B sul piano di Nyquist e sul piano di Nichols



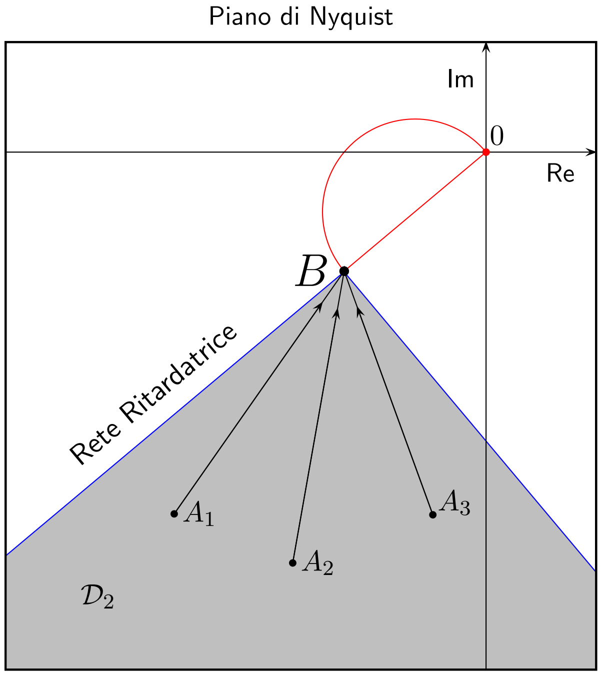


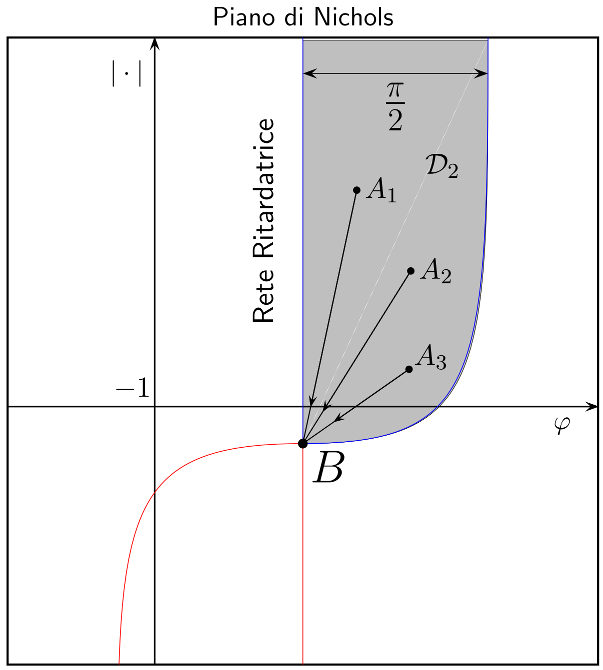
- Regione $\mathcal{D}_1$ dei punti A che una *rete anticipatrice* puó spostare in B.





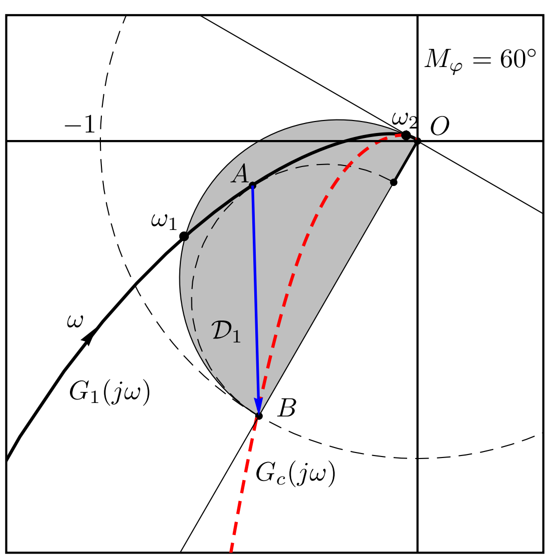
- Regione $\mathcal{D}_2$ dei punti A che una *rete ritardatrice* puó spostare in B.

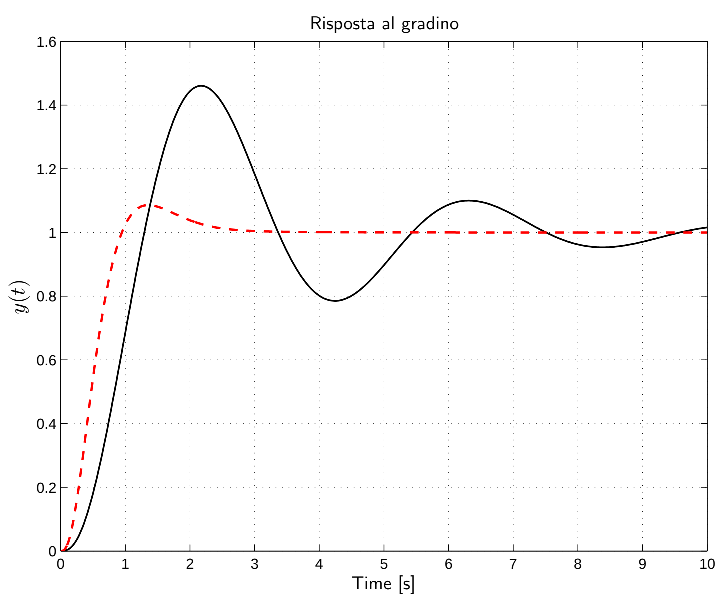




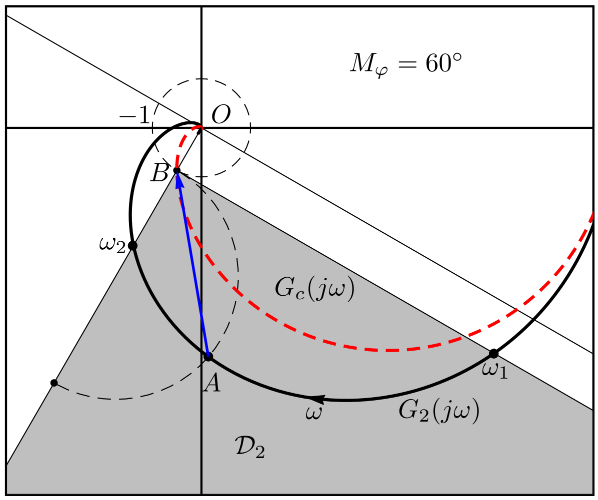
Esempi di sintesi di reti correttrici

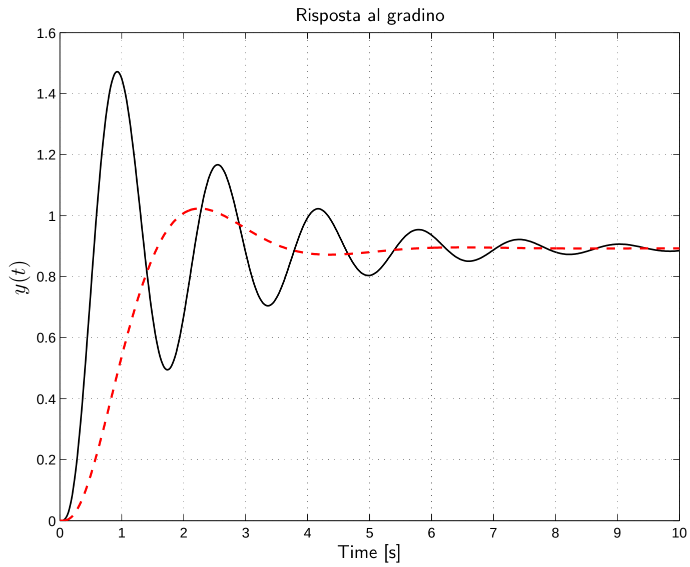
- Progetto di rete anticipatrice per il sistema $G_1(s)$. Specifica: $M_\varphi = 60°$





- Progetto di rete ritardatrice per il sistema $G_2(s)$. Specifica: $M_\varphi = 60°$.





- Progetto di rete ritardatrice per il sistema $G_3(s)$. Specifica: $M_\alpha = 5$.